УДК 532.526

Ю.А. КРАШАНИЦА, ШАЛЯЛЬ ФАЯД АЛУАН

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПО КИНЕМАТИЧЕСКИМ И ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ В ЗАДАЧЕ ОЗЕЕНА

Представлена идеология получения решений линейной нестационарной задачи Озеена в сплошной вязкой среде методом граничных интегральных уравнений. На базе развитого и апробированного оригинального аппарата векторно-тензорного анализа показаны интегральные представления динамических и кинематических параметров, а также восстановление поля скоростей по динамическим и кинематическим параметрам течения вокруг телесного профиля, движущегося вблизи поверхности раздела.

законы сохранения, система уравнений Озеена, телесный профиль, начально-краевая задача, фундаментальные решения, интегральные представления решений, системы интегральных уравнений, завихренность, давление, поле скоростей

Введение

Изучение физико-технических процессов в механике сплошных сред начинается с построения математической модели. Полное описание процесса часто делает невозможным нахождение точного решения задачи. Поэтому при получении практически важных результатов, исследования которых сопровождаются требованиями математической строгости, зачастую необходимо пренебрегать второстепенными на данном этапе исследований факторами и пользоваться результатами физического эксперимента.

В силу многопараметричности и нелинейности основных задач механики сплошных сред, существенное развитие, наряду с физическим опытом, получил вычислительный эксперимент. Значительные достижения получены в численном анализе и, особенно, в численной реализации конкретных математических моделей механики: в газовой динамике существенное развитие получила вычислительная газовая динамика с учетом физико-химических процессов; в динамике вязкой несжимаемой жидкости основное внимание уделяется новым качественным методам исследования начально-краевых задач, которые в свою очередь накапливают математические проблемы и намечают некоторые пути их разрешения, приводят к возникновению новых математических моделей постановок и решений задач движения вязкой жидкости также при малых и средних числах Рейнольдса, имеющих первостепенное значение в вопросах жизнеобеспечения и экологии, технологических процессах.

Метод граничных интегральных уравнений, позволяющий сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности, есть одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики, теории поля и векторного анализа. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве разрешимости задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным метод оказался в случаях внешних задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами.

Одной из классических и практически востребованных задач механики жидкости является задача Озеена – корректная математическая модель нестационарного движения тела в потоке вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса [1 – 2].

Эта задача особенно актуальна при исследовании аэродинамических характеристик летательных аппаратов на режимах взлета-посадки, когда формируются интенсивные вихревые структуры в спутных потоках, препятствующие устойчивому и управляемому полету.

Результаты исследований

В задаче Озеена линеаризованный закон сохранения импульса в потоке вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)-\nu\Delta\mathbf{V}=0 \qquad (1)$$

при выполнении естественных граничных

$$\mathbf{V}\big|_S=\mathbf{U}_S(\mathbf{r},t) \qquad (2)$$

и начальных условий

$$\mathbf{V}\big|_{t=0}=\mathbf{U}_0(\mathbf{r}). \qquad (3)$$

Причем на границе раздела и неподвижном профиле скорость течения равна нулю, на границах же движущегося профиля и контрольного объема скорость – это заданный вектор координат и времени. Кроме этого, в некоторый начальный момент времени движение отсутствует.

Применяя операцию ротации к уравнению (1), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t}+\nu\left[\nabla,\left[\nabla,\mathbf{\Omega}\right]\right]=0, \qquad (4)$$

а в силу опять же консервативности вектора $\mathbf{\Omega}$ по определению, отсюда получаем

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t}-\nu\Delta\mathbf{\Omega}=0. \qquad (5)$$

Причем, можно считать, что на входных границах контрольного объема известны как давление p, так и завихренность $\mathbf{\Omega}$.

Для несжимаемой среды, если $(\nabla, \mathbf{V}) = 0$, к системе уравнений (1, 5) необходимо добавить уравнение Лапласа для давления и решения искать в классах вектор-функций вида

$$\mathbf{V}(r,t)=e^{\nu t}\bar{\mathbf{V}}(r),\ \frac{p}{\rho}(r,t)= =e^{\nu t}\frac{\bar{p}}{\rho}(r),\ \mathbf{\Omega}(r,t)=e^{\nu t}\bar{\mathbf{\Omega}}(r). \qquad (6)$$

Тогда для преобразованных векторов скорости $\mathbf{V}$, завихренности $\mathbf{\Omega}=\mathbf{k}\Omega$ (при плоских течениях $\Omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$) и давления p имеем систему:

$$\Delta\mathbf{V}-\mathbf{V}=\nabla\left(\frac{p}{\mu}\right); \qquad (7)$$

$$\Delta\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}=0; \qquad (8)$$

$$\Delta p=0. \qquad (9)$$

Здесь следует отметить, что если для уравнения Лапласа (9) элементарное (фундаментальное) решение для пространств любой размерности широко известно и хорошо изучено, к уравнению Клейна-Гордона (7, 8) это относится в меньшей степени.

Можно показать [4], что скалярное фундаментальное решение для оператора в левых частях уравнения (7, 8) имеет вид

$$\phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty\frac{e^{-r\xi}d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}, \qquad (10)$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, а в окрестности особой точки имеет логарифмическую особенность. Укажем еще поведение функции $\phi(r)$ при $r\to\infty$. Полагая в равенстве (10) $r(\xi-1)=\eta^2,\ \xi=1+\frac{\eta^2}{r}$, получаем

$$\phi(r)=\int_0^\infty\frac{e^{-\eta^2-r}}{\sqrt{\left(1+\frac{\eta^2}{r}\right)-1}}\frac{2\eta}{r}d\eta=$$

$$=e^{-r}\sqrt{\frac{2}{r}}\int_0^\infty\frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{1+\frac{\eta^2}{2r}}}d\eta=e^{-r}\sqrt{\frac{2}{r}}\left[\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta+\varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$$

и, следовательно, при $r\to\infty$

$$\phi(r)=e^{-r}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}(1+\varepsilon),$$

где ε — величина, стремящаяся к нулю при $r \to \infty$.

Таким образом, показано, что функция $\phi(r)$ (10) в применении к уравнениям (7, 8) играет точно такую же роль, как и функция единичного источника $\varphi(x, x_0, y, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ в применении к двумерному уравнению Лапласа (9). Поэтому функцию (10) можно назвать функцией единичного источника в точке (x_0, y_0) для уравнений (7, 8), а решения имеют интегральные представления:

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\oint_L \Big(\mu lnrV_n -$$

$$-\mu\Big(\big[\mathbf{n}, \nabla(\ln r)\big], \mathbf{\Omega}\Big) + p\frac{\partial \ln r}{\partial n}\Big)dl\,; \qquad (11)$$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \oint_{(L)}\Big(\phi(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})[\mathbf{n},\mathbf{V}] - \frac{1}{\mu}\big[\mathbf{n}, \nabla\phi(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\big]p -$$

$$-\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\rho})\frac{\partial\phi(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\Big)d_\rho l\,; \qquad (12)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\int_{(S)}\frac{1}{\mu}p\nabla\phi dS + \oint_{(L)}\Big(\frac{\mathbf{n}}{\mu}p(\boldsymbol{\rho})\phi(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) +$$

$$-\phi(r,\rho)[\mathbf{n},\mathbf{\Omega}] +$$

$$+\Big[\big[\mathbf{n}, \nabla\phi(r,\rho)\big], \boldsymbol{V}\Big] - \boldsymbol{V}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\Big)d_\rho l\,. \qquad (13)$$

Причем в интегральных представлениях (11 – 13) ядра $\big[\mathbf{n}, \nabla\varphi(r,\rho)\big]$ и $\big[\mathbf{n}, \nabla\phi(r,\rho)\big]$ не хуже сингулярных.

После предельного перехода к границам имеем систему граничных интегральных уравнений соответствующих представлениям (11 – 13).

Поставим задачу определения поля скоростей (13) по известным граничным значениям как давления p, так и завихренности **Ω**. Особая трудность связана здесь с наличием в (13) интеграла по области (S).

Таким образом, доказано, что интегральные представления (11, 12) являются общими решениями модифицированной задачи Озеена (7 – 9), а поле скоростей восстанавливается представлением (13) с помощью решения вспомогательной задачи (16) вида (19).

Однако, с другой стороны, согласно (7) поле скоростей определяется уже известными полями давлений (11) и завихренностей (12)

$$\mathbf{V} = -[\nabla, \mathbf{\Omega}] - \nabla\Big(\frac{p}{\mu}\Big).$$

В силу консервативности поля скоростей $(\nabla, \mathbf{V}) = 0$, существует векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$ такой, что

$$\mathbf{V} = [\nabla, \mathbf{\Psi}], \qquad (14)$$

где в плоском случае течения $\mathbf{\Psi} = \mathbf{k}\psi$, а ψ – обычная функция тока.

В классе вектор-функций (6) из уравнения (7) следует, что

$$[\nabla, \mathbf{\Psi}] + [\nabla, \mathbf{\Omega}] = -\nabla\Big(\frac{p}{\mu}\Big), \qquad (15)$$

а, в силу (9), p – гармоническая функция. По определению вектор завихренности $\mathbf{\Omega}$ консервативный, т.е. $(\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0$.

При известном поле скоростей **V** после тождественных преобразований

$$[\nabla\varphi, \mathbf{V}] = \Big[\nabla\varphi, \big[[\nabla, \mathbf{\Psi}]\big]\Big] =$$

$$= \big(\nabla\varphi, \nabla^*\mathbf{\Psi}\big) - (\nabla\varphi, \nabla\mathbf{\Psi}) = \Big(\nabla\varphi, \big[\nabla, [\hat{\mathbf{I}}, \mathbf{\Psi}]\big]\Big) +$$

$$+\nabla\varphi(\nabla, \mathbf{\Psi}) - \big(\nabla, (\nabla\varphi * \mathbf{\Psi})\big)$$

интегральное представление решения уравнения (14) имеет вид

$$\mathbf{\Psi} = \iint_{(S)}\big(\nabla\varphi(\nabla, \mathbf{\Psi}) - [\nabla\varphi, \mathbf{V}]\big)dS -$$

$$-\oint_{(L)}\Big\{\big[[n, \nabla\varphi], \mathbf{\Psi}\big] + \mathbf{\Psi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big\}dl,$$

откуда следует, что поле векторного потенциала в (14) также консервативно и $(\nabla, \mathbf{\Psi}) = 0$.

Поэтому

$$\Delta(\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Omega}) = 0 \qquad (16)$$

и в силу преобразований, приведенных выше, имеем последовательно

$$\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Omega} = \oint_{(L)}\Big\{\varphi\frac{\partial}{\partial n}(\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Omega}) - (\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Omega})\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big\}dl\,,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}(\Psi+\Omega)=\left(\mathbf{n},\nabla(\Psi+\Omega)\right)-\left(\mathbf{n},\nabla^*(\Psi+\Omega)\right)+$

$$+\left(\mathbf{n},\nabla^*(\Psi+\Omega)\right)-\hat{\mathbf{I}}\left(\nabla,(\Psi+\Omega)\right)=$$

$$=-\left[\mathbf{n},\left[\nabla,(\Psi+\Omega)\right]\right]+\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\hat{\mathbf{I}},(\Psi+\Omega)\right]\right]\right)=$$

$$=\left[\mathbf{n},\nabla\left(\frac{p}{\mu}\right)\right]+\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\hat{\mathbf{I}},(\Psi+\Omega)\right]\right]\right).$$

Поэтому

$$\Psi+\Omega=-\oint\limits_{(L)}\left\{[\mathbf{n},\nabla\varphi]\frac{p}{\mu}+\left[[\mathbf{n},\nabla\varphi],(\Psi+\Omega)\right]+\right.$$

$$\left.+(\Psi+\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dS. \qquad (17)$$

По известному потенциалу Ψ отсюда по (14) восстанавливается поле скоростей.

Поэтому воспользуемся развитой ранее технологией векторно-тензорного анализа [5].

Так как по определению вектор завихренности $\Omega=[\nabla,\mathbf{V}]$, то имеем последовательно

$$\left[[\nabla\varphi],[\nabla,\mathbf{V}]\right]=\left(\nabla\varphi,\nabla^*\mathbf{V}\right)-\left(\nabla\varphi,\nabla\mathbf{V}\right)=$$

$$=-\left(\nabla,\left[\nabla\varphi,\left[\hat{\mathbf{I}},\mathbf{V}\right]\right]\right)+\nabla\varphi q-\left(\nabla,(\nabla\varphi*\mathbf{V})\right),$$

где φ – фундаментальное решение уравнения Лапласа; $q=(\nabla,\mathbf{V})$ – известная плотность интенсивности возможных источников массы, распределенных в области S; тензор $\nabla^*\mathbf{V}$ является сопряженным тензору $\nabla\mathbf{V}$, а $\hat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор.

Тогда интегрируя по области S полученные выражения $\left[[\nabla\varphi],\Omega\right]=\left[[\nabla\varphi],[\nabla,\mathbf{V}]\right]$, и учитывая представление (12) имеем:

$$-\oint\limits_{(L)}\left\{\left[[\mathbf{n},\nabla\varphi],\mathbf{V}\right]+\mathbf{V}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dl+\iint\limits_{(S)}q\nabla\varphi dS=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left\{\oint\limits_{(L)}\left(\phi(\mathbf{r},\rho)\left[\nabla\varphi,[\mathbf{n},\mathbf{V}]\right]-\frac{1}{\mu}\left[\nabla\varphi,\left[\mathbf{n},\nabla\phi(\mathbf{r},\rho)\right]\right]p-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\nabla\varphi,\Omega(\rho)\right]\frac{\partial\phi(\mathbf{r},\rho)}{\partial n}\right)d_\rho l\right\}dS.$$

В силу свойств потенциала двойного слоя [3], отсюда, после перестановки интегралов, получаем интегральное представление распределения поля скоростей в области, а так как в этом случае ядра непрерывные функции, то

$$\mathbf{V}(\mathbf{r})=\iint\limits_{(S)}q\nabla\varphi dS-\oint\limits_{(L)}\left\{\left[[\mathbf{n},\nabla\varphi],\mathbf{V}\right]+\mathbf{V}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}dl-$$

$$-\oint\limits_{(L)}\left\{\iint\limits_{(S)}\left(\phi(\mathbf{r},\rho)\left[\nabla\varphi,[\mathbf{n},\mathbf{V}]\right]-\frac{1}{\mu}\left[\nabla\varphi,\left[\mathbf{n},\nabla\phi(\mathbf{r},\rho)\right]\right]p-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\nabla\varphi,\Omega(\rho)\right]\frac{\partial\phi(\mathbf{r},\rho)}{\partial n}\right)dS\right\}d_\rho l. \qquad (18)$$

В заключение необходимо отметить, что данной статьей завершается цикл работ, посвященных обобщению векторно-тензорного анализа и развитию на этой базе метода граничных интегральных уравнений в начально-краевых задачах динамики вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Литература

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числа Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 632 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
4. Крашаница Ю.А., Shalal F.A. Нестационарное движение телесного профиля вблизи поверхности раздела в вязкой среде // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2007. – № 3 (39). – С. 56-61.
5. Крашаница Ю.А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) // Вісник Дніпропетровського університету. – 2000. – Вип. 3, т. 1. – С. 52-56.

Поступила в редакцию 12.03.2008

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. А.В. Бастеев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.