УДК 533.6

Ю. А. КРАШАНИЦА, ЛЮ СЯО БО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ТЕЛЕСНЫЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

В настоящее время для решения актуальных задач аэрогидродинамики широко применяются различные численные методы. Их общими недостатками являются частность и трудоемкость решений, высокие требования к вычислительным ресурсам и, как следствие, сложность решения задач оптимизации и экономической целесообразности. Этих проблем можно избежать, используя точные или приближенные аналитические зависимости, которые позволяют решать некоторые актуальные задачи исследования взаимодействия вязкого газа с несущими элементами летательных аппаратов. Существующие методики расчетов аэродинамических характеристик, основанные на идеологии математической модели движения идеальной среды без вязкого взаимодействия, не соответствуют реальным процессам и запросам практики. В статье представлена идеология определения аэродинамических характеристик телесного профиля в потоке вязкого газа.

Ключевые слова: *вязкий газ, законы сохранения, граничные интегральные уравнения, телесный профиль, аэродинамические характеристики.*

Введение

Современная газовая динамика представляет собой обширную физико-математическую дисциплину, занимающую прочное место в фундаменте системы знаний о поведении сплошных легкоподвижных сред. Ее объектами являются не только непосредственно наблюдаемые газообразные и жидкие тела, но и твердые при воздействии высоких температур и больших давлений. Собственно газовая динамика выделяет и изучает свойство сжимаемости среды. Вместе с тем в реальных условиях проявление сжимаемости сопровождается и другими, во многих случаях не менее важными эффектами, такими как вязкость, теплопроводность, способность к химическим реакциям и т.п. Однако если изменение состояния среды происходит достаточно быстро, за время много меньшее характерного времени протекания диссипативных процессов, то свойство сжимаемости оказывается определяющим. Поэтому газовую динамику следует рассматривать как науку, изучающую быстропротекающие процессы в окружающем пространстве.

Исторически становление теоретической газовой динамики послужило не только пониманию и описанию общей структуры происходящих в реальных средах физических процессов. Развитие газовой динамики оказало существенное влияние на развитие математики, главным образом в ее части, связанной с теорией дифференциальных уравнений. Она вдохнула жизнь в становление и развитие целых математических направлений – теорию разрывных решений дифференциальных уравнений, теорию уравнений смешанного типа. Проблематика решения задач газовой динамики стимулировали развитие теории метода интегральных уравнений, группового анализа дифференциальных уравнений, функционально-аналитических и топологических методов исследования краевых задач. Газовая динамика обогатила фундаментальную науку целым рядом важнейших понятий, таких как вырождение типа дифференциального уравнения, сильные и слабые разрывы решений, градиентная катастрофа, сильные и слабые нелинейности, инвариантные и автомодельные решения.

Основоположниками теоретической газовой динамики по праву нужно считать немецкого математика Бернарда Римана (1826 – 1866), впервые описавшего теорию образования и распространения сильного разрыва в решениях уравнений газовой динамики, и великого русского ученого математика и механика Сергея Алексеевича Чаплыгина (1869 – 1942), создавшего аналитический метод исследования установившегося движения газа.

Принципиальной особенностью газодинамических процессов, создающей значительные трудности для теоретических исследований, является их нелинейность. Именно поэтому для большинства практически важных газодинамических задач до сих пор не доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений. Поэтому и численная реализация вычислительных алгоритмов, широко применяемых в настоящее время, оказывается не обеспеченной надлежащим корректным обоснованием, что при большой затрате ресурсов дает недостоверные результаты. Теория течений вязких сжимаемых сред представляется одной из важнейших для практики и наиболее интересной для математических исследований в разделе механики сплошных сред [1 - 5]. Не случайно именно в задачах динамики вязких течений J. Leray и J. Schauder сделали первые шаги по применению методов функционального анализа, а в последнее время уравнения Навье-Стокса стали одним из первых объектов применения численных методов. Теоретические основы современных технологий исследования течений вязких сплошных сред были заложены еще в середине минувшего столетия О. А. Ладыженской, J. -L. Lions, R. Temam, О. М. Белоцерковским, К.И. Бабенко и мн. др. [7], проводившими также и численное моделирование движения тел в различных средах. На сегодняшний день многими учеными проведены многочисленные исследования и получено много результатов, которые имеют отношение к данной работе.

К сожалению, применяемые сегодня методы теоретических исследований и соответствующие пакеты прикладных программ, основанные на конечно-разностных подходах далеки от совершенства, а результаты фундаментальных работ наших предшественников (Н. Е. Кочин, И. И. Ляшко, Б. Е. Победря, П. К. Рашевский, Э. Картан, В. Д. Купрадзе и мн. др.) ожидают своей востребованности. Тем не менее, в последнее время интерес к этой идеологии возрастает (Vector, tenzor and the basic equations of fluid mechanics. R. Aris. University of Minnesota; публикации в изд-вах: Pergamon Press, Springer, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, The Journal of Fluid Mechanics, AIAA Paper, Acta Mechanica Sinica, International Journal of Mechanical Engineering and Automation, Journal of aircraft, NASA cooperative agreement, NASA Langley research center и др.).

Необходимо выделить также и тот факт, что в основе существующих теоретических исследований и соответствующих пакетов прикладных программ для методов численной реализации использовалась идеология линеаризованных подходов к решению нелинейных задач газовой динамики [3, 6].

В данной работе рассмотрена модельная задача определения аэродинамических характеристик реального телесного аэродинамического профиля, расположенного также вблизи поверхности раздела, в потоке вязкой сжимаемой жидкости. К сожалению, в существующих идеологиях и методиках таких расчетов [1, 4, 5] основной моделью является модель идеальной среды, где невозможно определить такой существенный параметр как сопротивление движению, связанное с трением среды о границы потока. Поэтому здесь невозможно подсчитать реальные аэродинамические характеристики несущей системы, что существенно влияет на весь процесс успешного проектирования летательного аппарата.

Апробированный метод граничных интегральных уравнений [8], предложенный для решения представленной задачи основан на развитом аппарате векторно-тензорного анализа и подтвердил свою эффективность при решении как внутренних, так и внешних задач аэрогидродинамики для полной системы уравнений Навье-Стокса [9].

1. Постановка задачи

Чисто дозвуковое течение вокруг профиля является одной из немногих проблем газовой динамики, для которой может быть построена почти законченная теория. Теоремы существования и единственности решений этих задач исследовались многими авторами, среди которых необходимо выделить работы М. В. Келдыша и Ф. И. Франкля, а также Р. С. Финна и Д. Гилбарга, М. Шифмана и в достаточно полной мере доказаны [7]. Для настоящей работы эти результаты имеют принципиальное значение, т.к. подтверждают возможность построения единственного решения поставленной задачи.

В основу изучения движения вязкого газа полагаются следующие общие допущения:

- газ совершенен, т.е. давление p, плотность ρ и абсолютная температура T удовлетворяют закону Клапейрона

$$p = \rho R T\,, \tag{1}$$

который при частном предположении о независимости коэффициента теплоемкости при постоянном давлении c_p можно записать в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{c_p} h\,, \tag{2}$$

где h – энтальпия – тепловая функция выражается интегралом

$$h = \int_0^T c_p(T)\, dT\,; \tag{3}$$

- газ представляет «ньютоновскую» среду, подчиненную известному обобщенному закону Ньютона о линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций, который в простейшем случае ламинарного движения имеет вид

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} . \qquad (4)$$

Этот реологический закон утверждает существование простой пропорциональности между касательными напряжениями, действующими в плоскостях соприкасания слоев жидкости и производными от скорости по направлениям, нормальным к этим плоскостям. Эта формула определяет внутреннее трение или вязкость среды. Коэффициент μ, зависящий только от температуры, называется динамическим коэффициентом вязкости, значения которого для многих сплошных сред хорошо известны.

В данном двумерном случае обтекания профиля стационарным потоком совершенного газа (рис. 1) при постоянной температуре законы сохранения представляются в консервативном виде

$$(\nabla, \mathbf{P}) \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 , \qquad (5)$$

где тензоры имеют вид

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p - \tau_{xx})u - \\ -\tau_{xy} v \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p - \tau_{yy})v - \\ -\tau_{xy} u \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

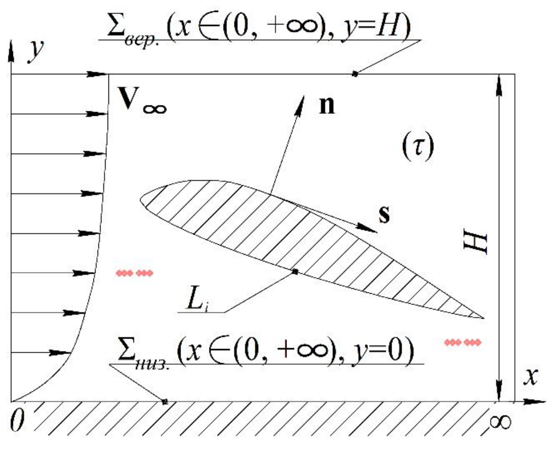

Рис. 1. Телесный профиль в дозвуковом потоке газа в контрольной области

Система уравнений (5) описывает как ламинарные, так и турбулентные течения сжимаемого вязкого газа. В данном случае ламинарных течений значения компонент тензора напряжений определяются соотношениями

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3}\mu D + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu D + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (7)$$

Величина полной энергии на единицу объема

$$E = \rho\left[e + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right], \qquad (8)$$

где e – удельная внутренняя энергия. Замкнутая система уравнений (5) в стационарном случае является системой эллиптическо-гиперболического типа и должна решаться при граничных условиях

$$\mathbf{V}\big|_{L,\Sigma} = 0; \quad \mathbf{V}\big|_{\Sigma} = V_\infty; \quad T\big|_{\tau} = T_\infty . \qquad (9)$$

Граничные интегральные представления решений

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной системы дифференциальных законов сохранения механики сплошных сред даже в простейших случаях. Тем не менее, современное развитие математической физики и обобщенного векторно-тензорного анализа [7, 9], способствуют развитию метода граничных интегральных уравнений на широкий класс начально-краевых задач механики [8], и, в первую очередь, аэрогидродинамики [5], а также позволяют выходить на аналитические решения определённых классов нелинейных задач. Метод граничных интегральных уравнений, позволяющий сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности, есть одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики, теории поля и векторного анализа. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве разрешимости задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным метод оказался в случаях внешних задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами.

Здесь необходимо подчеркнуть, что современные исследования проблемных и востребованных задач механики сплошных сред [2 - 7] и, в частности, аэрогидродинамики, опираются на развитые аппараты функционального и векторно-тензорного анализов [2, 5, 7, 9], что в полной мере эффективно эксплуатируется и способствует развитию численных методов решения всего спектра востребованных задач аэрогидромеханики.

На основании векторно-тензорного анализа, нетрудно показать [9], что для любых вектор-функции $\mathbf{a}$ и скалярной функции φ, имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно в исследуемой области, имеют место следующие обобщённые дифференциальные операции векторно-тензорного анализа с оператором $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$, которые будут также широко использоваться и в дальнейшем:

$$\left(\nabla, (\mathbf{I}\varphi)\right) = \nabla\varphi; \qquad (10^1)$$

$$\left[\nabla, (\mathbf{I}\varphi)\right] = [\mathbf{kk}, \nabla\varphi] = [\nabla\varphi, \mathbf{I}]; \qquad (10^2)$$

$$[\nabla, \mathbf{kk}\varphi] = [\nabla\varphi, \mathbf{kk}] = [\mathbf{I}, \nabla\varphi]; \qquad (10^3)$$

$$\left(\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{a}]\right) = [\nabla, \mathbf{a}]; \qquad (10^4)$$

$$[\nabla, [\mathbf{kk}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{I}]] = \nabla^*\mathbf{a} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{a}); \qquad (10^5)$$

$$[\mathbf{I}, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla^*\mathbf{a} - \nabla\mathbf{a}; \qquad (10^6)$$

$$[\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{a}]] = -\mathbf{kk}(\nabla, \mathbf{a}); \qquad (10^7)$$

$$\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\nabla, \nabla^*\mathbf{a}\right) = \Delta\mathbf{a} + [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]], \qquad (10^8)$$

где $\nabla\mathbf{a}$ и $\nabla^*\mathbf{a}$ - сопряженные тензоры, $\mathbf{I}$ –единичный тензор в декартовом базисе ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$).

Очевидно, что основные законы сохранения, записанные в консервативном виде (5), можно представить в форме дифференциальных уравнений второго порядка

$$\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = 0; \; \nabla(\nabla, \mathbf{B}) = 0, \qquad (11)$$

где вектор $\mathbf{a}$ и тензор $\mathbf{B}$ связаны с решением конкретной задачи механики сплошных сред.

Тогда, интегрируя комбинацию этих операторов по области (τ) (см. рис. 1), имеем:

$$\iint\limits_{(\tau)} \left\{ \left(\nabla(\nabla, \mathbf{a}), \mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a}, \nabla(\nabla, \mathbf{B})\right) \right\} d\tau = \qquad (12)$$
$$= \iint\limits_{(\tau)} \left(\nabla, \left\{ (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{B} - \mathbf{a}(\nabla, \mathbf{B}) \right\}\right) d\tau.$$

Для построения граничного интегрального представления решений задачи (5, 9) удобно ввести тензор $\mathbf{\Gamma}\left(\left|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}\right|\right) = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi]$, который, в силу условий Коши-Римана, является консервативным: $(\nabla, \mathbf{\Gamma}) = 0$ и потенциальным: $[\nabla, \mathbf{\Gamma}] = 0$, а функции φ и ψ – решения уравнения Лапласа. Особенно важно выделить тот факт, что тензор $\mathbf{\Gamma}$ является фундаментальным решением дифференциального оператора второго порядка в уравнениях (11):

$$\nabla(\nabla, \mathbf{\Gamma}) = \Delta\mathbf{\Gamma} + [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Gamma}]] = \mathbf{I}\Delta\varphi. \qquad (13)$$

Интегральные представления решений краевых задач математической физики для дифференциальных уравнений, в данном случае второго порядка, строятся путём интегрирования комбинации операторов в уравнениях (11) в обобщенной формуле Грина при $\mathbf{a} = \mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mathbf{\Gamma}$ с необходимыми дифференциальными свойствами по области (τ) (см. рис. 1).

$$\mathbf{P} = \oint\limits_{L+\Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial n}, \mathbf{\Gamma}\right) - \left(\mathbf{P}, \frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right) \right\} d\sigma. \qquad (14)$$

Выполнение здесь предельного перехода к точкам границ потока приводит к системе граничных интегральных уравнений относительно искомых кинематических и динамических параметров задачи (5 – 9).

Заключение

Показано, что методы теории потенциала позволяют обобщать классические результаты на современные задачи обтекания несущих систем потоком реального газа. Полученные интегральные представления решений системы законов сохранения являются основой метода граничных интегральных уравнений, играющих центральную роль в изучении граничных задач, связанных с исследованием обтекания тел произвольной плоской и пространственной формы реальными средами. Это обусловлено главным образом тем, что математическая постановка этих задач приводит к уравнениям в неограниченных областях, и, следовательно, их переформулировка в виде граничных интегральных уравнений не только уменьшает размерность задачи, но и позволяет свести ее к задаче в ограниченной области. С вычислительной точки зрения оба эти преимущества очень важны, и в последние годы инженеры, физики и математики приложили немало усилий для развития и использования метода граничных интегральных уравнений во многих прикладных задачах.

Литература

1. Чаплыгин, С. А. О газовых струях [Текст] / С. А. Чаплыгин // Избранные труды по механике и математике. – М. : ГИТТЛ, 1954. – С. 9 – 89.

2. Mises, R. Mathematical Theory of Compressible Flow [Text] / R. Mises. – NY : AP, 1958. – 354 c.

3. Мельников, А. П. Основы теоретической аэродинамики [Текст] / А. П. Мельников. – Л. : ЛКВВИА, 1953. – 452 с.

4. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей [Текст] / К. Флетчер. – Т. 2. – М. : Мир, 1991. – 552 с.

5. Берс, Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики [Текст] / Л. Берс. – М. : ИЛ, 1961. – 208 с.

6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1970. – 904 с.

7. Galdi, G. P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations [Text] / G. P. Galdi. – New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. – 1018 p.

8. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике [Текст] / под. ред. Т. Круза, Ф. Риццо. – М. : Мир. – 1978. – 210 с.

9. Krashanytsya, Y. Method of boundary integral equations for fluid applications [Text] / Y. Krashanytsya. – Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121, Saarbrücken, Germany, 2013. – 238 p.

Поступила в редакцию 1.02.2016, рассмотрена на редколлегии 15.02.2016

ТІЛЕСНИЙ АЕРОДИНАМІЧНИЙ ПРОФІЛЬ В ДОЗВУКОВОМУ ПОТОЦІ В'ЯЗКОГО ГАЗУ

Ю. О. Крашаниця, Лю Сяо Бо

В даний час для вирішення актуальних завдань аерогідродинаміки широко застосовуються різноманітні чисельні методи. Їх загальними недоліками є частковість та трудомісткість рішень, високі вимоги до обчислювальних ресурсів і, як наслідок, складність вирішення задач оптимізації та економічної доцільності. Цих проблем можна уникнути, використовуючи точні або наближені аналітичні залежності, які дозволяють вирішувати деякі актуальні завдання досліджень взаємодії вузького газу з несучими елементами літальних апаратів. Існуючі методики розрахунків аеродинамічних характеристик, які засновано на ідеології математичної моделі руху ідеального середовища без вузької взаємодії, не відповідають реальним процесам і запитам практики. У статті представлено ідеологію визначення аеродинамічних характеристик тілесного профілю в потоці в'язкого газу.

Ключові слова: в’язкий газ, закони збережень, граничні інтегральні рівняння, тілесний профіль, аеродинамічні характеристики.

BODY AIRFOIL IN SUBSONIC VISCOUS GAS FLOW

Y. A. Krashanytsya, Liu Xiao Bo

Currently, to solve urgent problems in aerodynamics are widely used various numerical methods. Their disadvantages are common particularity and complexity of making high demands on computing resources, and as a result, the complexity of solving optimization problems and economic feasibility. These problems can be avoided by using the exact or approximate-WIDE analytical relationships that allow us to solve some urgent problems, studies of the interaction of a viscous gas bearing elements of aircraft. Existing methods of calculation of aerodynamic characteristics, based on the ideology of the mathematical model of motion of an ideal medium without viscous interaction, do not correspond to the actual processes and practices, millet. The paper presents the determination of the aerodynamic characteristics of the ideology of that forest-profile in viscous gas flow.

Key words: viscous gas, conservation laws, boundary integral equation, solid profile, aerodynamic characteristics.

Крашаница Юрий Александрович – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Лю Сяо Бо – студент каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.