# Научное наследие профессора И.Г. Немана (1903 – 1952)

## Предисловие редколлегии журнала

*Журнал продолжает публикации *) по материалам докторской диссертации И.Г. Немана «Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости», защите которой помешала преждевременная смерть автора.*

*Как и в предыдущих сообщениях *) ниже изложены научные результаты И.Г. Немана, полученные им в 1946 – 48 гг. и ранее не публиковавшиеся, практически без правок авторского текста.*

*Редколлегия предполагает знакомство читателя с предыдущими сообщениями автора *), что исключает необходимость расшифровки в данной статье символов, уже встречавшихся в предыдущих публикациях.*

*) 1. Неман И. Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть 1. Приближенный метод. Устойчивость пластины при одностороннем сжатии // Авиационно-космическая техника и технология – 2005. – №5 (21). – С. 87-95.

2. Неман И. Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть II. Приближенный метод. Устойчивость пластины при сдвиге.и совместном действии сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология.-2005. №6 (22). – С. 95-103.

УДК 629.7: 534.1

**И. Г. Неман**

***Харьковский авиационный институт, Украина***

# УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ТОЧНЫЙ МЕТОД. ЧАСТЬ I. ВЫВОД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ДВУХСТОРОННЕГО СЖАТИЯ И СДВИГА

Изложен точный метод исследования устойчивости бесконечно длинных ортотропных пластин с наклонными главными направлениями упругости. Получены общие уравнения для коэффициентов критической нагрузки. Дана реализация метода для частного случая пластины при совместном действии усилий сжатия и сдвига. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

**устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, коэффициенты критических нагрузок, точный метод**

## Введение

Решение задачи устойчивости ортотропных прямоугольных пластин сводится к нахождению такого решения дифференциального уравнения равновесия пластины, которое удовлетворяло бы и уравнениям, выражающим граничные условия. В зависимости от выбранной системы координат, можно получить разные формы этих уравнений и отсюда разную степень трудности решения всей системы в целом.

Во всей литературе принято выражать уравнения в системе координат, связанной со сторонами пластины. Тогда просто выражаются граничные условия, но зато дифференциальное уравнение равновесия получается сложным, и приводит к громоздким вычислениям.

Выбор системы координат следует подчинить условию наибольшей простоты решения всей задачи. Поэтому выбор ее должен происходить по следующей схеме. Выражение дифференциального уравнения равновесия взять в той системе, в которой оно выражается наиболее просто, т.е. связать координатную систему с главными направлениями упругости. Граничные условия наиболее просто выражаются в системе координат, связанной с контуром пластины. Кроме этих систем уравнений появится еще система, связывающая между собой координатные системы.

Проводим решение всей этой системы уравнений в той системе координат, которая приводит к наиболее простым математическим выражениям.

## §1. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки

Дифференциальное уравнение ортотропной пластины, нагруженной двухсторонними погонными усилиями сжатия и касательной нагрузки, имеет вид

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \\ = q_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2q_t \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \qquad (1)$$

если оси координат x и y совпадают с наклонами главных направлений упругости (рис. 1).

При этом ось $x$ считаем направленной вдоль оси максимальной жесткости. В дальнейшем, когда упоминаем об одном главном направлении упругости, то подразумеваем направление максимальной жесткости.

Граничные условия нашей задачи следующие:

$$W = 0; \quad Mx_1 = 0$$

при $X_c = \pm в$ для свободно опертой пластины и

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

при $x_1 = \pm в$ для пластины, заделанной по контуру.

Система координат $x_1$, $y_1$ связана с контуром пластины.

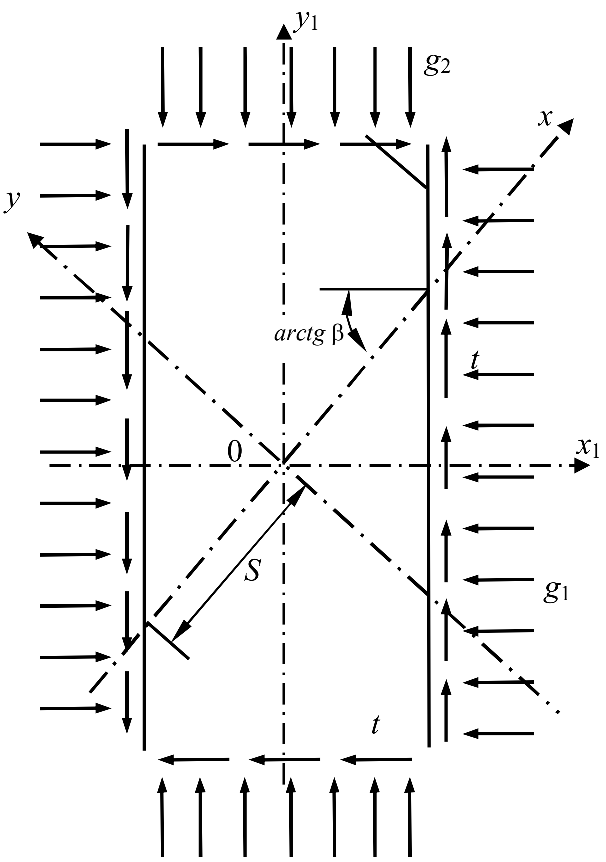


Рис. 1. Системы координат и нагрузок на бесконечно длинную ортотропную пластину

Потеря устойчивости происходит с волнообразованием вдоль оси $y_1$. Форму волнообразования вдоль оси $x_1$ необходимо определить. Поэтому уравнение волны в координатах $x$, $y$ следует ожидать в форме

$$W = e^{i\mu \frac{y}{в}} F(x_1), \qquad (2)$$

где $\mu$ – параметр, определяющий длину волны, вследствие чего принимаемый вещественным.

Вид функции $F(x_1)$ необходимо найти из дифференциального уравнения равновесия пластины.

Решаем дифференциальное уравнение в координатах $x_1$, $y_1$ по методу Мориса Леви в форме:

$$W = e^{i\mu' \frac{y_1}{s}} \phi(x_1).$$

Подставив данное выражение в (1), получаем:

$$D_x \phi^{IV}(x) - 2D_{xy}\left(\frac{\mu'}{s}\right)^2 \phi''(x) + D_y \left(\frac{\mu'}{s}\right)^4 \phi(x) = \\ = q_x \phi''(x) + 2^q i \left(\frac{\mu'}{s}\right) \phi'(x) - q_y \left(\frac{\mu'}{s}\right)^2 \phi(x).$$

Это уравнение имеет решение вида $\phi(x) = e^{i\lambda' \frac{x}{s}}$.

Отсюда $$W = \sum A e^{i\left[\frac{\mu' y}{s} + \frac{\lambda' x}{s}\right]}. \qquad (3)$$

Обе системы координат $x_1$, $y_1$ и $x$, $y$ связаны между собой соотношениями:

$$x = \frac{x_1 - \beta y_1}{\sqrt{1+\beta^2}}; \quad y = \frac{\beta x_1 + y_1}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Производя замену переменных в уравнении (3), перепишем его в следующем виде:

$$W = \sum A e^{i\left[\frac{\mu'}{s\sqrt{1+\beta^2}}(\beta x_1 + y_1) + \frac{\lambda_1}{s\sqrt{1+\beta^2}}(x_1 - \beta y_1)\right]} =$$

$$= \sum A e^{i\left[\frac{-\lambda'\beta + \mu'}{\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{y_1}{s} + \frac{\lambda' + \mu'\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{x_1}{s}\right]}.$$

Сравнивая (2) с последним выражением видим, что (2) может быть записано в следующем виде:

$$W = e^{i\mu\frac{y}{в}} \sum A e^{i\lambda\frac{x_1}{в}}, \qquad (4)$$

где $\frac{\mu}{в} = \frac{-\lambda'\beta + \mu'}{s\sqrt{1+\beta^2}}$ и $\frac{\lambda}{в} = \frac{\lambda' + \mu'\beta}{s\sqrt{1+\beta^2}}$.

Так как $\mu$ должно быть вещественным, выразим $\mu'$ и $\lambda'$ через $\mu$ и $\lambda$:

$$\mu' = \lambda\beta + \mu; \quad \lambda' = \lambda - \mu\beta,$$

а уравнение (3) перепишем в следующей форме:

$$W = \sum A e^{i} = \sum A e^{i\left[\frac{\lambda - \mu\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{x}{в} + \frac{\lambda\beta + \mu}{\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{y}{в}\right]}. \qquad (5)$$

Усилия $q_x$, $q_y$ и $q_t$ в системе координат $x$ и $y$ связаны с $q_1$, $q_2$ и $t$ соотношениями:

$$q_x = -q_1\frac{1}{1+\beta^2} + t\frac{2\beta}{1+\beta^2} - \frac{q_2\beta^2}{1+\beta^2};$$

$$q_y = -q_1\frac{\beta^2}{1+\beta^2} - q_2\frac{1}{1+\beta^2} - t\frac{2\beta}{1+\beta^2}; \qquad (6)$$

$$q_t = -q_1\frac{\beta^2}{1+\beta^2} - q_2\frac{\beta}{1+\beta^2} - t\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}.$$

Подставив (5) и (6) в (1), получаем характеристическое уравнение:

$$\frac{1}{в^4}\frac{1}{\left(1+\beta^2\right)^2}[D_x(\lambda - \mu\beta)^4 + 2D_{xy}\times$$
$$\times(\lambda-\mu\beta)^2(\lambda\beta+\mu)^2 + D_y(\lambda\beta+\mu)^4] =$$
$$= \frac{1}{в^2}\frac{1}{\left(1+\beta^2\right)^2}\left\{\left(-q_1 - q_2\beta^2 + 2\beta t\right)\times\right.$$
$$\times\left[-(\lambda-\mu\beta)^2\right] + \left(-q_1\beta^2 - q_2 - 2\beta t\right)\times$$
$$\times\left[-(\lambda\beta+\mu)^2\right] + 2\left[-q_1\beta + q_2\beta - \left(1-\beta^2\right)t\right]\times$$
$$\left.\times\left[-(\lambda-\mu\beta)(\mu+\lambda\beta)\right]\right\}.$$

Умножим все уравнение на $в^4\left(1+\beta^2\right)^2$ и сгруппируем члены с одинаковыми степенями $\lambda$, $\mu$:

$$\lambda^4\left(D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4\right) + \lambda^3\mu\times$$
$$\times\left[-4D_x\beta + 4D_{xy}\beta\left(1-\beta^2\right) + 4D_y\beta^3\right] +$$
$$+\lambda^2\mu^2\left[6D_x\beta^2 + 2D_{xy}\left(1 - 4\beta^2 + \beta^4\right) + 6D_y\beta^2\right] +$$
$$+\lambda\mu^3\left[-4D_x\beta^3 - 4D_{xy}\beta\left(1-\beta^2\right) + 4D_y\beta\right] +$$
$$+\mu^4\left(D_x\beta^4 + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\right) = q_1в^2\left(1+\beta^2\right)^2\lambda^2 +$$
$$+q_2в^2\left(1+\beta^2\right)^2\mu^2 + 2tв^2\left(1+\beta^2\right)^2\lambda\mu,$$

а затем перепишем его в следующем виде:

$$\lambda^4 + \frac{-4\beta + 4\frac{D_{xy}}{D_x}\beta\left(1-\beta^2\right) + 4\frac{D_y}{D_x}\beta^3}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}\lambda^3\mu +$$

$$+\frac{6\beta^2 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\left(1 - 4\beta^2 + \beta^4\right) + 6\frac{D_y}{D_x}\beta^2}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}\lambda^2\mu^2 +$$

$$+\frac{-4\beta^3 - 4\frac{D_{xy}}{D_x}\beta\left(1-\beta^2\right) + 4\frac{D_y}{D_x}\beta}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}\lambda\mu^3 +$$

$$+\frac{\beta^4 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}\mu^4 = \frac{q_1в^2}{D_x}\frac{\left(1+\beta^2\right)^2}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}\lambda^2 +$$

$$+\frac{q_2в^2}{D_x}\frac{\left(1+\beta^2\right)^2}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4} + \frac{tв^2}{D_x}\frac{2\left(1+\beta^2\right)^2}{1 + 2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2 + \frac{D_y}{D_x}\beta^4}$$

или
$$\lambda^4 + A\mu\lambda^3 + \left(B\mu^2 - EKq_1\right)\lambda^2 + \left(C\mu^3 - 2EK_{t\mu}\right)\lambda + D\mu^4 - EKq_2\mu^2 = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты А, В, С, Д и Е зависят от $\beta$ и являются константами при фиксированном наклоне главного направления.

Воспользуемся здесь методом Саутсвелли и Скан, которым они решили задачу устойчивости изотропной пластины под действием сдвига [1, С. 840-843]. Они имели уравнение с нулевым коэффициентом при неизвестном в третьей степени. Здесь же этот коэффициент не обращается в нуль, однако можно этот метод расширить и на рассматриваемый нами случай.

Четыре корня характеристического уравнения: $\lambda_1$, $\lambda_2, \lambda_3$ и $\lambda_4$ (при вещественном $\mu$) могут быть представлены в следующем виде:

$\lambda_1 = \delta_1 + \xi$; $\lambda_2 = \delta_1 - \xi$; $\lambda_3 = \delta_2 + \eta$; $\lambda_4 = \delta_2 - \eta$,

где $\delta_1$ и $\delta_2$ вещественные величины, а $\xi$ и $\eta$ могут быть как мнимыми, так и вещественными. Уравнение (4) можно записать так:

$$W = (Pe^{i\lambda_1\frac{x_1}{в}} + Qe^{i\lambda_2\frac{x_1}{в}} + \mathrm{Re}^{i\lambda_3\frac{x_1}{в}} + Se^{i\lambda_4\frac{x_1}{в}})e^{i\mu\frac{y_1}{в}}.$$

Корни $\lambda_i\left(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$, а значит и величины $\delta_1, \delta_2, \xi$ и $\eta$, связаны с коэффициентами уравнения (7) следующими зависимостями:

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \delta_1 + \delta_2 = -\frac{A\mu}{2}; \quad (8)$$

$$\sum_{i,k=1}^{4} \lambda_i\lambda_k = \delta_1^2 + 4\delta_1\delta_2 + \delta_2^2 - \xi^2 - \eta^2 = B\mu^2 - EKq_1; \quad (9)$$

$$\sum_{i,k,l=1}^{4} \lambda_i, \lambda_k, \lambda_e = 2\delta_2\left(\delta_1^2 - \xi^2\right) + 2\delta_1\left(\delta_2^2 - \eta^2\right) = -\left(c\mu^2 - 2EK_t\mu\right); \quad (10)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \left(\delta_1^2 - \xi^2\right)\left(\delta_2^2 - \eta^2\right) = D\mu^4 - EKq_2\mu^2. \quad (11)$$

В дальнейшем примем один из коэффициентов $Kq$ за основной, а остальные свяжем с ним линейно:

$$K_t = mKq_1; \quad (12) \qquad Kq_2 = nKq_1. \quad (13)$$

Это означает, что мы ищем критическое состояние при таком характере нагружения, когда отдельные нагрузки подходят к критической, оставаясь все время ей пропорциональными.

На практике бывает также, что одна нагрузка приложена как постоянная, а другая переменная. Более общий случай получается при изменении нагрузок с нелинейным соотношением между ними. Все эти задачи как математически, так и принципиально неравноценны*).

Числа полуволн $m$ и $n$ будем считать в каждом случае заданными. Тогда $Kq$ является функцией пяти переменных: $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $\lambda_4$ или $\mu, \delta_1, \delta_2, \xi$ и $\eta$ при наличии четырех уравнений (8), (9), (10) и (11) и еще пятого уравнения, которое мы получим ниже при рассмотрении граничных условий.

Теперь наша задача сводится к исключению максимального количества переменных и к получению $Kq$ в наиболее удобном виде для исследования.

Уравнения (9) и (10) переписываем в виде линейных уравнений относительно неизвестных $\delta_1^2 - \xi^2$ и $\delta_2^2 - \eta^2$:

$$\left(\delta_1^2 - \xi^2\right) + \left(\delta_2^2 - \eta^2\right) = B\mu^2 - EKq_1 - 4\delta_1\delta_2;$$

$$2\delta_2\left(\delta_1^2 - \xi^2\right) + 2\delta_1\left(\delta_2^2 - \eta^2\right) = -\left(C\mu^3 - 2EK_t\mu\right).$$

Решая их относительно указанных неизвестных, получаем:

$$\delta_1^2 - \xi^2 = \left(\left(B\mu^2 - 4\delta_1\delta_2 - EKq_1\right)2\delta_1 + C\mu^3 - 2EK_t\mu)/(2\left(\delta_1 - \delta_2\right)\right); \quad (14)$$

$$\delta_2^2 - \eta^2 = \left(-\left(C\mu^3 - 2EK_t\mu\right) - (B\mu^2 - 4\delta_1\delta_2 - EKq_1)2\delta_2)/(2\left(\delta_1 - \delta_2\right)\right). \quad (15)$$

Вводим новое переменное $z$:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{zA\mu}{2}. \quad (16)$$

Из (8) и (16) определяем $\delta_1$ и $\delta_2$:

$$\delta_1 = \frac{A}{4}(z-1)\mu; \quad \delta_2 = -\frac{A}{4}(z+1)\mu.$$

Вставим эти выражения $\delta_1$ и $\delta_2$ в правые части (14), (15). Перемножив их, приравняв к правой части (11) и сократив полученное уравнение на $\mu^4$, получим:

*) В диссертации автор показал отличия отмеченных им случаев и предложил методику соответствующих им критических состояний (прим. редколлегии).

$$\left\{\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}-\frac{EKq_1}{\mu_2}\right]\frac{A}{2}(z-1)+C-2E+\frac{K_t}{\mu^2}\right\}\times$$

$$\times\left\{-\left(C-2E\frac{K_t}{\mu^2}\right)+\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}-\frac{EKq_1}{\mu^2}\right]A(z+1)\right\}-$$

$$-A^2Dz^2+A^2z^2\frac{EKq_2}{\mu^2}=0$$

или

$$\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}-\frac{EKq_1}{\mu^2}\right]^2\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right)-$$

$$-\left(c-2E\frac{K_t}{\mu^2}\right)^2+A\left(c-2E\frac{K_t}{\mu^2}\right)\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}-\right.$$

$$\left.-\frac{EKq_1}{\mu^2}\right]-A^2Dz^2+A^2z^2\frac{EKq_2}{\mu^2}=0.$$

Расположим по степеням коэффициентов нагружения $K$:

$$\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right)\left(\frac{EKq_1}{\mu^2}\right)^2-4\left(\frac{EK_t}{\mu^2}\right)^2+\frac{EK_t}{\mu^2}\cdot\frac{EKq_1}{\mu^2}2A-$$

$$-\frac{EKq_1}{\mu^2}\times\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\frac{A^2}{2}\left(z^2-1\right)+4C\frac{EK_t}{\mu^2}-$$

$$-2A\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\frac{EK_t}{\mu^2}+A^2z^2\frac{EKq_2}{\mu^2}-AC\frac{EKq_1}{\mu^2}+$$

$$+\left[B+\left(A^2\left(z^2-1\right)\right)/4\right]^2\left(\left(A^2\left(z^2-1\right)\right)/4\right)-$$

$$-C^2+AC\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]-A^2Dz^2=0. \quad (17)$$

Имея в виду уравнения (12) и (13) мы видим, что нам удалось свести задачу нахождения коэффициентов критической нагрузки к поиску минимума функции двух переменных $z$ и $\beta$, при наличии одного уравнения связи, которое получим ниже.

## §2. Граничные условия и уравнения связи

Изгибающие и крутящие моменты в площадках нормальных к главным осям, выражаются следующими формулами [2, с.13]:

$$M_x=-D_x\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\mu_{21}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right);$$

$$M_y=-D_y\left(\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\mu_{21}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\right);\ H_{xy}=-2D_k\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}. \quad (18)$$

Изгибающий момент $Mx_1$, в площадке, нормальной к оси $x_1$ получаем в следующем виде:

$$M_{x_1}=M_x\cos^2\varphi+M_y\sin^2\varphi+$$
$$+2H_{xy}\sin\varphi\cdot\cos\varphi;$$

$$M_{x_1}=-\frac{1}{1+\beta^2}\left[\left(D_x+D_y\mu_{12}\beta^2\right)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\left(D_y\beta^2+D_x\mu_{21}\right)\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+4D_\kappa\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\beta\right].$$

Выразим производные второго порядка по $x$ и $y$ через производные по $x_1$ и $y_1$:

$$\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2W}{\partial y^2}=\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2+2\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\times\frac{dx_1}{dy}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}\cdot\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dx_1}{dy}+\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\times$$

$$\times\left(\frac{dx_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{dx_1}{dy}\cdot\frac{dy_1}{dx}\right)+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dy}.$$

Координаты $x_1$ и $y_1$ связаны с координатами $x$ и $y$ следующими уравнениями:

$$x_1=\frac{x+\beta y}{\sqrt{1+\beta^2}};\quad y_1=\frac{-\beta x+y}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Произведем замену переменных в уравнении $M_{x_1}$:

$$M_{x_1}=\frac{-1}{\left(1+\beta^2\right)^2}\left\{\left(D_x+D_y\mu_{12}\beta^2\right)\times\left(\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\beta+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\beta^2\right)+\right.$$

$$+\left(D_y\beta^2+D_x\mu_{21}\right)\left(\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}\beta^2+2\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\beta+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\right)+4D_x\beta\left[\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}\beta+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2W}{\partial x_1\partial y_1}\times\left(1-\beta^2\right)-\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}\right]\right\}$$

или

$$M_{x_1}=-\frac{1}{\left(1+\beta^2\right)^2}\left\{\left(D_x+2D_{xy}\beta^2+D_y\beta^4\right)\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}+\right.$$

$$+\left[\left(D_x-2D_{xy}+D_y\right)\beta^2+D_x\mu_{21}\left(1+\beta^2\right)^2\right]\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}+$$

$$+2\left[-D_x+D_{xy}\left(1-\beta^2\right)+D_y\beta^2\right]\beta\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1}\right\}=$$

$$=\frac{-\left(D_x+2D_{xy}\beta^2 D_y\beta^4\right)}{\left(1+\beta^2\right)^2}[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+$$

$$+\frac{\left(D_x-2D_{xy}+D_y\right)\beta^2+D_x\mu_{21}\left(1+\beta^2\right)^2}{D_x+2D_{xy}\beta^2+D_y\beta^4}\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2}+ \quad (19)$$

$$+\frac{-2D_x\beta+2D_{xy}\beta\left(1-\beta^2\right)+2D_y\beta^3}{D_x+2D_{xy}\beta^2+D_y\beta^4}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1}\Bigg].$$

Окончательно выражение для $Mx_1$ запишем в следующем виде:

$$Mx_1=-\frac{D_x+2D_{xy}\beta^2+D_y\beta^4}{\left(1+\beta^2\right)^2}\times\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\gamma_1\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2}+\frac{A}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1}\right], \quad (20)$$

где $A$ – величина коэффициента, входящего в (7).

Теперь граничные условия получают следующие выражения:

Для свободно опертой пластины:

$$Pe^{i\lambda_1}+Qe^{i\lambda_2}+\mathrm{Re}^{i\lambda_3}+Se^{i\lambda_4}=0; \quad (21)$$

$$Pe^{-i\lambda_1}+Qe^{-i\lambda_2}+\mathrm{Re}^{-i\lambda_3}+Se^{-i\lambda_4}=0; \quad (22)$$

$$\left(\lambda_1^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)Pe^{i\lambda_1}+\left(\lambda_2^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_2\mu\right)\times$$

$$\times Qe^{-i\lambda_2}+\left(\lambda_3^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)\mathrm{Re}^{-i\lambda_3}+ \quad (23)$$

$$+\left(\lambda_4^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)Se^{i\lambda_4}=0;$$

$$\left(\lambda_1^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)Pe^{-i\lambda_1}+\left(\lambda_2^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_2\mu\right)\times$$

$$\times Qe^{-i\lambda_2}+\left(\lambda_3^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)\mathrm{Re}^{-i\lambda_3}+ \quad (24)$$

$$+\left(\lambda_4^2+\gamma_1\mu^2+\frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)Se^{-i\lambda_4}=0.$$

Для жестко заделанной пластины:

$$Pe^{i\lambda_1}+Qe^{i\lambda_2}+\mathrm{Re}^{i\lambda_3}+Se^{i\lambda_4}=0; \quad (25)$$

$$Pe^{-i\lambda_1}+Qe^{-i\lambda_2}+\mathrm{Re}^{-i\lambda_3}+Se^{-i\lambda_4}=0; \quad (26)$$

$$\lambda_1 Pe^{i\lambda_1}+\lambda_2 Qe^{i\lambda_2}+\lambda_3\,\mathrm{Re}^{i\lambda_3}+\lambda_4 Se^{i\lambda_4}=0; \quad (27)$$

$$\lambda_1 Pe^{-i\lambda_1}+\lambda_2 Qe^{-i\lambda_2}+\lambda_3\,\mathrm{Re}^{-i\lambda_3}+\lambda_4 Se^{-i\lambda_4}=0. \quad (28)$$

В обоих случаях мы получаем систему линейных однородных уравнений с неизвестными $P$, $Q$, $R$ и $S$.

Определитель этой системы должен обратиться в нуль. Разложение этого определителя дает для свободно опертой пластины уравнение:

$$\left[\left(\lambda_1^2+\frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)-\left(\lambda_2^2+\frac{A}{2}\lambda_2\mu\right)\right]\times\left[\left(\lambda_3^2+\frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\lambda_4^2+\frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)\times\sin\left(\lambda_1-\lambda_3\right)\sin\left(\lambda_2-\lambda_4\right)\right]=$$

$$=\left[\left(\lambda_1^2+\frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)-\left(\lambda_3^2+\frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)\right]\times\left[\left(\lambda_2^2+\frac{A}{2}\lambda_2\mu\right)-\right. \quad (29)$$

$$\left.-\left(\lambda_4^2+\frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)\times\sin\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\sin\left(\lambda_3-\lambda_4\right)\right],$$

а для жестко заделанной:

$$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\lambda_3-\lambda_4\right)\sin\left(\lambda_1-\lambda_3\right)\times\sin\left(\lambda_3-\lambda_4\right)=$$

$$=\left(\lambda_1-\lambda_3\right)\left(\lambda_2-\lambda_4\right)\times\sin\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\sin\left(\lambda_3-\lambda_4\right). \quad (30)$$

Выразив в последних двух уравнениях $\lambda$ и $\frac{A}{2}\mu$ через $\delta_1$, $\delta_2$, $\xi$ и $\eta$, получим для уравнения (29) следующее выражение:

$$2\xi\eta\left(\delta_1-\delta_2\right)^2[\cos 2\xi\cos 2\eta-\cos 2\left(\delta_1-\delta_2\right)]=$$

$$=[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left(\delta_1-\delta_2\right)^2-\left(\xi^2-\eta^2\right)^2]\sin 2\xi\cdot\sin 2\eta, \quad (31)$$

а для уравнения (30):

$$2\xi\eta\left[\cos 2\xi\cos 2\eta-\cos 2\left(\delta_1-\delta_2\right)\right]=$$

$$=\left[\left(\delta_1-\delta_2\right)^2-\left(\xi^2+\eta^2\right)\right]\sin 2\xi\sin 2\eta. \quad (32)$$

Перепишем уравнения (31) и (32) в виде:

$$\cos 2\xi\cos 2\eta-\cos zA\mu-$$

$$-\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta}-\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)^2}{2\xi\eta\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}\right]\times\sin 2\xi\cdot\sin 2\eta=0; \quad (33)$$

$$\cos 2\xi\cos 2\eta-\cos zA\mu-$$

$$-\left[\frac{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}{2\xi\eta}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta}\right]\times\sin 2\xi\cdot\sin 2\eta=0. \quad (34)$$

Уравнение (33) и (34) (первое в случае свободно опертой пластины, второе в случае заделанной) являются теми уравнениями связи, которые нужно соблюсти при нахождении $K_{крит.}$ из уравнения (17).

Фигурирующие здесь переменные $\xi$ и $\eta$ являются функциями тех же двух переменных $z$ и $\mu$.

Чтобы получить $\xi$ и $\eta$ как явные функции этих двух переменных, преобразуем уравнения (14) и (15), выразив в них $\delta_1$ и $\delta_2$ через $z$ и выделив общий множитель $\mu$:

$$\xi^2 = \left[\frac{A^2(z-1)^2}{16} - \left(C - \frac{EKt}{\mu^2} + \left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2}\right] \times \frac{A(z-1)}{2}\right) \Big/ (zA)\right]\mu^2; \tag{35}$$

$$\eta^2 = \left[\frac{A^2(z+1)^2}{16} - \left(C - \frac{EKt}{\mu^2} - \left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2}\right] \times \frac{A(z-1)}{2}\right) \Big/ (zA)\right]\mu^2. \tag{36}$$

Уравнение (35) показывает, что $EK/\mu^2$ является функцией одного параметра $z$. Следовательно, выражения в квадратных скобках уравнений (35) и (36) тоже являются функциями одного $z$. Заметим здесь, что знак переменных $z$ и $\mu$ не влияет на значение $Kq$. Действительно в уравнение (35) они входят в виде квадратов. $\xi^2$ и $\eta^2$ при замене $z$ на $-z$ обмениваются только значениями, а в связи с тем, что они входят симметрично в уравнения связи (33) и (34), то это тоже не влияет на корни этих уравнений.

## §3. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины при совместном действии усилий сжатия и сдвига

Примем за основную нагрузку нормальную $Kq_1$. Остальные нагрузки выразим через соотношения (12) и (13). Уравнение (17) принимает следующий вид:

$$\left[\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) - 4m^2 + 2Am\right]\left(\frac{EKq_1}{\mu^2}\right)^2 - \left\{\frac{A^2}{2}\left(z^2-1\right)\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] - 4Cm + 2Am\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]AC - A^2Z^2n\right\} \times$$

$$\times \frac{EKq_1}{\mu^2} + \left\{\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2 + AC\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] - C^2 - A^2DZ^2\right\} = 0. \tag{37}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{EKq_1}{\mu^2} = \left(\left\{\left[\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) + Am\right] \times \left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] - 2Cm + \frac{AC}{2} - \frac{A^2z^2n}{2}\right\} \pm \sqrt{\Omega}\right) \Big/ \left(\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) - 4m^2 + 2Am\right). \tag{38}$$

После приведения подобных членов подкоренных слагаемых, мы для корня $\sqrt{\Omega}$ получаем следующее выражение:

$$\sqrt{\Omega} = \frac{Az}{4}\Big(\left[\left(4B - A^2\right)m - 2C + A^2mz^2\right]^2 - 4D\left[(4m-A)^2 - A^2z^2\right] - n\left[A^2\left(z^2-1\right) + 4Am\right]\left[4B + A^2\left(z^2-1\right)\right] + 4A^2z^2n^2 + 3zCmn - 8ACn\Big)^{1/2}. \tag{39}$$

Теперь уравнение (38) записываем в виде

$$\frac{EKq_1}{\mu^2} = \left(\left[\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) - 4_m^2 + 2Am + 4m^2 - Am\right] \times \left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] - [4m - A]\frac{C}{2} - \frac{A^2z^2n}{2} \pm \frac{Az}{4}\sqrt{\Omega}\right) \Big/ \left(\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) - 4m^2 + 2Am\right),$$

откуда получаем выражение для $Kq_1$:

$$Kq_1 = \left\{\left(B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4} - ((4m-A)[\left(4B - A^2\right)m - 2C + A^2mz^2] - 2A^2z^2n \pm Az\sqrt{\Omega})\right) \Big/ \left((4m-A)^2 - A^2z^2\right)\right\}\frac{\mu^2}{E}. \tag{40}$$

Уравнения (17) и (18) перепишем в таком виде:

$$\xi^2 = \left\{\frac{A^2(z-1)^2}{16} - \frac{\left[B + A^2\left(z^2-1\right)/4\right]A(z-1) + 2C}{2Az} + \frac{4m - A + Az}{2Az}\cdot\left(\frac{EKq_1}{\mu^2}\right)\right\}\mu^2; \tag{41}$$

$$\eta^2=\left\{\frac{A^2(z+1)^2}{16}-\frac{\left[B+A^2\left(z^2-1\right)/4\right]A(z+1)-2C}{2Az}-\right.$$
$$\left.-\frac{4m-A-Az}{2Az}\cdot\left(\frac{EKq_1}{\mu^2}\right)\right\}\mu^2. \qquad (42)$$

Вставим в эти выражения полученную формулу для $EKq_1/\mu^2$ из уравнения (38), предварительно умножив числитель и знаменатель на 4:

$$\xi^2=\left\{\frac{A^2(z-1)^2}{16}-\left\{\left(\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]A(z-1)+\right.\right.\right.$$
$$+2C\Big\}(4m-A-Az)+\left\{\left[A^2\left(z^2-1\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+4Am\right]\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\right\}\right)\Big/\left(2Az(4m-A-Az)\right)-$$
$$\left.-\frac{(4m-A)2C-2A^2z^2n\pm Az\sqrt{\Omega}\}}{2Az(4m-A-Az)}\right\}\mu^2;$$

$$\eta^2=\left\{\frac{A^2(z+1)^2}{16}-\left(\left\{\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]A(z+1)-2C\right\}\times\right.\right.$$
$$\times(4m-A+Az)-\left\{\left[A^2\left(z^2-1\right)+4Am\right]\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\right\}\right)\Big/\left(2Az(4m-A+Az)\right)-$$
$$\left.-\frac{(4m-A)2C-2A^2z^2n\mp Az\sqrt{\Omega}\}}{2Az(4m-A+Az)}\right\}\mu^2.$$

После приведения членов в числителях этих выражений получаем в окончательном виде выражения для $\xi^2$ и $\eta^2$:

$$\xi^2=\left\{\frac{A^2(z-1)^2}{16}-\left(\left(4B-A^2\right)m-2C+A^2mz^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2Azn\pm\sqrt{\Omega}\right)/\left(2\left(4m-A-Az\right)\right)\right\}\mu^2; \qquad (43)$$

$$\eta^2=\left\{\frac{A^2(z+1)^2}{16}-\left(\left(4B-A^2\right)m-2C+A^2mz^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2Azn\mp\sqrt{\Omega}\right)/\left(2\left(4m-A+Az\right)\right)\right\}\mu^2. \qquad (44)$$

Как видим, верхние знаки перед корнем в уравнениях (40), (43) и (44), взятые при одном значении $z$, обмениваются на нижние знаки при перемене знака $z$. На основании соображений, высказанных в §2 об отсутствии влияния знака $z$ на $Kq$, можем брать в дальнейшем только одну группу знаков (либо верхнюю, либо нижнюю).

В инженерной практике встречается необходимость в знании характера совместного действия рассматриваемых трех нагрузок, в любой их комбинации по две, а также при изолированном действии каждой из них.

Поэтому, пользуясь выведенными уравнениями, в дальнейшем получим формулы для всех перечисленных случаев и проанализируем те их комбинации, которые не исследованы до сих пор или раскрывают характер неизвестного взаимовлияния отдельных нагрузок*).

## Литература

1. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Ч.II. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. – Л.: Гос. союз. изд-во судострит. промышленности, 1941. – 960 с.

2. Лехницкий С.Г. Устойчивость анизотропных пластинок. Пособие для авиаконструкторов. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1943.

*) Эти результаты автора будут опубликованы в следующем номере журнала (прим. редколлегии)