УДК 519.252

В.И. ПЕРМЯКОВ[1], А.Ю. НЕВКРЫТЫЙ[1], О.В. ЯРОВАЯ[2]

[1]*Харьковский государственный университет строительства и архитектуры, Украина*
[2]*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ", Украина*

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ДАТЧИКОВ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ

Рассмотрены экспериментально-статистический подход к реконструкции физических, химико-технологических полей по конечному числу измерений, задача определения необходимого числа точек для измерений, а также задача их рационального выбора в технологическом объеме. Приведен численный алгоритм решения поставленных задач.

безопасность, противообледенительная система, пространственно-временные случайные температурные поля, датчик, корреляционная функция, интерполирование, моменты поля

Введение

Проблема обеспечения безопасности полетов самолетов и вертолетов стала особенно острой с увеличением высоты и скорости полета, размеров летательных аппаратов (ЛА) и интенсивным использованием авиации как вида транспорта. Решение ее в значительной степени зависит от уровня оснащенности ЛА специальными системами, в частности системами, обеспечивающими безопасность полетов в сложных метеорологических условиях (при обледенении).

Условия, при которых возникает обледенение самолетов и вертолетов, формируются главным образом в нижнем слое атмосферы – тропосфере. Обледенение происходит при полете в среде, содержащей капли воды, при отрицательной температуре окружающего воздуха, в основном, в облаках, или в условиях переохлажденного воздуха. Поэтому безопасность полетов в значительной степени зависит от возможностей непосредственного контроля метеорологических условий полета ЛА и своевременного выявления начала процесса его обледенения. Это осуществляется при помощи специальных устройств – сигнализаторов обледенения. Они могут быть как автономными приборами, так и входить в состав противообледенительных систем. В последнем случае сигнализаторы обледенения используются для автоматического включения и выключения противообледенителей наиболее важных агрегатов.

Рациональное размещение сигнализаторов повышает достоверность обнаружения обледенения.

Поэтому актуальной представляется проблема размещения датчиков на несущих поверхностях ЛА (крыло, хвостовое оперение, силовая установка), а также определения их количества, необходимого для эффективной и надежной работы противообледенителльной системы.

1. Формулирование проблемы

Для экспериментального изучения случайных температурных полей (а к таковым могут быть отнесены температурные поля при технологической обработке разнообразных материалов в силу массы факторов, имеющих явно недетерминированный характер) помимо специальной аппаратуры необходимо иметь обоснованную методику планирования температурных измерений и обработки экспериментальных данных.

Процесс тепловой обработки приводит к образованию в технологических объектах пространственно-временного температурного поля. Возникает также вопрос о количестве температурных датчиков, необходимых для получения достаточной информации о температурном поле, и об их рациональном размещении в технологическом объеме.

Чисто статистический подход к исследованиям пространственно-временных случайных температурных полей требует весьма частой расстановки датчиков, большого числа каналов для передачи информации, весьма больших массивов чисел при обработке. Следует учитывать, что при рассмотрении каждой конкретной конструкции, реализующей процесс тепловой технологической обработки, почти всегда имеется дополнительная априорная информация о свойствах температурного поля. Эту информацию целесообразно использовать при планировании температурных измерений, с тем чтобы существенно сократить число датчиков, а также количество времени и средств для статистической обработки результатов.

Рассмотрим метод организации температурных измерений в технологических объектах со случайными температурными полями (стохастический подход). Будем использовать разложение исследуемых температурных полей в ряды по некоторым базисным функциям, которые будут выбираться с учетом конструкции технологических объектов и действующих на них возмущающих и управляющих воздействий.

1.1. Общие соотношения

Пусть пространственно–временное скалярное температурное поле задано в некоторой области $V \subset R^m$ $(m = 1,\ 2,\ 3)$ и описывается скалярной функцией $T(\vec{x},\ t)$ векторного пространственного аргумента $\vec{x}$ и времени t. В области V выберем n точек с координатами $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \ldots,\ \vec{x}_n$. Измеряя в этих точках реализацию температурного поля, найдем оценки математических ожиданий и взаимных моментов для этих точек поля:

$$M\left[T\left(\vec{x}_j,t\right)\right],\ M\left[T\left(\vec{x}_j,t\right)T\left(\vec{x}_k,t'\right)\right].$$

Задача состоит в том, чтобы указать число датчиков n и их размещение в области V, необходимые для оценки математического ожидания и взаимных моментов поля.

Реконструкция температурного поля по измерениям в отдельных его точках – математически некорректна в силу континуальности самого поля по пространственной и временной переменным, с одной стороны, и дискретности измерений – с другой. В приближенной постановке эту задачу можно сформулировать корректно, описывая поле с помощью конечного числа параметров, используя разложение в ряд по некоторой системе детерминированных базисных функций $\varphi_a(\vec{x})$, которую необходимо выбирать так, чтобы почти любая реализация $T(\vec{x},t)$ могла быть аппроксимирована при помощи ряда:

$$T(\vec{x},t) = \sum_a Q_\alpha(t)\varphi(\vec{x}), \tag{1}$$

где $Q_\alpha(t)$ - случайная функция времени.

Получим общее выражение для математического ожидания и корреляционной функции поля $T(\vec{x},t)$:

$$M\left[T\left(\vec{x},t\right)\right] = \sum_\alpha M\left[Q_\alpha\left(t\right)\right]\varphi_\alpha\left(\vec{x}\right), \tag{2}$$

$$M\left[\tilde{T}\left(\vec{x},t\right)\tilde{T}\left(\vec{x}',t'\right)\right] =$$

$$= \sum_\alpha\sum_\beta M\left[\tilde{Q}_\alpha\left(t\right)\tilde{Q}_\beta\left(t'\right)\right]\varphi_\alpha\left(\vec{x}\right)\varphi_\beta\left(\vec{x}\right). \tag{3}$$

Полагая в соотношении (2) $\vec{x} = \vec{x}_j$ и удерживая n членов ряда, получим систему уравнений относительно математических ожиданий с коэффициентами $a_{j\alpha} = \varphi_\alpha\left(\vec{x}\,j\right)$, образующими матрицу A, размерностью $n \times n$, аналогичную матрице Вандермонда в теории интерполирования. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то из системы уравнений можно найти математические ожидания.

Время t при этом будем трактовать как параметр. Подставив их в (2), можно вычислить математическое ожидание температурного поля. Отсюда следует, что требуемое число датчиков равно числу членов ряда (1), которое необходимо для удовлетворительного приближения температурного поля $T(\vec{x},t)$. Аналогично можно получить систему уравнений для реконструкции корреляционной функции поля. Рассматривая соотношение (3) в точках $\vec{x}=\vec{x}_j$ и $\vec{x}'=\vec{x}_k$ и удерживая в ряд (1) n членов, получаем $n\times n$ уравнений относительно корреляционных функций с коэффициентами $b_{jk\alpha\beta}=\varphi_\alpha\left(\vec{x}_j\right)\varphi_\beta\left(\vec{x}_k\right)$, которые после надлежащего упорядочения пар индексов $j,\,k$ и α,β образуют квадратную матрицу B размерностью $n^2\times n^2$. Если определитель этой матрицы отличен от нуля, то из системы уравнений находим корреляционные функции. Аргументы t и t' при этом рассматриваем как параметры. Используя (3), можно восстановить корреляционную функцию в любой точке температурного поля.

Замечаем, что $b_{jk\alpha\beta}=a_{j\alpha}a_{k\beta}$, т. е. матрица B является прямым (кронекеровским) квадрантом матрицы A: $B=A\otimes A$.[1]

Совершенно аналогично может быть поставлена и решена задача о реконструкции моментных функций более высокого порядка. Соответствующие коэффициенты системы имеют вид

$$b_{jkl\ldots\alpha\beta\gamma\ldots}=\varphi_\alpha\left(\vec{x}_j\right)\varphi_\beta\left(\vec{x}_k\right)\varphi_\gamma\left(\vec{x}_l\right)\ldots$$

и образуют матрицу размерности $n^N\times n^N$, которая представляет собой N-ю кронекеровскую степень матрицы A.

2. Решение проблемы. Принцип размещения датчиков

Подытожим и уточним соображения, высказанные по поводу количества датчиков.

1. Минимальное число требуемых датчиков равно числу членов ряда, которые необходимы для аппроксимации исследуемого температурного поля с заданной точностью.

2. Определители соответствующих уравнений должны быть отличны от нуля. Заметим, что определитель N-й кронекеровской степени матрицы A размерностью $n\times n$ выражается через определитель этой матрицы следующим образом:

$$\det A^{[N]}=\left(\det A\right)^{Nn^{N-1}}. \qquad (4)$$

Поэтому достаточным является условие

$$\det A\neq 0. \qquad (5)$$

3. Матрицы уравнений должны быть достаточно хорошо обусловлены. Тогда малые погрешности при измерении статистических характеристик температурного поля в отдельных точках не будут приводить к большим ошибкам при реконструкции поля в целом.

4. Требование, чтобы определитель матрицы A был достаточно далек от нуля, приводит к критерию для расстановки датчиков

$$\left|\det A\right|\to\max_{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n}. \qquad (6)$$

Здесь экстремум целевой функции ищется при определенных конструктивных ограничениях, накладываемых на координаты $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n$.

2.1. Замечания о числе обусловленности

Критерий (6) не инвариантен относительно линейных преобразований. Возможно использование числа обусловленности Тьюринга $\eta(A)$ действительной квадратной матрицы:

$$\eta(A) = n^{-1} \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|. \tag{7}$$

Наиболее предпочтительно использование сферической и кубической норм [4]:

$$\|A\|_I = \left(\sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu}^2 \right)^{1/2}, \quad \|A\|_{II} = n \max_{\mu,\nu} \left| a_{\mu\nu} \right|, \tag{8}$$

что приводит к первому $\eta_I(A)$ и второму $\eta_{II}(A)$ числам Тьюринга. Число обусловленности Тодда $\eta_{III}(A)$ выражается через собственные значения матрицы A:

$$\eta_{III}(A) = \max_\mu \left|\alpha_\mu\right| \cdot \left[\min_\mu \left|\alpha_\mu\right| \right]^{-1}. \tag{9}$$

Собственные значения могут быть комплексными, поэтому удобнее пользоваться другим числом обусловленности, которое выражается через сингулярные числа λ_μ матрицы A, равные арифметическим значениям квадратичного корня из собственного числа матрицы $A^T A$, что приводит ко второму числу обусловленности Тодда [2]:

$$\eta_{IV}(A) = \max_\mu \left|\lambda_\mu\right| \cdot \left[\min_\mu \left|\lambda_\mu\right| \right]^{-1}. \tag{10}$$

Все упомянутые числа обусловленности не меньше единицы и связаны между собой неравенствами [3]

$$\begin{aligned} &\eta_I(A) \le \eta_{II}(A) \le n^2 \eta_I(A), \\ &\eta_I(A) \le \eta_{IV}(A) \le n \eta_I(A), \\ &\eta_{III}(A) \le \eta_{IV}(A). \end{aligned} \tag{11}$$

Чем лучше обусловлена матрица A, тем числа $\eta(A)$ ближе к единице. При помощи чисел обусловленности можно сформулировать ряд критериев размещения датчиков:

$$\eta(A) \to \min_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n}, \tag{12}$$

Ввиду того, что неравенства (11) являются относительно тесными, использование любого из трех чисел обусловленности приводит к близким результатам. Обусловленности кронекеровских степеней A равны соответствующим степеням этих чисел для матрицы:

$$\eta_I\left(A^{[N]}\right) = \eta_I^N(A).$$

Таким образом, достаточно ограничиться требованиями обусловленности матрицы A.

2.2. Связь с теорией интерполирования функций

Задача оценивания вероятностных характеристик случайных температурных полей по результатам измерений в конечном числе точек может быть интерпретирована как задача интерполирования детерминистких функций, поскольку, выражение (1) можно рассматривать как обобщенный интерполяционный полином в области *V*, образованный из функций

$$\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x}),$$

а точки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ - как узлы интерполирования. Совершенно аналогично реконструкция вероятностных характеристик второго порядка может быть интерпретирована как интерполирование функции в области $V \otimes V$. Обобщенные интерполяционные полиномы при этом образуются из функций $\varphi_\alpha(\vec{x})\varphi_\beta(\vec{x}')$. Узлами интерполирования служат $n \times n$ пар точек $\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1{}'\right), \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2{}'\right), \ldots, \left(\vec{x}_n, \vec{x}_n{}'\right)$.

Требования к размещению датчиков могут быть сформулированы в терминах теории интерполирования функций: необходимое число датчиков выбирается из условия, чтобы обобщенные интерполяционные полиномы достаточно хорошо аппроксимировали вероятностные характеристики поля в точках, не совпадающих с точками измерений.

2.3. Задачи апостериорного планирования измерений

Изложенный выше подход можно назвать априорным - при его осуществлении используются только некоторые предварительные априорные сведения о свойствах поля, на основе которых выбираются подходящие базисные функции. Количество датчиков принимается равным числу членов ряда, необходимых для удовлетворительной аппроксимации поля. После этого задача планирования сводится к отысканию такого размещения датчиков, которое либо обеспечивает наилучшее интерполирование поля, либо соответствует измерительной схеме, наименее чувствительной к погрешностям измерений. Оба подхода удается формализовать и объединить, используя понятие наименьшей обусловленности некоторых матриц. Представляет практический интерес апостериорное планирование, в котором существенным образом используются результаты, полученные непосредственно в ходе измерений.

Если в процессе измерений обнаружится некоторая информации, то это может побудить к тому, чтобы изменить размещение датчиков и снять, таким образом, большее количество информации. Поясним постановку задачи апостериорного планирования на примере стационарного поля $T\left(\vec{x},t\right)$ в двух точках $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$.

Пусть по результатам измерений получена оценка для корреляционной матрицы процесса. За меру связанности значений поля в двух точках естественно принять величину коэффициента корреляции

$$\rho_{12} = K_{12} / \left(K_{11} K_{22}\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Принимая за признак наилучшего размещения датчиков отсутствие корреляции между их показаниями, переходим к критерию:

$$\left|\rho_{12}\right| \to \min_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}. \tag{14}$$

Количество информации о величине T_1, получаемой в результате наблюдения величины T_2, определяется как

$$I_{T_2}\left[T_1\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P\left(T_1, T_2\right) \log \frac{P\left(T_1 / T_2\right)}{P\left(T_1\right)} dT_1 dT_2,$$

где $P\left(T_1, T_2\right)$, $P\left(T_1 / T_2\right)$ и $P\left(T_1\right)$ – плотности вероятности величин T_1, T_2. Среди всех принадлежащих данному классу размещений датчиков наилучшим будет то, которое удовлетворяет критерию:

$$I_{T_2}\left[T_1\right] \to \min_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}. \tag{15}$$

Если поле $T\left(\vec{x},t\right)$ - нормальное, то количество информации выражается через элементы корреляционной матрицы следующим образом:

$$I_{T_2}\left[T_1\right] = \log \sqrt{\frac{K_{11} K_{22}}{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}} = \log \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}},$$

т. е. критерий минимума условной информации (15) эквивалентен критерию минимума модуля коэффициента корреляции (14). Приведенные соображения распространяются на многомерный случай. При этом вместо коэффициента корреляции используются некоторые осредненные по всем датчикам меры корреляции.

2.4. Критерий наилучшей обусловленности корреляционной матрицы

Критерии (14), (15) можно сформулировать в терминах чисел обусловленности. В случае их распространения на многомерный случай корреляционная матрица может быть в целом хорошо обусловлена, однако между отдельными группами датчиков будет иметь место значительная корреляция. Например, обусловленность при $n > 2$ еще не гарантирует малости корреляции между измерениями в точках $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Чтобы включить эти ситуации в рассмотрение, необходимо обобщить понятие обусловленности, включив в него обусловленность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений по отношению к любой группе переменных. В дальнейшем аргумент у матрицы $K\left(t,t'\right)$ не выписываем, принимая, что оптимизация размещения датчиков производится при некоторых фиксированных значениях аргументов. Образуем из элементов матриц K главные подматрицы K_{jkl}, где индексы равны номерам вычеркиваемых строк и столбцов. Общее число главных подматриц у матрицы порядка n равно $2^n - n - 2$. Введем обобщенные числа обусловленности, равные максимальным значениям на множестве чисел обусловленности данной матрицы и всех главных подматриц:

$$\xi(K) = \max\left\{\eta(K), \eta\left(K_1\right), \dots \eta\left(K_{12\dots(n-2)}\right)\right\}. \quad (16)$$

В качестве критерия наилучшего размещения датчиков возьмем условие

$$\xi\left(K\right) \to \min_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n}. \quad (17)$$

При $n = 2$ этот критерий совпадает с требованием наилучшей обусловленности в обычном смысле. При $n > 2$ критерий (17) должен включать в себя также требования минимума попарной корреляции между показаниями всех датчиков, а также некоторые требования, сводящие к минимуму множественную корреляцию.

Заключение

Представленная методика определения количества и места размещения сигнализаторов обледенения приводит к необходимости решения двух проблем: определения обусловленности некоторой матрицы и решения задачи нелинейного программирования с учетом конструктивных ограничений летательного аппарата. Обе проблемы имеют варианты решения, однако учет специфики конструкций, возможно, позволит сформулировать законченный экономичный алгоритм.

Литература

1. Мочанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. К.: Наук. думка, 1987. – С. 57-88.

2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.

3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.

4. Пешель М. Моделирование сигналов и систем. – М.: Мир, 1981. – С. 139 - 156.

Поступила в редакцию 25.12.2003 г.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Соколов А.Ю. Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.