

УДК 539.3

А. Г. НИКОЛАЕВ, Е. А. ТАНЧИК

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

УПРУГОЕ ПРОСТРАНСТВО С ЧЕТЫРЬМЯ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

В работе предложен эффективный метод определения напряжений в упругом пространстве с четырьмя вытянутыми сфероидальными включениями, центры которых расположены в вершинах квадрата, при одноосном и двuosном растяжении упругого пространства. Метод позволяет точно удовлетворить граничным условиям на бесконечности и условиям идеального контакта на границе включений. Метод редукции, применяемый при численном решении разрешающих систем, обладает высокой скоростью сходимости, что обусловлено экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов. Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между включениями и соотношения между упругими модулями материалов включений и пространства.

Ключевые слова: *вытянутые сфероидальные включения, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, зернистый композит.*

Введение

При создании композиционных материалов и проектировании изделий из них важными факторами являются характеристики материала, связанные с его прочностью. Любые оценки прочности материала основываются на определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем под действием внешних нагрузок. Теоретические методы определения напряжений и деформаций в композиционном материале недостаточно точны, так как обычно используют приближенные модели. Низкой точностью применительно к пространственным многосвязным задачам с большим числом компонент связности отличаются и стандартные численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности, в частности, авиации и ракетостроения, является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Ре-

шение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2–4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зави-

симости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] методами теории гармонических функций исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями и в полупространстве с вытянутой сфероидальной полостью.

В статье [8] сделана попытка моделирования напряженного состояния упругой среды с периодической системой сфероидальных включений.

В работе [9] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри вытянутых сфероидальных пор.

В статьях [10, 11] исследовано напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных пор и включений в упругом материале обобщенным методом Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе развита методика, предложенная в работах [10, 11], на случай любого конечного числа включений. Методика основана на обобщенном методе Фурье и позволяет точно удовлетворять условиям на границе включений.

Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство Ω с четырьмя непересекающимися сфероидальными включениями Ω_j , центры которых расположены в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1.

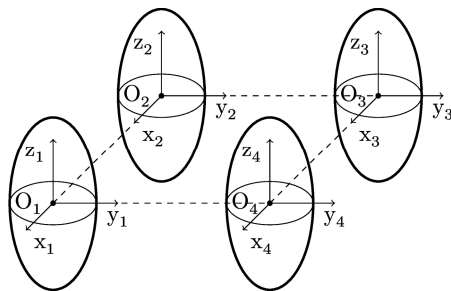


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и вытянутые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам включений $O_j, j=1,4$.

Материалы пространства и включений имеют упругие характеристики $(G, \sigma), (G_j, \sigma_j)$ соответственно.

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T, \tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T, \tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двухосное растяжение), а включения находятся в условиях идеального контакта с пространством.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с условиями сопряжения на границе включений

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \quad (3)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь \mathbf{U} – вектор перемещений; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ – отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ – коэффициент Пуассона. Условие (2), (3) отражает идеальный контакт между материалами пространства и включений.

Решение задачи

Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (5)$$

при $x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j$,

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} b_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (6)$$

при $x \in \Omega_j$,

где $a_{s,n,m}^{(j)}, b_{s,n,m}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (8)$$

где T – усилие на бесконечности; G – модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для вытянутого сфероида [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)} - u_{n+1,m}^{\pm(5)} \right], \quad s=1,3; \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)} - c q_0^2 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (10)$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi \mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i – мнимая единица), $\chi = 3 - 4\sigma$, $q = \text{ch} \xi$, $q_0 = \text{ch} \xi_0$,

$u_{n,m}^{\pm(5)}$ – полный набор частных решений уравнения Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах.

В развернутой координатной форме формулы (9) – (10) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0, \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1, \quad (12)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = q u_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - q u_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \left[q u_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + c \left(q^2 - q_0^2 \right) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (13)$$

где $u_{n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m}^{\pm} S_n^m$, $u_{n,m}^+ = Q_n^{-m}(q)$, $u_{n,m}^- = P_n^{-m}(q)$, $u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm} S_n^m$, $u_{1,n,m}^+ = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)$, $u_{1,n,m}^- = -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)$, $S_n^m = P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$, P_n^m и Q_n^m – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z.$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (14)$$

Применив к формулам (11) – (13) оператор (14) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$ получим:

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left\{ \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \right.$$

$$\left. - \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm(5)} \right) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}, \quad (16)$$

$$\mathbf{FU}_{3,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q}{\bar{q}} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \quad (17)$$

где $u_{2,n,m}^+ = \omega^- Q_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$, $u_{3,n,m}^+ = Q_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$, $u_{3,n,m}^- = P_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$, $u_{2,n,m}^- = \omega^- P_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$, $\omega^- = (n+m)(n-m+1)$, $h = (q^2 - p^2)^{-1/2}$, $\bar{q} = \text{sh} \xi$.

Теоремы сложения

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфероидов. Справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^+(5)(\xi_i, \eta_i, \varphi_i) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m}^{t,k,l,i,j} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-}(5)(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (18)$$

где $i, j = 1 \div 4$, $i \neq j$.

$$T_{s,n,m}^{t,k,l,i,j} = \left\{ \delta_{st} - \delta_{t1} \delta_{s2} \left[q_0^2 \left(c_i \frac{\partial}{\partial c_i} - n - 1 \right) + q_{j0}^2 \left(c_j \frac{\partial}{\partial c_j} - k \right) + z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right] \right\} f_{1,n,m}^{+(55)k,l,i,j}, \quad (19)$$

$$f_{1,n,m}^{+(55)k,l,i,j} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pk} \left(\frac{c_j}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \beta_{rm} \left(\frac{c_i}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-1}^{+(4)}(r_{ij}, \theta_{ij}, \varphi_{ij}), \quad (20)$$

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} \left[\Gamma \left(\frac{i-j}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{i+j}{2} + \frac{3}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (21)$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, Γ – гамма-функция Эйлера; $\varepsilon_{ij} = 1$, если i и j одной четности, и $\varepsilon_{ij} = 0$ в противном случае; (r, θ, φ) – сферические координаты; $u_{n,m}^{+(4)} = (n-m)! r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ – внешнее базисное частное решение уравнения Лапласа для сферы.

Разрешающая система уравнений

Используя теоремы сложения (18), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с нача-

лом в точке O_j :

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} a_{s,n,m}^{(j)} U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \\ & + U_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l}^{s,n,m,\alpha,j}. \end{aligned}$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_j, \sigma) + \\ & + F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j, \sigma) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l}^{s,n,m,\alpha,j} + F_{0,n,m}^{(r)} = \\ & = \frac{G_j}{G} \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j, \sigma_j), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} E_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_j, \sigma) + \\ & + E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j, \sigma) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{t,k,l}^{s,n,m,\alpha,j} + E_{0,n,m}^{(r)} = \\ & = \sum_{s=1}^3 b_{s,n,m}^{(j)} E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j, \sigma_j), \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1,$$

где $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$, $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$,

$$E_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{-T\sigma d_2}{G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad E_{0,n,m}^{(1)} = \frac{T\sigma d_2}{2G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0},$$

$$E_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_1}{2G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0} \text{ (для одноосного растяжения)}$$

ния) и $F_{0,n,m}^{(0)} = 0$, $F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_1}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}$,

$$F_{0,n,m}^{(-1)} = -\frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad E_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{T(1-\sigma)d_2}{G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0},$$

$$E_{0,n,m}^{(1)} = \frac{T(\sigma-1)d_2}{2G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad E_{0,n,m}^{(0)} = \frac{-T\sigma d_1}{G(\sigma+1)} \delta_{n1} \delta_{m0}$$

(для двуосного растяжения).

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)} = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(0)} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}, \quad F_{2,n,m}^{\pm(-1)} = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm} \right) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(1)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm} \right) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm} \right) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}.$$

$$E_{1,n,m}^{\pm(-1)} = u_{n,m-1}^{\pm}(\xi), \quad E_{1,n,m}^{\pm(1)} = -u_{n,m+1}^{\pm}(\xi),$$

$$E_{1,n,m}^{\pm(0)} = -u_{n,m}^{\pm}(\xi); \quad E_{2,n,m}^{\pm(-1)} = qu_{1,n,m-1}^{\pm}(\xi),$$

$$E_{2,n,m}^{\pm(1)} = -qu_{1,n,m+1}^{\pm}(\xi), \quad E_{3,n,m}^{\pm(0)} = 0;$$

$$E_{2,n,m}^{\pm(0)} = -qu_{1,n,m}^{\pm}(\xi) - \chi u_{n,m}^{\pm}(\xi);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(-1)} = -u_{n,m-1}^{\pm}(\xi), \quad E_{3,n,m}^{\pm(1)} = -u_{n,m+1}^{\pm}(\xi).$$

Оператор системы уравнений (22) и (23) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [13].

Анализ результатов

Коэффициенты Пуассона материалов пространства и включений приняты равными соответственно $\sigma = 0,38$ и $\sigma_j = 0,21$.

Система уравнений (22) и (23) численно решается методом редукции. На основании полученных решений находятся нормальные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям. На рис. 2 – 4 приведены напряжения σ_x / T , σ_y / T , σ_z / T на линии O_1O_4 вне включений при одноосном растяжении для $G_j / G = 25$, $d_2 / d_1 = 0,75$ в зависимости от относительного расстояния a / d_1 между включениями.

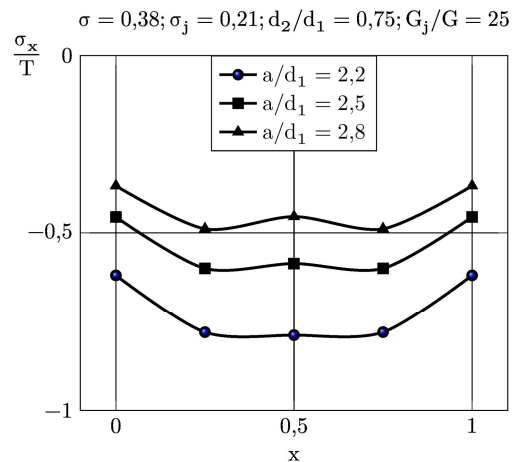


Рис. 2. Напряжения σ_x / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

Максимальные по модулю значения напряжений σ_x / T и σ_y / T получаются в случае наиболее сближенных включений. При всех значениях расстояний между включениями эти напряжения являются сжимающими. Максимальные значения напряжений σ_z / T , наоборот, наблюдаются при наиболее удаленных включениях. Имеются зоны изменения знака напряжений вблизи границ включений.

На рис. 5 – 7 приведены напряжения σ_x / T , σ_y / T , σ_z / T на линии O_1O_4 вне включений при двусосном растяжении для $G_j / G = 25$, $d_2 / d_1 = 0,75$ в зависимости от относительного расстояния a / d_1 между включениями. Для этого случая характерно преобладание растягивающих напряжений в плоскости xOy . Практически на всем рассматриваемом отрезке напряжения σ_x / T , σ_y / T мало отличаются от постоянных. Максимальные значения напряжений наблюдаются в случае наиболее близко расположенных включений. Все нормальные напряжения в этом случае являются растягивающими.

более жестких включений при сохранении общего характера в их распределении.

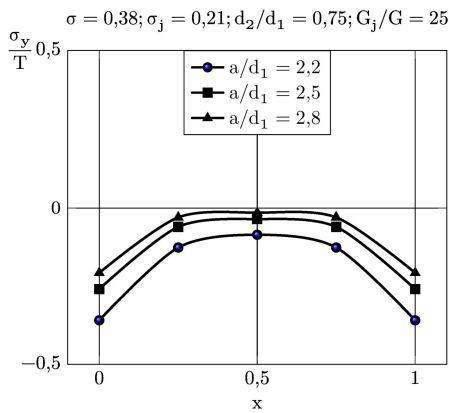


Рис. 3. Напряжения σ_y / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

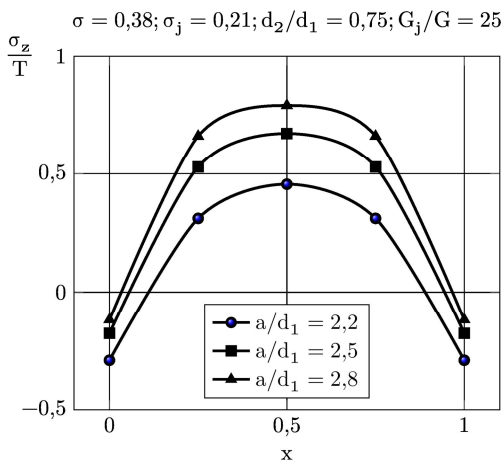


Рис. 4. Напряжения σ_z / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном растяжении

На рис. 8 и 9 представлены изменения напряжений σ_x / T в зависимости от отношения модулей сдвига материалов включения и пространства при одноосном и двусосном растяжении. Наблюдается незначительное увеличение напряжений в случае

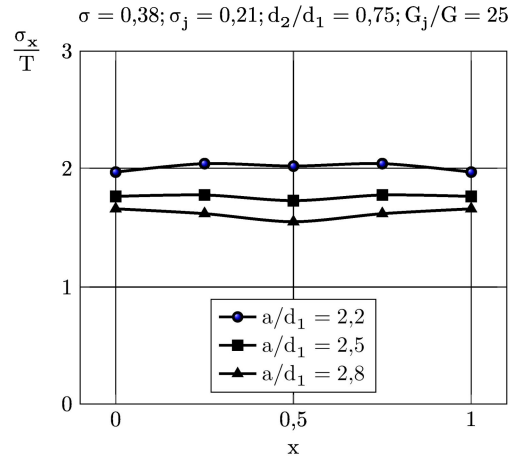


Рис. 5. Напряжения σ_x / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двусосном растяжении

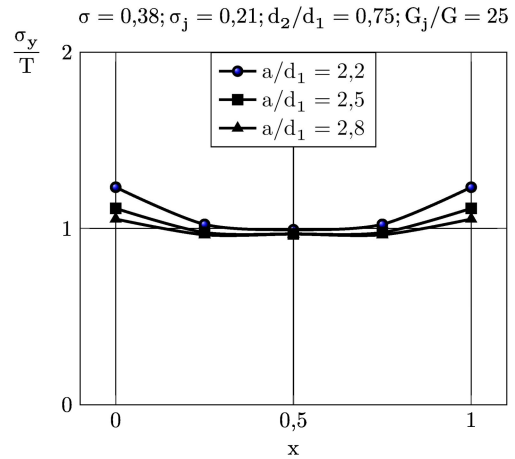


Рис. 6. Напряжения σ_y / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двусосном растяжении

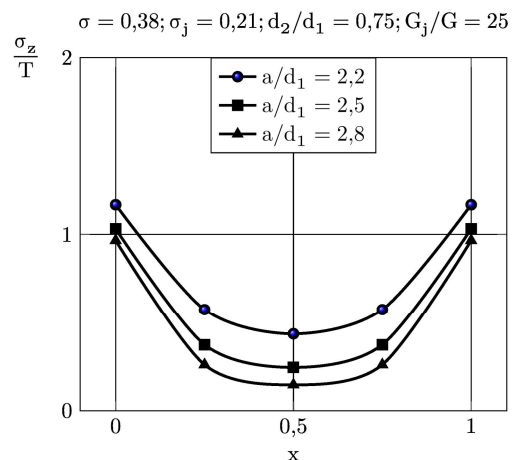


Рис. 7. Напряжения σ_z / T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними при двусосном растяжении

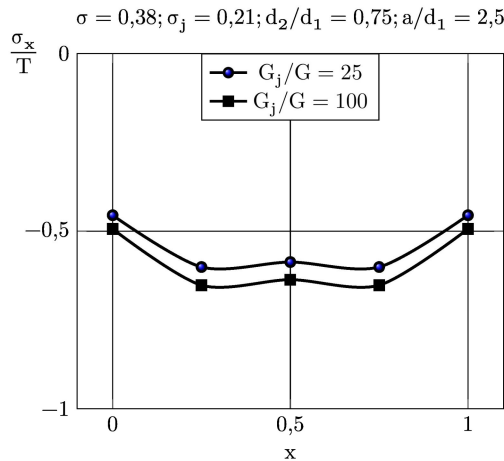


Рис. 8. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения G_j/G при одноосном растяжении

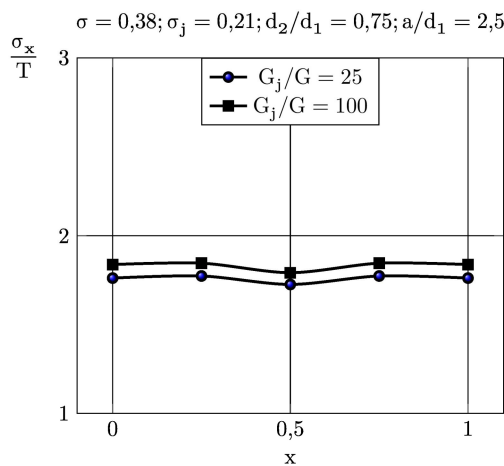


Рис. 9. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения G_j/G при двуосном растяжении

Заключение

В работе предложен эффективный метод определения напряжений в упругом пространстве с четырьмя сфероидальными включениями, центры которых расположены в вершинах квадрата, при одноосном и двуосном растяжениях упругого пространства. Метод позволяет точно удовлетворить граничным условиям на бесконечности и условиям идеального контакта на границе включений. Метод редукции, применяемый при численном решении разрешающих систем, обладает высокой скоростью сходимости, что обусловлено экспоненциальным убыванием матричных коэффициентов. Для получения гарантированной точности в 0,1% достаточно удерживать в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (22), (23) число уравнений, отвечающее $n_{\max} = 5$ при относительном расстоя-

нии между включениями $a/d_1 = 2,5$.

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования напряженно-деформированного состояния зернистого композита с вытянутыми сфероидальными зернами.

Литература

1. Khoroshun, L. P. *Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text]* / L. P. Khoroshun // *International Applied Mechanics*. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284–1316.
2. Вольперт, В. С. *Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащее систему сферических полостей или включений [Текст]* / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // *Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта*. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ. №3266–77.
3. Олегин, И. П. *Осесимметричное напряжённое состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями [Текст]* / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2002. – Т. V, № 1(9). – С. 127–132.
4. Олегин, И. П. *Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей [Текст]* / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 1999. – Т. II, № 1. – С. 117–122.
5. Гаришин, О. К. *Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст]* / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.
6. Tsuchida, E. *On the asymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions [Text]* / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1980. – V. 23, № 181. – P. 1072–1080.
7. *Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-round tension [Text]* / E. Tsuchida, Y. Saito, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1982. – V. 25, №202. – P. 493 – 500.
8. Куц, В. И. *Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст]* / В. И. Куц // *Прикладная механика*. – 1995. – Т. 31, №3. – С. 32 – 39.
9. Николаев, А. Г. *Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст]* / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48–58.
10. Николаев, А. Г. *Развитие локальной модели*

напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 1(98). – С. 14–18.

11. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вісн. Харк. Нац. ун-та ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математика, прикладна математика і механіка*. – 2010. – Т. 922. – С. 4–19.

12. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А. Г. Николаев. – Х. : Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

13. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // *Доповіди НАН України*. – 1998. – Т. 2. – С. 78–83.

Поступила в редакцию 8.06.2014, рассмотрена на редколлегии 10.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В. А. Ванін, ИПМаш НАН України, Харьков.

ПРУЖНИЙ ПРОСТІР З ЧОТИРМА СФЕРОЇДАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ НАВАНТАЖЕНЬ

О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчик

У роботі запропоновано ефективний метод визначення напружень у пружному просторі з чотирма витягнутими сфероїдальними включеннями, центри яких розташовані у вершинах квадрату, при одноосному та двоосному розтягу пружного простору. Метод дозволяє точно задовольнити граничні умови на нескінченності та умовам ідеального контакту на границі включень. Метод редукції, застосований при чисельному розв'язанні розв'язальних систем, має високу швидкість збіжності, що обумовлено експоненціальним спаданням матричних коефіцієнтів. Проведено чисельний і якісний аналіз напруженого стану на лінії, що сполучає центри включень, залежно від відносної відстані між включеннями і співвідношеннями між пружними модулями матеріалів включень і простору.

Ключові слова: витягнуті сфероїдальні включення, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, зернистий композит.

ELASTIC SPACE WITH FOUR SPHEROIDAL INCLUSIONS UNDER EXTERNAL LOAD

A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik

In this paper, we propose an effective method for determining the stresses in the elastic space with four prolate spheroidal inclusions, whose centers are located at the vertices of the square, under uniaxial and biaxial tension of the elastic space. Method enables to be satisfied with the boundary conditions at infinity and perfect contact conditions at the boundary of inclusions. Reduction method used in the numerical solution of resolve systems, has a high rate of convergence, due to the exponential decrease of the matrix coefficients. The numerical and qualitative analysis of the stress state on the line connecting the centers of the inclusions, depending on the relative distance between the insertion and the relation between the elastic moduli of the inclusions of materials and space.

Key words: prolate spheroidal inclusions, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier method, method of reduction, granular composite.

Николаев Алексей Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Танчик Евгений Андреевич – ассистент каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.