

УДК 532.522.2

Ю.В. ГИРЬКА, Ю.А. КРАШАНИЦА

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ВЯЗКОЙ СТРУИ С НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

*На базе оригинального аппарата векторно-тензорного анализа получены обобщения интегралов дифференциальных законов сохранения, а также интегральные представления решений полной системы уравнений Навье-Стокса, позволившие построить математическую модель течения вязкой струи над твердой криволинейной поверхностью с наличием свободной границы с заданным набегающим потоком. Созданная математическая модель представляет собой замкнутую систему граничных уравнений относительно искомым характеристик течения и взаимодействия. Решение этой задачи имеет практическое применение в ряде проблем аэрогидродинамики летательных аппаратов и их частей, в частности, таких как эффект Коанда и энергетическая механизация несущих систем.*

**Ключевые слова:** вязкая струя, эффект Коанда, система уравнений Навье-Стокса, система граничных интегральных уравнений, распределенные кинематические и динамические характеристики.

**Введение**

Течение вязкой струи вблизи твердой поверхности раздела создает ряд эффектов. Один из них – эффект Коанда. Этот пример взаимодействия вязкого потока и поверхности находит крайне широкое применение как в авиации, так и в различных областях жизнедеятельности человека:

- в авиации происходят попытки использования его для создания дополнительной подъемной силы [1-3];
- в вентиляции для прилипания холодной струи к потолку [4];
- в гидрологии для прилипания струи к дамбе [5].

Еще один пример возможного применения вязких струй, это изменение обтекания несущих поверхностей – струйный закрылок [6].

Изучением и исследованием вязких струй начали заниматься сравнительно недавно [7-10], но существуют особенности таких течений, которые не до конца изучены и сейчас.

Методы исследования течения вязких струй различны, но большинство современных исследователей используют для этих целей возможности вычислительной гидромеханики (CFD) [5, 11, 12].

**1. Постановка задачи**

В современной практике наряду с физическим экспериментом широкое распространение получил опережающий эксперимент с использованием методов вычислительной гидромеханики. Все они построены на численном решении дифференциальных форм системы уравнений Навье-Стокса.

Существует большое количество апробирован-

ных методов решения уравнений вычислительной гидромеханики, но все они дают удовлетворительный результат, только для тех классов задач, для которых они были разработаны.

Наиболее общий вид задачи представляет собой систему дифференциальных уравнений законов сохранения механики жидкости и газа [9]. Так как в данной задаче рассматривается вязкая несжимаемая струя газа (инерционными силами можно пренебречь), то систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} (\nabla, \mathbf{V}) = 0; \\ (\nabla, (\mathbf{V}, \rho \mathbf{V})) = (\nabla, \mathbf{T}). \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  – поле скоростей,  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений.

В (1) тензор напряжений  $\mathbf{T}$  зависит, как от давления, так и от вектора скорости:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{I}p + \mu \nabla \mathbf{V}, \quad (2)$$

где  $p$  – скалярное давление,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости, а  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

На данном этапе исследования рассматривается плоская задача, т.е. будем иметь дело с криволинейной несущей поверхностью бесконечного размаха. В расчетной схеме она представлена кривой  $L_T$  (рис. 1). Эта кривая задается любым способом с необходимыми дифференциальными свойствами. Граница струи и невозмущенного потока обозначена  $L_B$ . Выходное сечение струи из расчетной области –  $\Sigma$ .

Для получения искомого решения нам необходимо найти давление –  $p$  и завихренность –  $\Omega$  ( $\omega_z$  для двумерной задачи) на границе  $L_T$ . При этом на этой границе существует следующее граничное условие:

$$\mathbf{V}|_{L_T} = 0. \quad (3)$$

На границе  $L_B$  выполняется граничное условие равенства давления струи и невозмущенного потока:

$$p|_{L_B} = p_\infty. \quad (4)$$

При этом геометрия границы  $L_B$  должна определяться в процессе решения задачи. В нулевом приближении она строится эквидистантно границе  $L_T$ . При дальнейших приближениях граница определяется по определению граничной линии тока.

На границе  $L_0$  предполагается известным распределение скорости:

$$V|_{L_0} = V_0(r), \quad (5)$$

а в области течения струи ( $\tau$ ) сохраняется постоянным расход, как это следует из первого уравнения системы (1):

$$\int_{(L_0)} V_n dl = - \int_{(\Sigma)} V_n dl. \quad (6)$$

На границе выхода струи  $\Sigma$  кинематические параметры вязкой струи: нормальная составляющая вектора скорости -  $V_n$ , скалярная завихренность -  $\omega_z$  и давление  $p$  - являются искомыми.

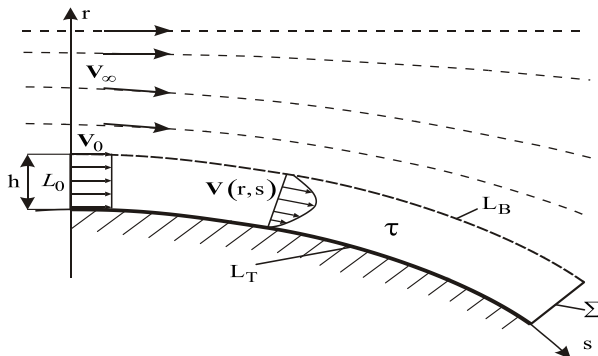


Рис. 1. Расчетная схема течения струи вблизи поверхности раздела

## 2. Интегральные представления решений

Применение векторно-тензорных операций позволяет выписать закон сохранения импульса в консервативной форме, которая широко используется в мировой практике вычислительной аэрогидродинамики [13, 14]:

$$\begin{aligned} & \left( \nabla, \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \frac{p}{\rho} - v\nabla\mathbf{V} \right\} \right) \equiv \\ & \equiv \left( \nabla, \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \frac{p}{\rho} + v[\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] \right\} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Консервативная форма закона сохранения допускает введение векторного потенциала:

$$\mathbf{V}\mathbf{V} + \frac{p}{\rho} - v\nabla\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}\mathbf{V} + \frac{p}{\rho} + v[\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] = \nabla^* \Psi, \quad (8)$$

где векторный потенциал  $\Psi$  принадлежит к классу решений базового уравнения основной задачи векторного анализа,  $\mathbf{V}\mathbf{V}$  – диада, а оператор  $\nabla^*$  является сопряженным оператору  $\nabla$ :

$$\left( \nabla, \nabla^* \Psi \right) \equiv \nabla(\nabla, \Psi) = 0. \quad (9)$$

Кроме этого, консервативная форма уравнения сохранения импульса в форме Громеки-Лэмба [9] позволяет, аналогично (8), ввести векторный потенциал  $\Phi$ :

$$[\mathbf{I}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}]] - v\nabla\mathbf{\Omega} = \nabla^* \Phi, \quad (10)$$

который является решением уравнения вида (9):

$$\left( \nabla, \nabla^* \Phi \right) \equiv \nabla(\nabla, \Phi) = 0. \quad (11)$$

Исходя из обобщенных формул Грина, применяя классический процесс выделения особой точки, с учетом известных свойств потенциала двойного слоя  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ , имеем интегральное представление решения оператора  $\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \nabla q$  для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  в плоской контрольной области с границей  $(L) \equiv (L_0 + L_T + L_B + \Sigma)$  (Рис. 1).

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = & - \iint_{(\tau)} (\nabla q, \mathbf{\Gamma}) d\tau + \\ & + \oint_{(L)} \left\{ \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} + [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}]] - \mathbf{n}, (\nabla, \mathbf{a}) \right\}, \mathbf{\Gamma} \right\} dl - \\ & - \oint_{(L)} \left\{ \mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} \right\} dl, \end{aligned} \quad (12)$$

где тензор  $\mathbf{\Gamma}$  – фундаментальное решение уравнений (9-11) [14].

В простейшем случае движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости при отсутствии источников массы в области, отсюда имеем интегральное представление, например, вектора скорости

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \oint_{(L)} \left\{ \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} + [\mathbf{n}, \mathbf{\Omega}] \right\}, \mathbf{\Gamma} \right\} dl - \oint_{(L)} \left\{ \mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} \right\} dl \quad (13)$$

и вектора завихренности

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}) = \oint_{(L)} \left\{ \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial n} + [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Omega}]] \right\}, \mathbf{\Gamma} \right\} dl - \oint_{(L)} \left\{ \mathbf{\Omega}, \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} \right\} dl \quad (14),$$

где нормальные производные кинематических характеристик  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial n}$  в представлениях (13 и 14)

определяются обобщенными потенциалами из выражений (8 и 10), а контурные интегралы в уравнениях допускают численную реализацию в силу их принадлежности к классу сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью.

## Выводы

Поставленная задача является актуальной для

исследований эффектов возникающих при взаимодействии вязкой струи газа и твердой поверхности раздела. Например, использование эффекта Коанда в авиации для создания дополнительной подъемной силы, как на традиционных летательных аппаратах, так и на перспективных схемах беспилотных летательных аппаратах.

Разработана оригинальная схема решения поставленной задачи с переменной геометрией одной из границ.

Рассмотренная двумерная задача может быть распространена и на случай трехмерного взаимодействия вязкой струи с криволинейной поверхностью раздела.

### Литература

1. Семенов, А.С. Применение эффекта Коанда. Часть 1. Авиация [Текст] / А.В. Долгал, А.С. Семенов // Студенческий форум: международная студенческая электронная научная конференция, 15 фев. – 31 мар. 2012 г.: тез. докл.
2. Тактический военно-транспортный самолёт Ан-72 [Текст] // Авиация и космонавтика. – 2003. – №8. – С. 38-39.
3. Investigating the Use of the Coanda Effect to Create Novel Unmanned Aerial Vehicles [Text] / C. Barlow, D. Lewis, S.D. Prior, S. Odedral, M. Erbil, M. Karamanoglu, R. Collins // Proceedings of the International Conference on Manufacturing Engineering Systems, 16-18 December; Southern Taiwan University, Tainan, Taiwan. – P. 270-275. ISSN: 2152-1522.
4. PIV measurements and analysis of transitional flow in a reduced-scale model: ventilation by a free plane jet with Coanda effect [Text] / T. Hooff, B. Blocken, T. Defraeye, J. Carmeliet, G.J.F. Heijst // Building and environment. – 2012. – Vol. 56. – P. 301-313.
5. Wahl, T.W. Laboratory testing and numerical

modeling of Coanda-effect screens [Text] / T.W. Wahl, R.F. Einhellig // Conference on Water Resources Engineering and Water Resources Planning & Management, July 30 - August 2, 2000 – Minneapolis, Minnesota. – P.232-241.

6. Крашаница, Ю.А. Нелинейная задача о тонком профиле со струйным закрылком [Текст] / Ю.А. Крашаница, Ф.А. Мохаммед // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины; Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – X. – 2003. – Вып. 19. – С. 28–33.

7. Вулис, Л.А. Теория струй вязкой жидкости [Текст] / Л.А. Вулис, В. П. Каушаров. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

8. Гиневский, А.С. Теория турбулентных струй и следов [Текст] / А.С. Гиневский. – М.: Машиностроение, 1969. – 400 с.

9. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

10. Коробко, В.И. Теория неавтономных струй вязкой жидкости [Текст] / В.И. Коробко. – Саратов: из-во Сарат. ун-та, 1977. – 216 с.

11. Miozzi, M. Experimental investigation of a free-surface turbulent jet with Coanda effect [Text] / M. Miozzi, F. Lalli, G. P. Romano // Experiments in Fluids. – 2010. – № 49. – P. 341-353.

12. Dragan, V. Numerical investigations of Coanda lift on a double curvature supercirculated ramp / V. Dragan [Text] // International Journal of civil and structural engineering. – 2011. – Vol.2. – P. 241-248.

13. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н.Е. Кочин. – М.: АН СССР, 1961. – 427 с.

14. Крашаница, Ю.А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) [Текст] / Ю.А. Крашаница // Вісник Дніпропетровського університету. – 2000. – Т. 1, вып.3. – С. 52 – 56.

Поступила в редакцию 12.07.2012

**Рецензент:** д-р физ.-мат наук, проф., зав. отделом гидродинамики волновых процессов И.Т. Селезов, Институт гидромеханики НАН Украины.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ В'ЯЗКОЇ СТРУМИНИ З КРИВОЛІНІЙНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Ю.В. Гирька, Ю.О. Крашаница

На базі оригінального апарату векторно-тензорного аналізу отримані узагальнені інтегралів диференціальних законів збереження, а також інтегральне зображення рішень повної системи рівнянь Нав'є-Стокса, що дозволили побудувати математичну модель течії в'язкого струменю понад твердою криволінійною поверхнею з наявністю криволінійної вільної границі з потоком, що набігає. Створена математична модель представляє собою замкнену систему граничних рівнянь відносно характеристик течії, що визначаються, та взаємодії. Рішення цієї задачі має практичне застосування у ряді проблем аерогідродинаміки літальних апаратів та їх частин, зокрема, таких як ефект Коанда та енергетична механізація несучих поверхонь.

**Ключові слова:** в'язкий струмінь, система рівнянь Нав'є-Стокса, ефект Коанда, розподілені кінематичні та динамічні характеристики, система граничних інтегральних рівнянь.

### RESEARCHES OF WING AERODYNAMIC CHARACTERISTICS IN THE ENVIRONMENT DIVISION PLANE

Y.V. Girka, Y.A. Krashantsa

The generalization of integrals of conservation differential equations was obtained with help of original apparatus of vector-tensor analysis. This result and Navier–Stokes integral equations allowed develop mathematical model of viscosity flow including jets above solid surface. There is undisturbed flow which border with jet. The mathematical model is closed system of boundary equations which composed relative searching characteristics of the flow. Solving of the problem has practice use in a number of aerodynamic aspects of vehicles and their parts. There are Coanda effect and energetic mechanization of carrying system.

**Key words:** viscosity jet, Navier–Stokes equations, Coanda effect, distribution of kinematic and dynamic characteristics, system of boundary integral equations.

**Гирька Юрій Владимирович** - науч. сотр. Проблемной НИЛ аэрогидродинамики и акустики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

**Крашаница Юрий Александрович** – главн. научн. сотр., д-р техн. наук, профессор кафедры аэрогидродинамики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков