

УДК 517.958:519.6

С.А. ХАЛИЛОВ, В.Б. МИНТЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ПЛОСКИЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ. ВЫВОД ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены сопряженные пары тензоров напряжений и деформаций плоского геометрически нелинейного изгиба балки. Показано, что наиболее простой вид компонент тензоров напряжений и деформаций имеют компоненты симметричного тензора напряжений Био и тензора деформаций Коши. Уравнения равновесия получены с помощью принципа виртуальной работы и непосредственного рассмотрения равновесия элемента. Введением различных упрощающих предположений из полностью нелинейных соотношений получены различные нелинейные постановки задач вплоть до линейной. Во всех случаях для консервативной внешней нагрузки при справедливости закона Гука получены выражения полной потенциальной энергии, которые можно использовать для проведения численного анализа.

Ключевые слова: балка, плоский изгиб, геометрически нелинейная задача, деформация оси, мера деформации.

Введение

Многие силовые элементы аэрокосмической техники могут быть описаны расчетной моделью балки – одномерным силовым элементом. Эта модель с принятием ряда упрощающих гипотез хорошо изучена и изложена в курсах сопротивления материалов и строительной механики, но полученные здесь результаты неприменимы к силовым элементам, которые в результате деформаций претерпевают значительные перемещения. В этом случае необходимо использовать геометрически нелинейную теорию, которая достаточно хорошо развита [1 – 9]. В геометрически нелинейных задачах в отличие от линейной теории стержней получить решение в замкнутом виде удастся в крайне редких случаях [2 – 4], поэтому используются численные методы, причем даже в этих случаях приходится принимать дополнительные упрощающие предположения.

1. Общие геометрически нелинейные уравнения

Единственным упрощающим предположением является гипотеза Бернулли-Эйлера. На величины перемещений никакие ограничения не накладываются.

Отнесем балку к правой прямоугольной декартовой системе координат: ось OX совмещается с линией центров тяжести сечений балки, ось OZ совпадает с одной из главных осей инерции сечения и лежит в плоскости изгиба.

Рассматривая элемент осевой линии балки dx до и после деформации (рис. 1), из очевидных гео-

метрических соотношений имеем

$$ds^2 = (dx + du)^2 + dw^2,$$

т.е.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon_0 = u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2, \quad \left(f' \equiv \frac{df}{dx}\right); \quad (2)$$

s – дуговая координата;

u , w – функции перемещений точек осевой линии вдоль оси X и Z соответственно,

$$\cos \varphi = \frac{dx + du}{ds} = \frac{1 + u'}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_0}},$$

$$\sin \varphi = \frac{dw}{ds} = \frac{w'}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_0}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{du} = \frac{w'}{1 + u'}.$$

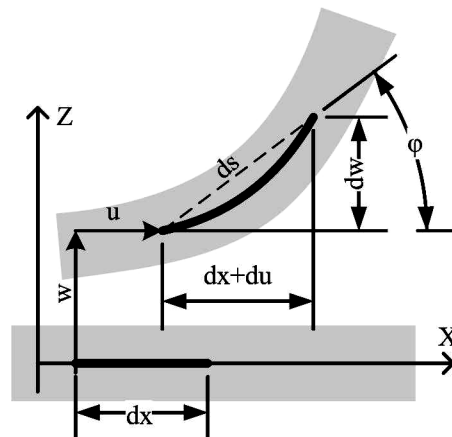


Рис. 1. Перемещения точек осевой линии балки

Производная от угла поворота (например, из третьего соотношения (3)) определяется выражением

$$\varphi' = \frac{((1+u')w'' - u''w')}{1+2\varepsilon_0}, \quad (4)$$

или с учетом первых двух соотношений (3)

$$\varphi' = \frac{(w'' \cos \varphi - u'' \sin \varphi)}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}}. \quad (5)$$

Теперь, принимая во внимание гипотезу Бернулли-Эйлера, можно определить координаты произвольной точки $A'(\tilde{x}, \tilde{z})$, которая до деформации имела положение $A(x, z)$, следующим образом (рис. 2):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + u - z \sin \varphi; \\ \tilde{z} &= z + z \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

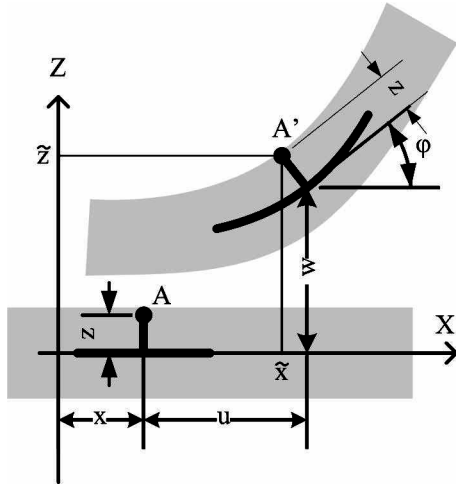


Рис. 2. Координаты произвольной точки до и после деформации

В двумерном евклидовом пространстве введем тензор “градиента движения”¹ [5, 6] с элементами

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \mathbf{ii} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \mathbf{ik} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \mathbf{ki} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \mathbf{kk},$$

где \mathbf{i}, \mathbf{k} – единичные орты вдоль осей $0X$ и $0Z$.

Преобразование (6) приводит к следующему виду компонент тензора \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = (1 + \varepsilon) \cos \varphi \mathbf{ii} + (1 + \varepsilon) \sin \varphi \mathbf{ik} - \sin \varphi \mathbf{ki} + \cos \varphi \mathbf{kk}, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\varepsilon_0} - 1 - z\varphi'. \quad (8)$$

С помощью тензора градиента движения метрический тензор деформированного состояния $\mathbf{G} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$.

Полярное разложение тензора градиента дви-

жения определяет симметричный тензор удлинений и тензор поворота

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}; \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{F} \cdot \Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение относительного изменения элементарного объема имеет вид

$$D = \frac{d\tilde{V}}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 = 1 + \varepsilon, \quad (10)$$

где $dV, d\tilde{V}$ – объем элемента тела до и после деформации;

λ_1, λ_2 – главные значения тензора Λ .

С учетом принятой гипотезы из всех компонент тензора истинных напряжений Коши Σ в связанной системе координат ненулевой является одна, равная нормальному напряжению σ .

Условие инвариантной записи виртуальной элементарной работы внутренних сил в виде

$$\delta W = \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E}, \quad (11)$$

где δ – знак вариации, $\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E}$ – свертка тензора напряжений с тензором вариации деформаций, приводит к сопряженным парам этих тензоров [5, 6] (табл. 1).

Таблица 1
Сопряженные пары тензоров

№ п/п	Тензор напряжений \mathbf{T}	Тензор деформаций \mathbf{E}
1	$\mathbf{F}^{-1} \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{F}^{-1T}$ второй тензор Пиола-Кирхгофа	$\frac{1}{2}(\Lambda^2 - 1)$ (Грина)
2	$\mathbf{F}^T \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{F}$	$\frac{1}{2}(1 - \Lambda^{-2})$ (Альманзи)
3	$\mathbf{Q}^T \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{Q}$	$\ln \Lambda$ (Генки)
4	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{F}^{-1T})$ симметричный тензор Био	$\Lambda - 1$ (Коши)
5	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \cdot D \Sigma \cdot \mathbf{F})$	$1 - \Lambda^{-1}$ (Кёрбера-Свейнга)

Тензоры, приведенные в табл. 1, имеют в связанной системе координат только одну ненулевую компоненту. Для каждого тензора табл. 1 они приведены соответственно в табл. 2.

Как видно из табл. 2, наиболее удобной парой, оставляющей деформацию плоской, является симметричный тензор напряжений Био [9] и тензор деформации Коши, приведенные в четвертой строке табл. 1.

В любом случае принцип виртуальной работы имеет вид

¹ В [5] употребляется термин “градиент деформации”, иногда “градиент места”.

$$\delta A = \int_V \sigma \delta \varepsilon dV - \int_l (p_x \delta u + p_y \delta w) dx = 0, \quad (12)$$

где δA – вариация работы внутренних и внешних сил; V, l – объем и длина балки до деформации; p_x и p_z – проекции внешних, в данном случае консервативных, сил на соответствующие оси; они могут представлять собой суммы обобщенных функций.

Таблица 2

Компоненты тензоров

№ п/п	Ненулевая компонента тензора	
	напряжений T	деформаций E
1	$\sigma(1+\varepsilon)^{-1}$	$\varepsilon + \varepsilon^2/2$
2	$\sigma(1+\varepsilon)^3$	$\varepsilon(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-2}$
3	$\sigma(1+\varepsilon)$	$\ln(1+\varepsilon)$
4	σ	ε
5	$\sigma(1+\varepsilon)^2$	$\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$

С учетом выражения деформации (8) после интегрирования по площади поперечного сечения F принцип виртуальной работы (12) принимает вид

$$\int_l \frac{N}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \delta \varepsilon_0 dV - \int_l M \delta \varphi' dV - \int_l (p_x \delta u + p_y \delta w) dx = 0,$$

где введены обозначения: $N = \int_F \sigma dF$ – продольная сила, $M = \int_F z \sigma dF$ – изгибающий момент.

Проинтегрировав второе слагаемое по частям $\int_l M \delta \varphi' dx = M \delta \varphi|_0^l - \int_l M' \delta \varphi dx$, с учетом выражений для вариаций деформации оси (2)

$$\delta \varepsilon_0 = (1+u') \delta u' + w' \delta w'$$

и угла поворота по одному из соотношений (3)

$$\delta \varphi = \frac{(\delta w' \cos \varphi - \delta u' \sin \varphi)}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}}$$

выражение вариации работы внутренних сил принимает вид

$$\int_l \left[N \cos \varphi - \frac{M' \sin \varphi}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \right] \delta u' dx + \int_l \left[N \sin \varphi + \frac{M' \cos \varphi}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \right] \delta w' dx - M \delta \varphi|_0^l.$$

Избавляясь от производных под знаком вариации путем интегрирования по частям и считая вариации функций перемещений произвольными и независимыми, окончательно получим уравнения равновесия

$$\begin{cases} \left(N \cos \varphi - \frac{M'}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \sin \varphi \right)' = -p_x; \\ \left(N \sin \varphi + \frac{M'}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \cos \varphi \right)' = -p_z, \end{cases} \quad (13)$$

естественные граничные условия при $x = 0$ и $x = l$

$$N \cos \varphi - \frac{M'}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \sin \varphi = 0;$$

$$N \sin \varphi - \frac{M'}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} \cos \varphi = 0; \quad (14)$$

$$M = 0$$

и соответствующие им главные граничные условия $u = \bar{u}, w = \bar{w}, \varphi = \bar{\varphi}$.

Здесь $\bar{u}, \bar{w}, \bar{\varphi}$ – заданные значения соответствующих перемещений и угла поворота на границе.

Те же уравнения равновесия можно получить непосредственно (рис. 3) с учетом того, что

$$\cos(\varphi + d\varphi) = \cos \varphi - d\varphi \sin \varphi,$$

$$\sin(\varphi + d\varphi) = \sin \varphi + d\varphi \cos \varphi.$$

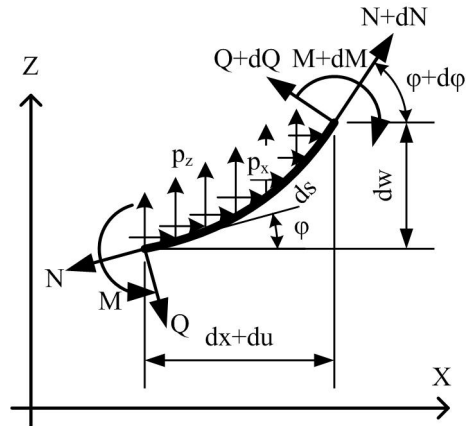


Рис. 3. Равновесие элемента

Уравнения равновесия в проекциях и моментные уравнения получаются такими:

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' = -p_x; \\ (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' = -p_z; \\ M' = Q \sqrt{1+2\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (15)$$

Исключая с помощью третьего уравнения (15) поперечную силу Q , приходим к уравнениям (13).

Все приведенные выкладки сделаны безотносительно к уравнениям состояния, связывающим напряжения и деформации. Далее для замыкания системы уравнений теории упругости принимается закон Гука для изотропного материала

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (16)$$

где E – модуль Юнга.

Противоречия, возникающие с принятием данного закона и гипотезы Бернулли-Эйлера, разрешаются путем надления материала гипотетическими свойствами: коэффициент Пуассона $\mu = 0$ и модуль сдвига $G = \infty$.

С учетом закона Гука (16) и выражения деформации (8) продольную силу и момент можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N &= EF(\sqrt{1+2\varepsilon_0} - 1); \\ M &= -EI\varphi', \end{aligned} \quad (17)$$

где I – момент инерции сечения.

Таким образом, задача нелинейного изгиба балки с учетом деформирования оси сводится к интегрированию двух уравнений (13) с граничными условиями (14) с учетом значений внутренних сил (17), тригонометрических функций (3), значений φ' (4) и ε_0 (2). Для привлечения прямых методов необходимо иметь выражение полной потенциальной энергии, которое для четвертой пары сопряженных тензоров из табл. 1 принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV - \int_1 [p_z w + p_x u] dx.$$

С учетом закона Гука (16) и выражения для деформации (8) предыдущее равенство можно записать как

$$\begin{aligned} U &= \int_1 EF(1 + \varepsilon_0 - \sqrt{1+2\varepsilon_0}) dx + \frac{1}{2} \int_1 EI(\varphi')^2 dx - \\ &\quad - \int_1 [p_z w + p_x u] dx. \end{aligned} \quad (18)$$

При необходимости значение кривизны осевой линии следует вычислять по следующей формуле:

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varphi'}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} = \frac{(1+u')w'' - w'u''}{((1+u')^2 + (w')^2)^{3/2}}. \quad (19)$$

Как видно из приведенной формулы, на величину кривизны оказывает влияние деформации оси.

2. Упрощение 1. Малость деформаций

Наибольшая деформация, которая может возникнуть в упругом материале, составляет σ_y / E , где σ_y – предел упругости. Для подавляющего большинства материалов эта величина не превышает 1%. Поэтому величиной деформации в сравнении с единицей можно пренебречь ($\varepsilon_0 \ll 1$), другими словами – можно пренебречь влиянием удлинения или укорочения оси балки на угол поворота и кривизну, но сама деформация оси $\varepsilon_0 \neq 0$. С учетом сказанного изложенные в п. 1 соотношения можно упростить.

Соотношения (3) и (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 + u'; \\ \sin \varphi &= w'; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{w'}{1+u'}; \\ \varphi' &= (1+u')w'' - u''w'. \end{aligned} \quad (20)$$

В выражении деформации (8) величина $\sqrt{1+2\varepsilon_0} - 1$ представляет собой малую разность больших чисел. После разложения этой величины в ряд Тейлора в окрестности нуля с удержанием одного слагаемого получим выражение деформации

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - z\varphi'. \quad (21)$$

Упрощенные уравнения равновесия (13) и граничные условия (14) можно также получить из принципа виртуальной работы (12), принимая деформацию в виде (21)

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - M' \sin \varphi)' = -p_x; \\ (N \sin \varphi + M' \cos \varphi)' = -p_z, \end{cases} \quad (22)$$

$$[N \cos \varphi - M' \sin \varphi]_{x=0,1} = 0 \quad \text{или} \quad u = \bar{u};$$

$$[N \sin \varphi + M' \cos \varphi]_{x=0,1} = 0 \quad \text{или} \quad w = \bar{w}; \quad (23)$$

$$M|_{x=0,1} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \bar{\varphi}.$$

Здесь

$$N = EF\varepsilon_0 = EF \left[u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \right]; \quad (24)$$

$$M = -EI\varphi' = -EI[(1+u')w'' - w'u'']. \quad (24)$$

Упрощенное выражение потенциальной энергии можно получить из (18), но при разложении в ряд Тейлора величины $\sqrt{1+2\varepsilon_0}$ в окрестности единицы необходимо удерживать как минимум квадратичное слагаемое, что приводит к равенству

$$U = \frac{1}{2} \int_1 EF\varepsilon_0^2 + EI(\varphi')^2 dx - \int_1 [p_z w + p_x u] dx. \quad (25)$$

3. Упрощение 2. Эластика Эйлера

Не накладывая никаких ограничений на величины перемещений и угла поворота, но считая в отличие от предыдущего упрощения деформацию оси нулевой ($\varepsilon_0 = 0$) приходим к уравнениям, описывающим эластику Эйлера.

Эти уравнения достаточно хорошо изучены, например, в работах [2–4].

Используя условие

$$\varepsilon_0 = u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 = 0, \quad (26)$$

можно исключить одну из функций u или w . Если исключить функцию u , то получим

$$u = \int_0^x \sqrt{1-(w')^2} d\xi - x + C_u;$$

$$\sin \varphi = w'; \quad \cos \varphi = \sqrt{1-(w')^2}; \quad (27)$$

$$\varphi' = \frac{w''}{\cos \varphi},$$

где C_u – константа, определяющая смещение балки вдоль оси OX как жесткого целого.

Деформация (8) в этом случае принимает вид

$$\varepsilon = -z\varphi'. \quad (28)$$

Принцип виртуальной работы, где вариация перемещения u с помощью первого соотношения (27) запишется как

$$\delta u = \delta \left[\int_0^x \sqrt{1-(w')^2} d\xi - x + C_u \right] = \int_0^x \operatorname{tg} \varphi \delta w' d\xi,$$

приводит к одному уравнению равновесия

$$\left(\frac{M'}{\cos \varphi} \right)' = -q_z + \left(\int_x^1 q_x d\xi \operatorname{tg} \varphi \right)' \quad (29)$$

и набору граничных условий при $x = 0$ и $x = 1$

$$M = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = \bar{\varphi};$$

$$M' - \sin \varphi \int_0^x q_x dx = 0 \quad \text{или} \quad w = \bar{w}. \quad (30)$$

Здесь M определяется по следующей формуле:

$$M = -EI\varphi' = -EI \frac{w''}{\cos \varphi}.$$

Уравнение равновесия (29) можно получить, если в полностью нелинейных уравнениях (13) положить $\varepsilon_0 = 0$, первое уравнение один раз проинтегрировать, умножить на $\operatorname{tg} \varphi$, продифференцировать и сложить со вторым.

Полная потенциальная энергия в случае эластики Эйлера принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \int_1^x EI \frac{(w'')^2}{1-(w')^2} dx - \int_1^x \left\{ q_z w + q_x \left[\int_0^x \sqrt{1-(w')^2} d\xi - x + C_u \right] \right\} dx. \quad (31)$$

Если с помощью соотношения (26) исключить функцию w

$$w = \int_0^x \sqrt{-u'(2+u')} d\xi + C_w,$$

то аналогичные рассуждения приводят к соотношениям

$$\sin \varphi = \sqrt{-u'(2+u')}; \quad \cos \varphi = 1+u';$$

$$\varphi' = -\frac{u''}{\sin \varphi}, \quad (32)$$

краевой задаче

$$\left(\frac{M'}{\sin \varphi} \right)' = q_x - \left(\int_x^1 q_z d\xi \operatorname{ctg} \varphi \right)';$$

$$M|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad \varphi = \bar{\varphi}; \quad (33)$$

$$\left[M' - \cos \varphi \int_0^x q_x dx \right]_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad u = \bar{u};$$

$$M = -EI\varphi' = EI \frac{u''}{\sin \varphi}$$

и выражению полной потенциальной энергии

$$U = -\frac{1}{2} \int_1^x EI \frac{(u'')^2}{u'(2+u')} dx - \int_1^x \left\{ q_x u + q_z \left[\int_0^x \sqrt{-u'(2+u')} d\xi + C_w \right] \right\} dx. \quad (34)$$

4. Упрощение 3. Гибкая нить

Некоторые расчетные схемы (нити, цепи, канаты и др.) допускают пренебрежение изгибной жесткостью ($EI = 0$).

В этом случае приходим к известной математической модели, где геометрические соотношения имеют вид (2), (3), (4), а уравнения равновесия и граничные условия из (13), (14) при $M \equiv 0$ записываются так:

$$\begin{cases} (N \cos \varphi)' = -p_x; \\ (N \sin \varphi)' = -p_z; \\ [N \cos \varphi]_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad u = \bar{u}; \\ [N \sin \varphi]_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad w = \bar{w}. \end{cases} \quad (35)$$

Продольная сила N определяется, как и в (17).

Полная потенциальная энергия из (18) при $EI \equiv 0$ дается равенством

$$U = \int_1^x EF \left(1 + \varepsilon_0 - \sqrt{1 + 2\varepsilon_0} \right) dx - \int_1^x [p_z w + p_x u] dx. \quad (36)$$

5. Упрощение 4. Квадратичное приближение

Следующий уровень упрощения нелинейных соотношений, предшествующий полной линеаризации, состоит в предположении, что квадраты углов поворота соизмеримы с деформациями, а деформации много меньше единицы (отсюда термин "квадратичное приближение").

Разрешающие соотношения можно получить из соотношений п. 2, где принималось только предположение малости деформаций.

Если $\varphi^2 \sim \varepsilon$, то $\sin^2 \varphi = (w')^2 \sim \varepsilon$. Анализ выражения для деформации оси

$$\varepsilon_0 = u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \ll 1$$

показывает, что $u' \sim (w')^2$, а $(u')^2 \sim \varepsilon^2$ и им можно пренебречь.

В выражении производной угла поворота (четвертое соотношение (20)) $u' \ll 1$, $u'' \sim w'w''$, $u''w' \sim (w')^2 w''$, т.е., придерживаясь указанной степени точности, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= u' + \frac{1}{2}(w')^2; \\ \varphi' &= w''; \\ \varepsilon &= u' + \frac{1}{2}(w')^2 - zw''. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнения равновесия и граничные условия, получаемые в этом случае из принципа виртуальной работы

$$\delta A = \int_1 [N(\delta u' - w'\delta w') - M\delta w'' + q_x \delta u + q_z \delta w] dx$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} N' = q_x; \\ (Nw')' - M'' = q_z; \end{cases} \\ N|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad u = \bar{u}; \\ [Nw' + M']_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad w = \bar{w}; \\ M|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad w' = \bar{w}', \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} N &= EF\varepsilon_0 = EF \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]; \\ M &= -EI\varphi' = -EIw''. \end{aligned} \quad (39)$$

Полная потенциальная энергия по соотношениям (37) дается равенством

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_1 \left[EF \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right)^2 + EI(w'')^2 \right] dx - \\ &\quad - \int_1 [p_z w + p_x u] dx. \end{aligned} \quad (40)$$

6. Упрощение 5. Линеаризованные уравнения

Считая деформации и углы поворота малыми в сравнении с единицей, а перемещения малыми в сравнении с характерным размером поперечного сечения балки, приходим к линейной теории

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \varphi = w'; \quad \cos \varphi = 1; \\ \varphi' &= w''. \end{aligned} \quad (41)$$

Деформации определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= u'; \\ \varepsilon &= u' - zw''. \end{aligned} \quad (42)$$

Общеизвестные уравнения равновесия, граничные условия и потенциальная энергия принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} N' = q_x; \\ M'' = -q_z; \end{cases} \\ N|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad u = \bar{u}; \\ M'|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad w = \bar{w}; \\ M|_{x=0,1} = 0 \quad \text{è è è} \quad w' = \bar{w}'; \\ U = \frac{1}{2} \int_1 [EF(u')^2 + EI(w'')^2] dx - \\ - \int_1 [p_z w + p_x u] dx. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N &= EFu'; \\ M &= -EIw''. \end{aligned} \quad (45)$$

Уравнения равновесия при исследовании устойчивости продольно сжатого стержня можно записать, используя подход Тимошенко или Брайана. Уравнение в форме Тимошенко получим, линеаризовав уравнения эластики Эйлера (29) или (33), используя равенства (41) и (45)

$$EIw^{IV} = - \left(w' \int_x^1 q_x d\xi \right)'. \quad (46)$$

Уравнение равновесия в форме Брайана – это второе уравнение квадратичного приближения (38), где исходное состояние определяется первым уравнением. Формулы для продольной силы и изгибающего момента необходимо взять в виде (45).

Заключение

1. Показано, что из сопряженных пар тензоров напряжений и деформаций наиболее простой вид имеют компоненты симметричного тензора напряжений Био и тензора деформаций Коши. Это упрощает составление выражения полной потенциальной энергии, условие минимума которой при использовании численных процедур, будет полностью соответствовать уравнениям равновесия. Другие меры деформаций для данной задачи, в том числе и наиболее часто используемая мера Грина приводят к тому, что, хотя и принята гипотеза Бернулли-Эйлера, деформация и напряжение в сечении уже не изменяются по закону плоскости.

2. При решении практически важных задач весьма часто нет необходимости исходить из общих нелинейных уравнений, полученных в п. 1. Поэтому

при вычислениях следует использовать упрощенные теории различных уровней. Эти пять теорий получены последовательно в зависимости от степени принимаемых упрощений.

3. Выбор тех или иных упрощенных теорий во многом зависит от цели исследования и каждый раз должен быть строго обоснован, для чего нужны, конечно же, численные исследования. Этим исследованиям будет посвящена следующая работа авторов.

Литература

1. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожиллов. – Л.; М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

2. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – К.: Наук. думка, 1979. – 216 с.

3. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.

4. Светлицкий В.А. Механика стержней: в 2 ч. Ч. 1. Статика / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.

5. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К.Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986. – 336 с.

6. Хилл Р. Об определяющих неравенствах для простых материалов / Р. Хилл // Механика : периодический сборник переводов иностранных статей. – М.: Мир, 1969. – Вып. 4(116). – С. 94 – 109.

7. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

8. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

9. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations / Maurice A. Biot. – NY/London/Sydney: Wiley@Sons, Inc., 1965. – 504 p.

Поступила в редакцию 25.01.2011

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ПЛОСКИЙ НЕЛІНІЙНИЙ ВИГІН БАЛКИ. ВІВЕДЕННЯ ЗАМКНУТОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

С.А. Халілов, В.Б. Минтюк

Розглянуто спряжені пари тензорів напружень і деформацій плоского геометрично нелінійного вигину балки. Показано, що найбільш простий вигляд компонент тензорів напружень і деформацій мають компоненти симетричного тензора напружень Біо і тензора деформацій Коші. Рівняння рівноваги отримані за допомогою принципу віртуальної роботи та безпосереднього розгляду рівноваги елемента. Введенням різних спрощуючих припущень з повністю нелінійних співвідношень отримані різні нелінійні постановки задач, які завершено лінійними. У всіх випадках для консервативного зовнішнього навантаження при справедливості закону Гука отримано вирази повної потенціальної енергії, які можна використовувати для проведення числового аналізу.

Ключові слова: балка, плоский вигин, геометрично нелінійна задача, деформація осі, міра деформації.

SIMPLE NON-LINEAR BENDING OF A BEAM. DERIVATION OF CLOSED LOOP EQUATIONS SET

S.A. Khalilov, V.B. Mintyuk

Matched pairs of stress and strain tensors of simple geometrical nonlinear bending of a beam are considered. It is shown that the simplest appearance for tensor components occurs when Biot stress tensor and Cauchy strain tensor are used. Equilibrium equations are obtained using the principle of virtual work and free body diagram of the elementary portion of the beam. Applying different simplifying assumptions to the completely nonlinear relationships a variety of nonlinear formulations of the problem is derived (as far as linear formulation). Assuming that Hooke's law is valid and the external loading is conservative the formula for strain energy is gained which may be used for numerical analysis.

Keywords: beam, simple bending, geometrically nonlinear problem, deformation of axis, measure of strain.

Халілов Сявуш Ахмедович – старший научный сотрудник кафедры высшей математики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.