

УДК 517.958:519.6

В.Б. МИНТЮК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ТОЧНОСТЬ, СХОДИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА РЭЛЕЯ-РИТЦА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ**

Приведено численное исследование точности, сходимости и устойчивости приближенных решений, полученных методом Рэлея-Ритца с использованием различных базисов для ряда краевых задач: продольно-поперечного изгиба балки, задачи Сен-Венана о кручении вала прямоугольного сечения и задачи изгиба прямоугольной пластины. Приведено сравнение сходимости приближенных решений, построенных на предложенных ранее автором базисах, а также на собственных функциях сходного оператора задачи, степенных функций и финитном базисе метода конечного элемента. Показано, что предложенные ранее автором базисы, удовлетворяющие всем граничным условиям, обладают свойством почти ортогональности в энергетической метрике соответствующих операторов и лучшими свойствами сходимости, что обеспечивает устойчивость самого решения и численной процедуры его отыскания.

Ключевые слова: базис, краевая задача, точность, сходимость и устойчивость приближенных решений.

Введение

Процесс создания силовых конструкций всегда включает в себя расчет на прочность. Напряжения, деформации, перемещения, критические параметры, частоты колебаний и др., возникающие в силовых конструкциях, являются результатами решения краевых задач. Расчетная модель силовой конструкции определяет тип краевой задачи. Часто даже незначительные усложнения моделей приводят к задачам, не имеющим точного решения. Такие задачи сегодня решаются приближенно прямыми вариационными методами. Основным недостатком решений, доставляемых этими методами, является необходимость дополнительного исследования их точности и достоверности, которые особенно важны в расчетах силовых агрегатов аэрокосмической техники, где требование минимума массы приводит к конструкциям с минимальными запасами прочности.

Качество приближенных решений краевых задач во многом зависит от свойств разрешающих систем уравнений, к которым приводит применение того или иного вариационного метода. Свойства разрешающих матриц зависят как от дифференциального оператора и краевых условий (вида функционала и дополнительных условий), так и от выбранного базиса в аналитических методах и от степени дискретизации области в вариационно-разностных методах.

В работе [1] способом, предложенным в [2], построен ряд базисов для одномерных краевых задач. Ниже приводится анализ точности, сходимости и устойчивости приближенных решений одномер-

ных и двумерных краевых задач, полученных методом Рэлея-Ритца с использованием построенных базисов. Анализ проводится путем сравнения с точным решением (если оно известно) и с решениями, построенными на основе других базисов.

1. Сходимость приближенных решений обыкновенного дифференциального уравнения к точному. Обусловленность матрицы Грамма

С одной стороны, если возможно построить точное решение, то обычно все приближенные методы дают хороший результат. С другой стороны самый верный способ определения точности и сходимости решений, доставляемых приближенными методами, – это их сравнение с точным решением. Рассмотрим сначала краевую задачу, описываемую обыкновенным дифференциальным оператором. Заметим, что для краевых задач Дирихле, Неймана и задачи со смешанными граничными условиями с дифференциальными операторами $-\frac{d^2}{dx^2}$ и $\frac{d^4}{dx^4}$ построенные в работе [1] базисы являются ортонормированными. Поэтому решения указанных задач выписываются сразу. Рассмотрим более сложную краевую задачу:

$$u^{IV} + \bar{P}u'' + \bar{k}u = \bar{q}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 1. u|_{-1} = 0; \quad 2. u''|_{-1} = 0; \\ 3. u|_1 = 0; \quad 4. u'|_1 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Это математическая модель продольно попе-

речного изгиба с относительной равномерной распределенной нагрузкой $\bar{q} \equiv \frac{ql^3}{EI} = -\frac{(1+\pi^2)^2 \text{ch } 1}{200}$ и относительной силой $\bar{P} \equiv \frac{Pl^2}{EI} = 2(\pi^2 - 1)$ осевой линии балки длиной $2l$ и жесткостью EI , которая опирается на винклеровское основание с относительной жесткостью $\bar{k} \equiv \frac{kl^4}{EI} = (1+\pi^2)^2$, на правом краю балка защемлена, на левом – шарнирно оперта (рис. 1).

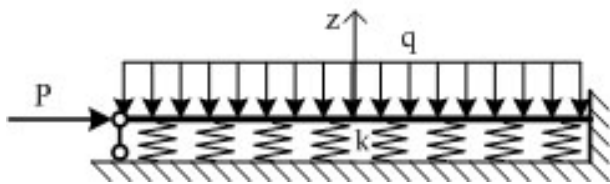


Рис. 1. Продольно поперечный изгиб балки на винклеровском основании

Величина сжимающей силы составляет около 81,6% критической силы. Эта задача имеет точное решение

$$u(x) = \frac{\sin \pi x}{400\pi(1+\text{th}^2 1)} \left[(1+2\text{th}^2 1 - \pi^2) \text{sh } x + \text{th } 1(1+\pi^2) \text{ch } x \right] - \frac{\text{ch } 1 + \text{ch } x \cos \pi x}{200} \quad (3)$$

Значение самой функции, ее первой, второй и третьей производных представлены на рис. 2.

Легко показать, что дифференциальный оператор задачи (1), (2) положительно определен, поэтому для получения приближенных решений этой задачи можно воспользоваться методом Рэлея-Ритца. Минимизировать функционал полной потенциальной энергии, соответствующий данной краевой задаче

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[(u'')^2 - \bar{P}(u')^2 + \bar{k}u^2 \right] dx + \int_{-1}^1 \bar{q}u dx, \quad (4)$$

с дополнительными условиями (2) будем используя:

1) Предложенный в работе [1] ортогональный

базис для оператора $B = \frac{d^4}{dx^4}$, который сходный с оператором задачи (1), (2)

$$\varphi_n^P = \frac{(2n+5)(n+2)^2}{(2n+1)(n+1)^2} P_{n-1} - \frac{2n+5}{(n+1)^2} P_n - \frac{(2n+3)(2n^2+6n+7)}{(2n+1)(n+1)^2} P_{n+1} + \frac{2n+5}{(n+1)^2} P_{n+2} + P_{n+3},$$

здесь P_n – полиномы Лежандра, $n=1,2,\dots$

2) Ортогональный базис, предложенный в работе [3] (нормировочный множитель опущен):

$$\varphi_1^M = (x+1)^2(x-1),$$

$$\varphi_n^M = \int_{-1}^x (x-\xi) P_n(\xi) d\xi, n=2,3,\dots$$

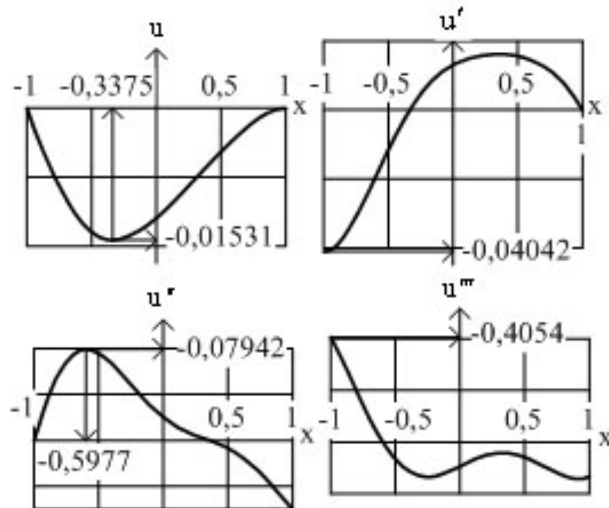


Рис. 2. Точное значение функции, первой, второй и третьей производных

3) Базис, построенный путем умножения функции $\omega = (1+x)^2(1-x)$, которая удовлетворяет главным граничным условиям (2), на степенные функции

$$\varphi_n^X = \omega x^{n-1}, n=1,2,\dots$$

4) Систему собственных функций сходного оператора $B = \frac{d^4}{dx^4}$ с граничными условиями (2)

$$\varphi_n^F = \sin \frac{\rho_n(1+x)}{2} - \frac{\sin \rho_n}{\text{sh } \rho_n} \text{sh} \frac{\rho_n(1+x)}{2}, n=1,2,\dots$$

где ρ_n – положительные корни уравнения $\text{tg } x = \text{th } x$.

5) Финитный базис метода конечных элементов (МКЭ) с двумя неизвестными в узле и кубической аппроксимацией внутри элемента (согласованный конечный элемент).

Вычисления в рамках процедуры Рэлея-Ритца с использованием всех базисов кроме четвертого проводилось без округления. При использовании четвертого базиса число значащих цифр удерживалось настолько большим, чтобы исключить влияние ошибок округления.

Ниже на графиках, приведенных на рис. 3, 4 и 5, дискретные значения погрешностей, вычисленных с удержанием различного числа членов ряда (порядка разрешающей системы линейных алгебраических уравнений) для большей наглядности

аппроксимированы кубическими сплайнами.

Все базисы дают хорошую сходимость приближенных функций к точной. Отклонение значений приближенных функций в точке экстремума $x = -0,3375$ (наибольшего прогиба) с увеличением числа удерживаемых членов ряда n (в МКЭ количество узловых неизвестных) в процентах от точного $u_{\min} = -0,01531$ приведено на рис. 3. На базисах 1), 2), 3), 4) практически точное значение (менее 1%) достигается на 5–6 функциях, на финитном базисе – на 6 элементах (9 неизвестных). Аналогичная картина наблюдается и для первых производных – углов поворота.

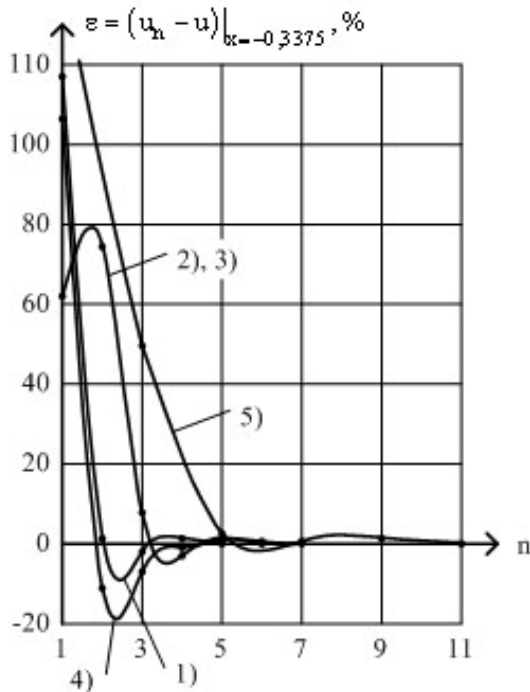


Рис. 3. Сходимость максимального прогиба

Для практических расчетов на прочность наиболее важными являются величины наибольшего изгибающего момента и поперечной силы, которые пропорциональны соответственно второй и третьей производным. Здесь финитный базис МКЭ значительно уступает по точности аналитическим функциям (рис. 4, рис. 5). Лучшая сходимость базиса 1) согласуется с результатами, полученными Даугаветом [4], в отличие от полиномиальных базисов 2) и 3) каждая координатная функция базиса 1) удовлетворяет всем краевым условиям (2).

В приведенных вычислениях использовалось небольшое число координатных элементов, что приводило к матрицам малого размера (наибольший размер матрицы 15×15). Решение современных задач приводят к матрицам, у которых порядки измеряются тысячами. Здесь на первый план выходит

проблема устойчивости процесса решения системы Рэлея-Ритца и самого приближенного решения, что гарантируется свойством сильной минимальности системы координатных функций в метрике энергетического пространства оператора задачи (1), где норма и скалярное произведение определяются формулами

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-1}^1 [(u'')^2 - \bar{P}(u')^2 + \bar{k}u^2] dx}, \quad (5)$$

$$(u, v) = \int_{-1}^1 [u''v'' - \bar{P}u'v' + \bar{k}uv] dx.$$

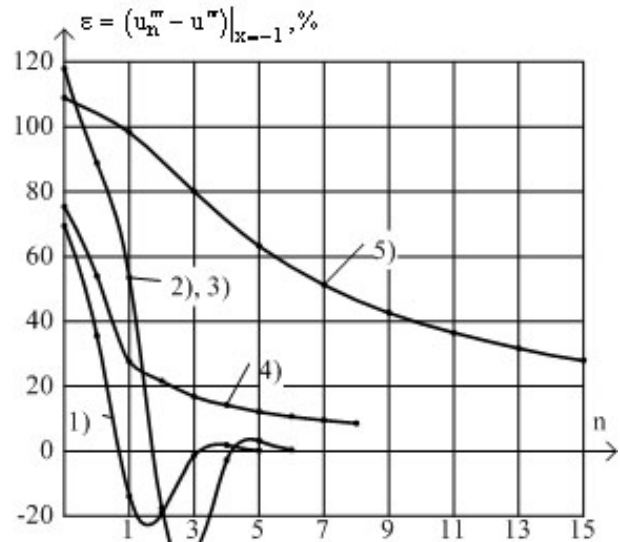


Рис. 4. Сходимость максимального изгибающего момента

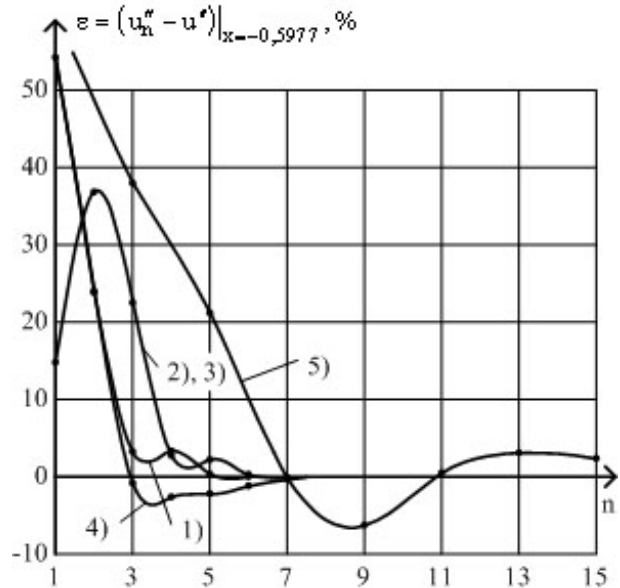


Рис. 5. Сходимость максимальной поперечной силы

Известно [3], что система 3) неминимальна, а

системы 1), 2), 4) даже почти ортонормированы в метрике (5), потому, что эти функции ортонормированы в метрике родственного оператора $V = \frac{d^4}{dx^4}$.

Иллюстрацией этого факта служат графики зависимостей числа обусловленности матрицы Грамма (так называемого числа P – отношения наибольшего собственного числа к наименьшему) от ее порядка, приведенные на рис. 6.

Здесь видно, что обусловленность матриц Грамма, построенных на базисах 1), 2), 4), ограничена, число обусловленности для степенных функций (базис 3)) очень быстро увеличивается, обусловленность матрицы Грамма, построенная на финитных функциях (матрицы жесткости МКЭ), обратно пропорциональна квадрату размера конечного элемента.

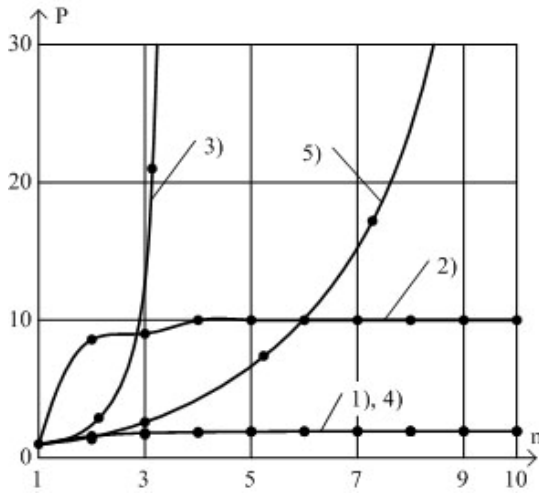


Рис. 6. Зависимость P-числа от порядка матрицы Грамма

Для всех координатных систем элементы матриц нормировались по формуле

$$a_{nm} = \frac{(\varphi_m, \varphi_n)}{\|\varphi_m\| \|\varphi_n\|}.$$

2. Сходимость приближенных решений для уравнения Пуассона

Рассмотрим уравнение Пуассона в квадратной области $\Omega = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2, \tag{6}$$

с однородными граничными условиями

$$\Phi|_{\Omega} = 0. \tag{7}$$

Эта краевая задача описывает кручение вала квадратного сечения (задача Сен-Венана). Точное

решение можно выписать в виде бесконечной суммы

$$\Phi = \frac{1}{4} - y^2 - \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi x}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{2}}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2}}.$$

Построим приближенное решение этой задачи методом Рэлея-Ритца. Выражение потенциальной энергии

$$U = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right\} dx dy$$

будем минимизировать на базисе

$$\varphi_{mn}(x, y) = X_m(x) Y_n(y), \tag{8}$$

где $X_i = Y_i = P_{i+1} - P_{i-1}$, P_i – полиномы Лежандра, причем в виду симметрии задачи $i=1,3,\dots$.

Сходимость приближенного решения к точному, как и в предыдущем примере, оценим по разнице максимальных значений самой функции и ее производных.

Наибольшее значение самой функции достигается в середине области ($x=y=0$) и составляет $\Phi_{\max} = 0,58937$. Здесь наблюдается очень быстрое стремление приближенного значения к точному. Так при удержании только одной функции $\Phi_{\max}^{1,1} = 0,62500$ (погрешность по отношению к точному $\epsilon=6\%$), при удержании четырех функций $\Phi_{\max}^{2,2} = 0,58984$ ($\epsilon=0,8\%$). Также быстро сходится значение крутящего момента

$$M_z = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi dx dy,$$

точное значение которого составляет $M_z = 2,2492$.

Приближенное с удержанием одной функции $M_z^{1,1} = 2,2222$ (1,2%), с удержанием четырех функций $M_z^{2,2} = 2,2489$ (0,015%).

Важные с точки зрения прочности максимальные касательные напряжения

$$\tau_{zx}|_{x=0,y=1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{x=0,y=1};$$

$$\tau_{zy}|_{x=1,y=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=1,y=0}$$

также достаточно быстро сходятся, что продемонстрировано на рис. 7.

Так приближенное значение максимальных касательных напряжений уже с использованием 4 координатных функций составляет

$$\tau_{zx \max}^{2,2} = \tau_{zy \max}^{2,2} = 1,3438 \quad (\varepsilon=0,51\%),$$

а с использованием 9 функций:

$$\tau_{zx \max}^{3,3} = \tau_{zy \max}^{3,3} = 1,3554 \quad (\varepsilon=0,35\%).$$

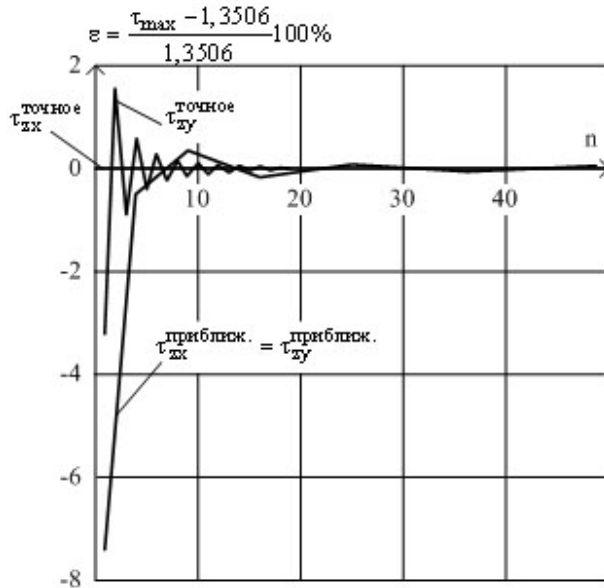


Рис. 7. Сходимость максимальных касательных напряжений

Нормированная матрица Грамма, элементы которой определяются по формуле

$$(\varphi_{mn}, \varphi_{ij}) = \frac{1}{\|\varphi_{mn}\| \|\varphi_{ij}\|} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$\text{где } \|\varphi_{mn}\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy},$$

имеет ленточную структуру с шириной полосы 5 и слабыми убывающими недиагональными элементами. Число обусловленности ограничено (см. рис. 8), что говорит об устойчивости процедуры Рунге-Кутты и самого решения.

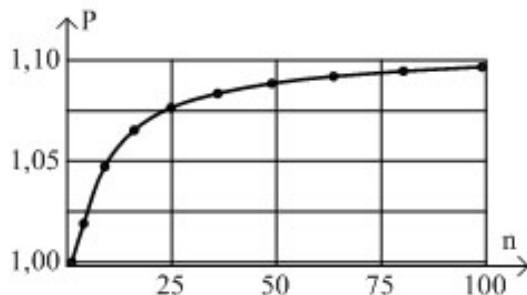


Рис. 8. Обусловленность матрицы Грамма

3. Сходимость приближенных решений краевой задачи для бигармонического оператора

Рассмотрим в той же двумерной области $\Omega = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

с граничными условиями

1. $w|_{x=-1} = 0;$
2. $\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=-1} = 0;$
3. $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu \partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=-1} = 0;$
4. $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{(2-\mu) \partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=-1} = 0;$
5. $w|_{y=-1} = 0;$
6. $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu \partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=-1} = 0;$
7. $\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-1} = 0;$
8. $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{(2-\mu) \partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \Big|_{y=-1} = 0.$

Это задача изгиба прямоугольной пластины толщиной h , равномерно распределенной нагрузкой q . Материал пластины изотропный с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ .

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость.}$$

Построение базиса, который бы удовлетворял всем граничным условиям, сталкивается с определенными трудностями. Поэтому построим базис, который удовлетворяет только главным граничным условиям, а именно: 1, 2, 5, 7.

Как и в предыдущем примере, базис представим в виде

$$\varphi_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y), \quad m=1,2, \dots; n=1,2, \dots \quad (9)$$

где $X_m = P_{m+1} - \frac{2m+1}{m^2} P_m - \frac{(m+1)^2}{m^2} P_{m-1}$ (см. [1]).

Функцию Y_n построим как линейную комбинацию $Y_n = P_{n+1} + a_1 P_n + a_2 P_{n-1}$. Подчиняя ее условиям 5 и 7, получим $Y_n = P_{n+1} + \frac{2n+1}{n} P_n + \frac{n+1}{n} P_{n-1}$.

Приближенные решения строятся с использо-

ванием процедуры Рэлея-Ритца. На рис. 9 представлена сходимость приближенного решения и углов поворотов, на рис. 10 – изгибающих и крутящего моментов в зависимости от количества неизвестных, полученных на аналитическом базисе (9) (верхняя шкала) и финитном базисе МКЭ (нижняя шкала). Расчет по МКЭ проводился с использованием четырехугольного элемента с шестнадцатью узловыми неизвестными.

В качестве исходных данных взяты $h=0,1$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,3$, $q=1$ кН.

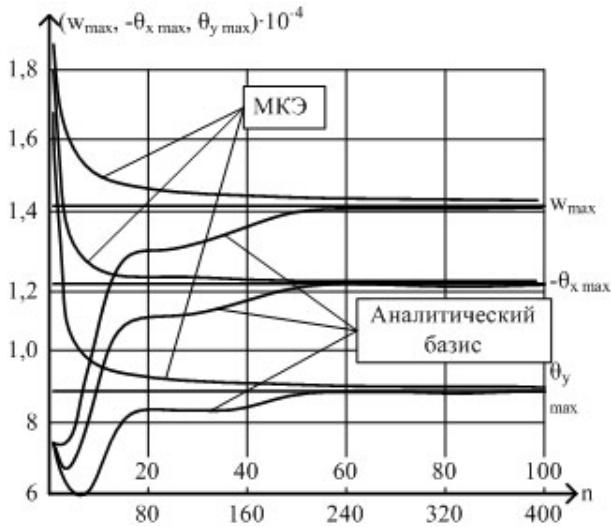


Рис. 9. Сходимость функции и ее первых производных

Приближенные значения максимального прогиба w^N углов поворотов θ_x^N , θ_y^N , изгибающих моментов M_x^N , M_y^N и крутящего M_{xy}^N , определенных с удержанием N неизвестных, сравниваются с соответствующими значениями, вычисленными при $N=400$ с использованием аналитического базиса и $N=25600$ с использованием финитного базиса, которые приведены в табл. 1.

Здесь наблюдается не такая быстрая, как в предыдущих случаях, но тоже достаточно хорошая сходимость самой функции и ее первых производных (углов поворотов). При 100 неизвестных в аналитическом базисе и 400 в финитном погрешность определения указанных функции не превышает 1% от соответствующих значений, приведенных в табл. 1.

С точки зрения прочности здесь важны нормальные и касательные напряжения в наружных слоях пластины, которые пропорциональны изгибающим и крутящему моментам. Сходимость моментов гораздо лучше на базисе (9). Так точность в 5% от соответствующих табличных величин достигается при $N=36$ для момента M_{xy} и $N=100$ для M_y и

M_x на аналитическом базисе. В то время как в МКЭ для определения момента M_{xy} и M_y с указанной точностью необходимо удержать 570 неизвестных, а для момента M_y – 10000.

Таблица 1

Наибольшие значения функций прогиба, углов поворотов и моментов

Функция	Аналитический базис	МКЭ
$w^N \times 10^{-4}$	1,412	1,414
$\theta_x^N \times 10^{-4}$	-1,191	-1,191
$\theta_y^N \times 10^{-4}$	0,8878	0,8884
$M_x^N \times 10^4$	-12,75	-12,50
$M_y^N \times 10^4$	4,839	4,661
$M_{xy}^N \times 10^4$	-3,476	-3,426

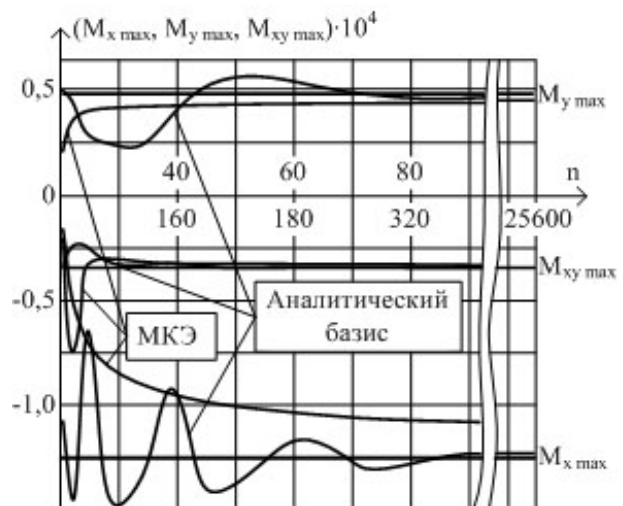


Рис. 10. Сходимость изгибающих и крутящего моментов

Заключение

1. Способ, предложенный в работе [2], позволяет построить для некоторых краевых задач координатные функции, каждая из которых в отдельности удовлетворяет всем крайним условиям. Приближенные решения, построенные на таком базисе, дают достаточно быструю сходимость как самих функций, так и их производных. При этом, если в качестве исходной последовательности функций взяты полиномы Лежандра, то число обусловленности матрицы Рэлея-Ритца ограничено.

2. В случае, когда не удается удовлетворить

всем граничным условиям, решения, построенные на аналитическом базисе, сходятся не так быстро, но лучше чем решения, построенные МКЭ.

3. В дальнейшем представляет интерес применение способа построения базиса к составным конструкциям.

Литература

1. Минтюк В.Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач / В.Б. Минтюк // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. научн. тр. – Х.:

Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2007. – Вып. 35. – С. 143-148.

2. Минтюк В.Б. Способ построения базиса для решения краевых задач в обыкновенных производных вариационными методами / В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5 (41). – С. 32-36.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

4. Даугавет И.К. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.К. Даугавет // Изв. ВУЗов. Математика. – 1958. – № 5 (6). – С. 158-165.

Поступила в редакцию 27.06.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. 102 П.А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ТОЧНІСТЬ, ЗБІЖНІСТЬ І СТІЙКІСТЬ МЕТОДУ РЕЛЕЯ-РІТЦА ПРИ РІЗНИХ БАЗИСАХ

В.Б. Минтюк

Проведено чисельне дослідження точності, збіжності та стійкості наближених вирішень, отриманих методом Релея-Рітца з використанням різних базисів для ряду крайових задач: подовжньо-поперечної вигину балки, задачі Сен-Венана про крутіння вала прямокутного перерізу і задачі вигину прямокутної пластини. Приведено порівняння збіжності наближених вирішень, побудованих на запропонованих раніше автором базисах, а також на власних функціях схожого оператора задачі, степеневих функціях і фінітному базису методу скінчених елементів. Показано, що запропоновані раніше автором базиси, які задовольняють всім граничним умовам, майже ортогональні в енергетичній метриці відповідних операторів і кращими властивостями збіжності, що гарантує стійкість самого вирішення і числової процедури його пошуку.

Ключові слова: базис, крайова задача, точність, збіжність і стійкість наближених розв'язків.

ACCURACY, CONVERGENCE AND STABILITY OF RAYLEIGH-RITZ METHOD FOR DIFFERENT BASES

V.B. Mintyuk

The analysis of Rayleigh-Ritz method considering accuracy, convergence and stability of approximate solutions in different bases for some boundary value problems, namely beam longitudinal-transverse bending, rectangular beam torsion Saint-Venant's problem, and bending of rectangular plate, is presented. Convergence of numerical (approximate) solutions built upon bases proposed earlier by author were compared against those built on eigenfunctions of similar operator, on power functions, and on finite element basis. It is shown that the bases proposed by author those that satisfy all boundary conditions, they are quasi-orthonormal in power metrics of correspondent operators, and have some superior convergence properties providing stability not only to the solution but to the numerical procedure that produces this solution.

Key words: basis, boundary value problem, accuracy, convergence and stability of approximate solution.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.