

УДК 621.45

А.В. ЛОЯН, С.Ю. НЕСТЕРЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ

Представлена система уравнений моментов функции распределения в диссипативном приближении метода локального термодинамического равновесия, не требующая в отличие от известных предположения о несущественности изменения диссипативных характеристик на длине и за время свободного пробега.

локальное термодинамическое равновесие, диссипативные процессы, вязкость, теплопроводность

Введение

Развитие математических моделей процессов в электроракетных двигателях (ЭРД) в последние годы демонстрирует существенную роль диссипативных процессов в балансе импульсов и энергии компонент плазмы в ЭРД, прежде всего – электронов. Общей характеристикой диссипативных процессов (теплопроводности и вязкости) является наличие переноса энергии или проекции импульса в направлении, в котором отсутствует или является несущественным перенос частиц. Наиболее ярко такие процессы проявляются в стационарном плазменном двигателе (СПД), схема которого представлена на рис. 1.

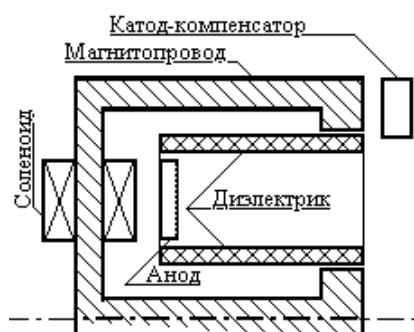


Рис. 1. Стационарный плазменный двигатель

Важной особенностью режима работы СПД является наличие значительной азимутальной проекции среднемассовой скорости электронов V_{ef} . В рассеяниях на диэлектрической стенке (рис. 1) значительная часть V_{ef} хаотизируется, что приводит к двум важным процессам:

– радиальному потоку механической составляющей энергии электронов из плазмы на стенку и тепловой составляющей – обратно;

– радиальному потоку азимутальной проекции импульса электронов.

Характерно, что оба названных процесса происходят при незначительном радиальном потоке массы электронов через барьер плавающего потенциала между плазмой и диэлектриком. Таким образом, оба процесса должны описываться как диссипативные. Неучет таких процессов в любой математической модели СПД привел бы к значительным ошибкам в оценке энергетического баланса [1] электронов и механизма пристеночной проводимости [2, 3].

При этом плазма в СПД, как и в большинстве типов ЭРД, характеризуется длинами свободных пробегов, не малыми по сравнению с размерами областей движения компонент.

Таким образом, в плазме ЭРД диссипативные составляющие плотностей потоков импульса и энергии не могут рассматриваться как слабо изменяющиеся на длине и (в нестационарных режимах) за время свободного пробега.

Постановка задачи. Состояние проблемы. При построении математических моделей процессов в газах (в том числе, и плазме) конкурирующими являются два метода описания: кинетический и газодинамический. Первый подразумевает решение кинетического уравнения [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \frac{\delta f}{\delta t}, \quad (1)$$

где f – функция распределения частиц по скоростям; \vec{v} – скорость; \vec{F} – сила; ∇_v – градиент в пространстве скоростей; $\frac{\delta}{\delta t}$ – изменение в единицу времени в результате столкновений.

Второй метод предполагает решение газодинамических уравнений для отыскания непосредственно объемных характеристик: концентрации частиц, плотности импульса, плотности энергии.

При этом кинетический метод наиболее точен в постановке задачи, но требует чрезвычайно сложных математических и вычислительных средств для решения. Газодинамический метод более прост в решениях, но менее точен в исходной постановке.

Последнее определяется следующим обстоятельством. Газодинамические уравнения записываются как уравнения моментов функции распределения (УМФР) – уравнение для плотности какой-либо характеристики получается умножением каждого из слагаемых (1) на соответствующую характеристику одной частицы (1 – для количества частиц, $m\vec{v}$ – для импульса, $mv^2/2$ – для энергии) и последующим интегрированием по всем значениям скорости. Традиционным для электрогазодинамики является использование уравнений неразрывности, движения и энергии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma} = \frac{\delta n}{\delta t}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{p}_v}{\partial t} + \sum_{km} i_k \frac{\partial \Pi_{km}}{\partial x_m} - m(n\vec{w} + \vec{\Gamma} \times \vec{\omega}) = \frac{\delta \vec{p}_v}{\delta t}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} - m\vec{\Gamma} \cdot \vec{w} = \frac{\delta \varepsilon_v}{\delta t}, \quad (4)$$

где n – концентрация; $\vec{\Gamma} = n\vec{V}$ – плотность потока частиц; \vec{V} – среднемассовая скорость; $\vec{p}_v = m\vec{\Gamma} = mn\vec{V}$ – плотность импульса; Π_{km} – компонента кинетического тензора (тензора плотности потока импульса); $\varepsilon_v = \frac{1}{2} \sum_m \Pi_{mm}$ – плотность энергии; \vec{q} – плотность потока энергии; $\vec{w} = q\vec{E}/m$ –

электростатическое ускорение; $\vec{\omega} = q\vec{B}/m$ – циклотронная частота.

При этом:

$$\vec{V} = \langle \vec{v} \rangle; \quad \Pi_{km} = \Pi_{mk} = mn \langle v_k v_m \rangle, \quad (5)$$

$$\varepsilon_v = \frac{mn \langle v^2 \rangle}{2}; \quad \vec{q} = \frac{mn \langle v^2 \vec{v} \rangle}{2}, \quad (6)$$

где $\langle \rangle$ – символ осреднения по скоростям.

Приближенность газодинамического описания обусловлена двумя основными проблемами:

– невозможностью без использования явного выражения для f записи правых (столкновительных) частей (2) – (4);

– принципиальной незамкнутостью системы УМФР: при записи уравнения момента очередной степени наиболее высокое в (1) по порядку скорости второе слагаемое правой части вводит три момента более высокой степени, не содержащиеся в предыдущих уравнениях.

Проблема незамкнутости системы УМФР более очевидно проявляется при введении так называемой сопутствующей системы координат (ССК) – инерциальной системы отсчета, в которой мгновенное и локальное значение среднемассовой скорости равно нулю. В дальнейшем параметры, вычисленные в ССК, обозначены индексом $^\circ$. Уравнения (2), (3) в таких параметрах выглядят так:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{V}^\circ) = \frac{\delta n}{\delta t}; \quad (7)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\vec{V}^\circ) + mn(\vec{V}^\circ \cdot \nabla) \vec{V}^\circ + m\vec{V}^\circ \nabla \cdot (n\vec{V}^\circ) + \sum_{km} i_k \frac{\partial P_{km}}{\partial x_m} - mn(\vec{w}^\circ + \vec{V}^\circ \times \vec{\omega}^\circ) = \frac{\delta \vec{p}_v}{\delta t}, \quad (8)$$

где P_{km} – компонента тензора давления (кинетический тензор в ССК):

$$P_{km} = \Pi_{km}^\circ = mn \langle v_k^\circ v_m^\circ \rangle; \quad (9)$$

$$\vec{v}^\circ = \vec{v} - \vec{V}. \quad (10)$$

Выражения для плотности и плотности потока энергии (6) можно записать так:

$$\varepsilon_v = \frac{mnV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_m P_{mm}, \quad (11)$$

$$\bar{q} = \left(\frac{mnV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_m P_{mm} \right) \bar{V} + \sum_{km} i_k P_{km} V_m + \bar{g}, \quad (12)$$

где \bar{g} – плотность потока энергии в ССК:

$$\bar{g} = \bar{q}^\circ = \frac{mn \langle v^{\circ 2} \bar{v}^\circ \rangle}{2}. \quad (13)$$

Уравнение неразрывности (7) пишется как формула для отыскания концентрации n , но содержит три неизвестных проекции среднemasовой скорости \bar{V} . Уравнение движения (8) пишется как формула для отыскания трех последних, но содержит шесть новых неизвестных компонент тензора давления P_{km} . Бесперспективность попыток получения замкнутой системы УМФР проявляется в том, что в уравнении энергии (4) уже не ставится задача отыскания всех компонент тензора давления, но только полусуммы его диагональных слагаемых (11). В редких случаях [5] уравнения для каждой компоненты тензора давления все-таки записывают как исходные, не предлагая однако рецептов вычисления вновь появляющихся в этих уравнениях компонент тензора третьего ранга:

$$g_{kmn} = \frac{mn \langle v_k^\circ v_m^\circ v_n^\circ \rangle}{2}. \quad (14)$$

При этом уравнение энергии (4), (12) также содержит и новый неизвестный вектор \bar{g} плотности потока энергии в ССК.

Обе названные проблемы снимаются в электрогазодинамике искусственно введением предположения о виде функции распределения. Именно, в представлении о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) функция распределения в каждый момент времени в каждой точке считается равновесной (максвелловской). Равновесное распределение характеризуется равенством нулю величины \bar{g} и скалярностью (равенством нулю недиагональных и друг другу – диагональных компонент тензора) давления.

Приближение ЛТР безоговорочно применяется при этом к вычислению столкновительных правых частей уравнений системы УМФР. Факт же, что равновесная функция распределения является реше-

нием (1) только при неизменных в пространстве и во времени параметрах, учитывается внесением диссипативных поправок:

– тензора вязкости π_{km} :

$$P_{km} = \delta_{km} P + \pi_{km}; \quad (15)$$

$$P = nkT = \frac{1}{3} \sum_m P_{mm}; \quad (16)$$

$$\pi_{km} = mn \left\langle v_k^\circ v_m^\circ - \delta_{km} \frac{v^{\circ 2}}{3} \right\rangle; \quad (17)$$

– теплопроводности, которая и есть, собственно, плотность потока энергии \bar{g} в ССК.

В новых переменных уравнение (8) может быть записано так:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n \bar{V}) + mn (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} + m \bar{V} \nabla \cdot (n \bar{V}) + \nabla P + \sum_{km} i_k \frac{\partial \pi_{km}}{\partial x_m} - n \bar{w} - n \bar{V} \times \bar{\omega} = \frac{\delta \bar{P}_v}{\delta t}. \quad (18)$$

С учетом симметричности и очевидного из (15) – (17) равенства нулю суммы диагональных компонент тензор вязкости содержит пять независимых переменных. Вместе с тремя проекциями \bar{g} они составляют восемь скалярных неизвестных. В приближении ЛТР система УМФР замыкается дополнением ее уравнениями вязкости и теплопроводности [4]:

$$\pi_{km} = -\frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_m} + \frac{\partial V_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{km} \nabla \cdot \bar{V} \right); \quad (19)$$

$$\bar{g} = -\kappa \nabla T. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20), а также способы вычисления коэффициентов вязкости η и теплопроводности κ применимы [4] при значительно более сильных, чем для системы УМФР, предположениях:

1. Компоненты тензора вязкости существенно меньше величины давления.

2. Величина \bar{g} существенно меньше комплекса $(kT)^{3/2} m^{-1/2}$.

3. Функция распределения имеет вид:

$$\frac{f(\bar{v}) - f_0(v^\circ)}{f_0(v^\circ)} \frac{nk^2 T^2}{m} = F_g(v^\circ) \bar{g} \cdot \bar{v}^\circ + \frac{F_\pi(v^\circ)}{2} \sum_{km} \pi_{km} \left(v_k^\circ v_m^\circ - \frac{\delta_{km}}{3} v^{\circ 2} \right), \quad (21)$$

где f_0 – максвелловская функция распределения в ССК.

4. Функции F_π и F_g имеют вид:

$$F_\pi(v^\circ) = 1; \quad F_g(v^\circ) = \frac{mv^{\circ 2}}{5kT} - 1. \quad (22)$$

5. Относительное изменение величин диссипативных поправок в пространстве мало на длине свободного пробега.

6. Относительное изменение величин диссипативных поправок во времени мало за время свободного пробега.

7. В процессах вязкости и теплопроводности главную роль играют рассеяния друг на друге частиц одного сорта.

В силу названных выше причин последние три предположения в плазме ЭРД не выполняются, и существующие способы учета диссипативных процессов неприемлемы для описания ЭРД.

Спорность выражений (19) и (20) в отношении процессов в плазме ЭРД в значительной мере усугубляется также наличием в последних магнитного поля с немалым (чаще – большим) параметром Холла для электронов. Рекомендация в выражениях для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности в сильном магнитном поле использовать циклотронный радиус вместо длины свободного пробега является лишь качественной и не охватывает случаи, когда названные размеры сопоставимы.

Задача данных исследований. Задачей данной работы является получение выражений для диссипативных поправок при использовании предположений не сильнее тех, в которых записаны уравнения неразрывности (7), движения (18) и энергии (4), (12).

Решение поставленной задачи

Процесс на траектории. Уравнение изменения во времени и в пространстве величин π_{km} записывалось непосредственно из (1) в предположениях 1, 3. Использование предположения 1 позволило пренебречь величинами π_{km} по сравнению с давлением P в слагаемых, в которые π_{km} и P входят симметрично. Предположение 3 позволило ограничиться рассмотрением

вектора \vec{g} вместо тензора третьего ранга g_{kmn} ввиду зависимости:

$$g_{kmn} = \frac{\delta_{mn} g_k + \delta_{kn} g_m + \delta_{km} g_n}{5}. \quad (23)$$

В результате получено выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \pi_{km}}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi_{km} \vec{V}) + \\ & + \frac{2}{5} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_m} + \frac{\partial g_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{km} \nabla \cdot \vec{g} \right) + \\ & + P \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_m} + \frac{\partial V_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{km} \nabla \cdot \vec{V} \right) = \\ & = \frac{\delta \pi_{km}}{\delta t} + i_k \cdot (\vec{\pi}_m \times \vec{\omega}) + i_m \cdot (\vec{\pi}_k \times \vec{\omega}), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\vec{\pi}_k$ – вектор-строка тензора π_{km} :

$$\vec{\pi}_k = \sum_m i_m \pi_{km}. \quad (25)$$

Уравнение изменения во времени и в пространстве величины \vec{g} записывалось непосредственно из (1) с использованием предположения 2, а также аналогичного ему предположения о малости по сравнению с максвелловскими немасвелловских составляющие тензора 4 ранга, возникающего в уравнении теплопроводности:

$$Q_{ikmn} = mn \langle v_i^\circ v_k^\circ v_m^\circ v_n^\circ \rangle. \quad (26)$$

В результате получено:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{g} - \frac{7}{5} \vec{g} \nabla \cdot \vec{V} + \frac{7}{5} (\vec{g} \cdot \nabla) \vec{V} + \\ & + \frac{2}{5} \sum_{km} i_k g_m \frac{\partial V_m}{\partial x_k} + \frac{5}{2} \frac{Pk}{m} \nabla T = \frac{\delta \vec{g}}{\delta t} + \vec{g} \times \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (27)$$

Процессы в столкновениях. Предположения (3) и (4) были использованы при вычислении столкновительных слагаемых в правых частях (24) и (27). В случае рассеяния однородных частиц полученные выражения имеют вид:

$$\frac{\delta \pi_{km}}{\delta t} = -\frac{3}{5} \nu \pi_{km}; \quad (28)$$

$$\frac{\delta \vec{g}}{\delta t} = -\frac{2}{5} \nu \vec{g}, \quad (29)$$

где ν – эффективная частота столкновений:

$$\nu = n \langle \nu \sigma_{tr} \rangle, \quad (30)$$

где σ_{tr} – транспортное сечение.

При рассеянии разнородных частиц выражения, соответствующие (28), (29), включают также слагаемые, содержащие разности среднемассовых скоростей компонент, разности температур, разности диссипативных поправок и в общем случае являются достаточно громоздкими. Однако, при описании именно электронов (наиболее возмущенной компоненты плазмы в ЭРД) эти выражения существенно упрощаются ввиду значительной разницы масс электрона и остальных частиц в плазме.

Заключение

Сформулирована система уравнений моментов функции распределения с учетом диссипативных процессов. При этом, в отличие от общепринятого описания:

- уравнения изменения во времени вязкостной поправки π_{km} к компоненте кинетического тензора и кондуктивной поправки \bar{g} к плотности потока энергии получены без предположения о несущественности изменения названных поправок в пространстве на длине и во времени – за время свободного пробега;

- в записи левых частей названных уравнений не использовано предположение о конкретной зависимости функций F_π и F_g в (22);

- предположения (22) использованы только в выражениях для изменения величин π_{km} и \bar{g} в столкновениях, что соответствует общему уровню точности записи столкновительных слагаемых в системе УМФР, в том числе и в уравнениях неразрывности, движения и энергии;

- в полученных уравнениях роль магнитного поля в диссипативном переносе импульса и энергии отражена на общем для кинетики уровне точности и не требует малообоснованных аналогий между циклотронными и столкновительными процессами.

Полученные уравнения вязкости (24) и теплопроводности (27) содержат как частный случай

«классические» (19), (20) и вырождаются в них при выполнении условий, в которых последние получены:

- неизменность всех параметров во времени;
- неизменность всех параметров, кроме среднемассовой скорости в (24) и температуры в (27), в пространстве;
- однородность среды;
- отсутствие магнитного поля.

Таким образом, полученная система уравнений: является во многих случаях более точной и ни в одном случае – менее точной, чем "классическая", и не требует для анализа качественно более сложных аналитических и вычислительных средств.

Литература

1. Бугрова А.И., Красненков М.А., Ткачѳв В.И. Экспериментальное исследование энергитического баланса в УЗДП // Теплофизика высоких температур. – 1981. – Т. 19, № 2. – С.428-430.
2. Ким В. Анализ механизмов переноса электронов поперѳк магнитного поля и особенностей распределения электрического поля в канале УЗДП по результатам локальных измерений параметров плазмы // Источники и ускорители плазмы: Межвуз. темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ, 1981. – Вып. 5. – С. 9-18.
3. Бугрова А.И., Морозов А.И., Харчевников В.К. Эффеkты пристеночной проводимости в канале УЗДП // Письма в ЖТФ. – 1983. – Т. 9, № 1. – С. 3-6.
4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
5. Росси Б., Ольберт С. Введение в физику космического пространства. – М.: Атомиздат, 1974. – 392 с.

Поступила в редакцию 21.05.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Оранский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», Харьков.