ISSN 1727-7337 (print)
ISSN 2663-2217 (online)

УДК 624.072.2.04: 519.853

doi: 10.32620/aktt.2020.1.05

С. С. КУРЕННОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА МАКСИМАЛЬНЫЙ ПРОГИБ

Решена задача по нахождению оптимального распределения высоты балки по длине конструкции при наличии ограничения на максимальную величину прогиба. Проведен обзор литературы, и показано, что известные решения или ошибочны, поскольку основаны на ложных гипотезах, или имеют узкую область применения, ограничиваясь лишь симметричными конструкциями, для которых точка максимальных прогибов известна заранее. В работе рассматривается балка прямоугольного сечения постоянной ширины. Балка полагается статически определимой, а нагрузка – произвольной, в том числе несимметричной и разнонаправленной. Точки (или точка), в которых прогибы балки максимальны – заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи. Рассматривается линейная постановка задачи. Критерием оптимизации является масса балки. Для нахождения прогибов балки, т.е. для решения дифференциального уравнения изгиба балки переменного сечения используется метод конечных разностей. Задача проектирования сведена к нахождению потребных высот балки в системе узловых точек. При этом искомое решение должно удовлетворять системе ограничений на перемещения узловых точек и на знак переменных. Поскольку ограничения на перемещения каждого узла рассматриваются отдельно и независимо, предложенная методика позволяет гибко управлять ограничениями на перемещения балки. При помощи предложенной в работе замены переменных решаемая задача сведена к задаче нелинейного программирования, в которой целевая функция является сепарабельной, а ограничения – линейными функциями. Данная задача при помощи линеаризации может быть сведена к задаче линейного программирования относительно новых переменных. Решена модельная задача, и показано, что предложенный алгоритм позволяет эффективно решать задачи оптимального проектирования балок при наличии ограничений на максимальную величину прогиба. Предложенный подход может быть развит на наличие ограничений по прочности, на балки переменной ширины, двутаврового поперечного сечения и т.д.

Ключевые слова: *балка; оптимизация; ограничения; метод конечных разностей; проектирование.*

Введение

Оптимальное проектирование элементов аэрокосмической техники является важной научной проблемой [1] и имеет большую историю [2, 3]. Балки являются классическими объектами изучения строительной механики и различным вопросам их проектирования посвящено множество работ [4, 5]. Отмечается, что задача проектирования конструкций с ограничениями по величинам перемещений усложняется тем, что в общем случае точка максимального прогиба заранее неизвестна. Положение этой точки существенно зависит не только от вида нагрузки, но и от распределения толщин (функции проектирования). Принципиальное упрощение задачи возможно в тех случаях, когда положение точки с максимальной величиной прогиба известно заранее, например, из соображений симметрии [4]. Кроме того, очевидно, что у консольной балки, которая нагружена даже неравномерной, но имеющей один знак, нагрузкой максимальные перемещения будут на свободном конце балки. Этот факт позволяет сформулировать вариационную задачу оптимального распределения материала в классической форме, с ограничением на перемещения в данной конкретной точке, и используется в ряде работ, посвященных оптимальному проектированию балок [6, 7] в том числе и в нелинейной постановке [8, 9]. Еще одним вариантом получения аналитического решения задачи является введение ограничения в виде интеграла от произведения перемещений на величину приложенной распределенной нагрузки [10]. В этом случае задача проектирования сводится к изопериметрической вариационной задаче.

Как уже отмечалось, в двухопорной балке при отсутствии симметрии нагружения, в частности, если сосредоточенная сила приложена не в середине балки, то даже при равномерной изгибной жесткости балки положение точки максимального прогиба заранее указать невозможно, и необходимо решать соответствующую задачу об изгибе балки. Однако в работе [11] ошибочно утверждается, что прогибы будут максимальными в точке приложения силы. Безусловно, можно подобрать такое распределение высот балки по длине, при котором данное утверждение будет верным. Однако является ли такое распределение единственным и обеспечивает ли оно минимум массы балки – неизвестно. К сожалению, данная ошибка была повторена в ряде других работ автора работы [11] и его учеников, в частности, в работе [12]. Поэтому решения, показанные в данных (и других, неупомянутых) работах, следует признать ошибочными. Остается только удивляться тому, как эта очевидная ошибка оставалась незамеченной рецензентами и авторами на протяжении многих лет, и почему авторы и рецензенты не задали себе вопрос, где будет расположена точка с максимальными прогибами, если приложено несколько сил или нагрузка распределена по длине некоторых участков.

Идея декомпозиции балки на систему консольных балок, имеющих в точках максимального прогиба жесткое закрепление, была предложена еще в работе [13]. Однако, в отличие от ошибочного решения [11, 12], построенного на этой же идее, в работе [13] отмечено, что точки, имеющее максимальные перемещения, заранее неизвестны, и предложен итерационный алгоритм решения, на каждом этапе которого координаты этих точек пересчитываются. В работе [14] для оптимизации конструкции при наличии ограничений предложено использовать комбинированный разностно-вариационный подход.

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи, который основан на дискретизации балки, использовании метода конечных разностей, введении ограничений на перемещения в узлах и применении методов нелинейного программирования к задаче минимизации целевой функции - веса конструкции.

Постановка задачи

Рассмотрим статически определенную балку длиною L, изгиб которой в приближении Бернулли описывается известным уравнением

$$EI(x)\frac{d^2w}{dx^2} = M(x), \qquad (1)$$

где $EI(x)$ - изгибная жесткость балки;

$w(x)$ - поперечные перемещения;

$M(x)$ - изгибающие моменты в сечении балки.

Принципиальное отличие статически определимой балки от неопределимой состоит в том, что распределение изгибающих моментов $M(x)$ по длине балки может быть найдено из уравнений статического равновесия, и не зависит от вида функции изгибной жесткости балки. Поэтому, в силу статической определимости конструкции, положим, что распределение изгибающих моментов $M(x)$ является известным.

Поперечное сечение балки – прямоугольник постоянной ширины b и с неизвестной высотой $h(x)$. В этом случае

$$EI(x) = \frac{Eb}{12}h^3(x),$$

где E - модуль упругости материала балки.

Минимизации подлежит масса балки, что в силу постоянной ширины и плотности балки сводится к минимизации интеграла

$$\int_0^L h(x)dx \to \min . \qquad (2)$$

На перемещения накладывается ограничение

$$|w(x)| \le d_0, \quad x \in [0; L]. \qquad (3)$$

Отметим, что ограничение перемещений (3) может иметь и более общий вид, например положительные и отрицательные прогибы могут иметь различные ограничения, или же ограничения могут иметь вид функции от x.

Уравнение упругого изгиба балки (1) необходимо дополнить краевыми условиями. Для определенности рассмотрим шарнирно опертую балку:

$$w(0) = w(L) = M(0) = M(L) = 0. \qquad (4)$$

Т.е. необходимо найти функцию изменения высот балки $h(x)$, при которой достигается минимум массы балки (2) и при этом обеспечивается выполнение ограничений на перемещения (3), которые в свою очередь зависят от $h(x)$ и описываются дифференциальным уравнением (1).

Построение решения

Разобьем балку на систему узлов с нумерацией их от 0 до N. Шаг разбиения $\delta = \frac{L}{N}$. Уравнение (1) в разностной форме имеет вид

$$h_i^3(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) = \frac{12\delta^2}{Eb}M_i, \qquad (5)$$

где $i = 0, 1, 2, ..., N$ - номер узла;

$M_i = M(i\delta)$ - изгибающие моменты в узлах.

Высоты балки в узлах h_i и перемещения w_i являются неизвестными. Однако из физических соображений следует ограничение

$$h_i \ge 0. \qquad (6)$$

Ограничение (3) приобретает вид

$$|w_i| \le d_0, \quad i = 0, 1, 2, ..., N. \qquad (7)$$

Аппроксимируя интеграл (2) по формуле трапеций, получаем

ISSN 1727-7337 (print)
ISSN 2663-2217 (online)

$$\int_0^L h(x)dx \approx \delta\left(\frac{h_0+h_N}{2}+h_1+h_2+...+h_{N-1}\right). \quad (8)$$

В данном случае формула трапеций более предпочтительна, чем, например, формула Симпсона, по тому, что в ней коэффициенты при слагаемых $h_1,...,h_{N-1}$ одинаковы. Что в решаемой задаче соответствует очевидному факту – вклад в массу балки каждого из ее участков равнозначен.

Из краевых условий (4) следует

$$w_0 = w_N = 0, \quad M_0 = M_N = 0.$$

Положив $y_{-1} = -y_1$ и $y_{N+1} = -y_{N-1}$ уравнения (5), записанные для $i = 0$ и $i = N$ обращаются в тождества. При этом h_0 и h_N могут быть произвольными. Однако из условия минимума суммы (8) и ограничений (6) следует

$$h_0 = h_N = 0. \quad (9)$$

Учитывая (9), и тот факт что $\delta = \mathrm{const}$, целевая функция задачи оптимизации приобретает вид

$$\Phi = h_1 + h_2 + ... + h_{N-1} \to \min. \quad (10)$$

В описанной постановке целевая функция (10) является линейной, однако искомые высоты h_i связаны с перемещениями и ограничениями (7) нелинейными зависимостями (5). Поэтому трудно сказать, является ли область допустимых значений h_i выпуклой и односвязной.

Введем новые переменные

$$z_i = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{M_i}. \quad (11)$$

Из уравнений (5) и условий (6) следует

$$z_i \ge 0. \quad (12)$$

Система (11) в матричной форме может быть записана в виде

$$\mathbf{AW} = \mathbf{Z}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} M_1 z_1 & M_2 z_2 & ... & M_{N-1} z_{N-1} \end{pmatrix}^T.$$

Из (13) следует

$$w_i = \sum_{j=1}^{N-1} a_{i,j} z_j, \quad (14)$$

где $a_{i,j} = \beta_{i,j} M_j$, где в свою очередь $\beta_{i,j}$ - элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Высоты балки h_i также могут быть выражены через новые переменные:

$$h_i = \sqrt[3]{\frac{12\delta^2}{Eb}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{z_i}}. \quad (15)$$

Подставив данные выражения в (10) и опустив общий множитель, получим

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt[3]{z_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{z_{N-1}}} \to \min. \quad (16)$$

Ограничения (7) с учетом (14) после элементарных преобразований могут быть записаны в виде

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_{i,j} z_j \le d_0, \quad \sum_{j=1}^{N-1} \left(-a_{i,j}\right) z_j \le d_0, \quad (17)$$

где $i = 1, 2, ..., N-1$.

Таким образом, в новых обозначениях (11) задача оптимизации состоит из нелинейной целевой функции (16), подлежащей минимизации, и линейных ограничений на знак переменных (12) и на величину перемещений (17). Ограничения образуют выпуклую область. Кроме того, нелинейная целевая функция представляет собой сепарабельную функцию. Данное обстоятельство позволяет применить классический метод сепарабельного программирования и линейной аппроксимации [15]. Используем линейную аппроксимацию переменных

$$z_i = \sum_{k=1}^{M} z_{i,k} t_{i,k}, \quad (18)$$

где M - число точек разбиения некоторого интервала переменной z_i;

$z_{i,k}$ - выбранные точки из данного интервала;

$t_{i,k}$ - новые переменные.

Тут для удобства полагается, что каждая переменная z_i аппроксимируется при помощи одинакового для всех количества точек, что, в общем случае, не является обязательным условием.

На новые переменные накладываются условия

$$t_{i,k} \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{M} t_{i,k} = 1.$$

Назначим минимальную и максимальную высоту балки в рассматриваемых узлах h_i^{min} и h_i^{max}. Интервал $\left[h_i^{min}; h_i^{max}\right]$ разобьем на M точек, где h_i^{min} соответствует первой точке, а h_i^{max} - точке с номером M. Значения коэффициентов $z_{i,k}$ вычислим по формуле

$$z_{i,k} = \frac{12\delta^2}{Eb}\left(h_i^{min} + (k-1)\frac{h_i^{max} - h_i^{min}}{M-1}\right)^{-3}.$$

Получив набор точек, запишем задачу оптимизации в форме задачи линейного программирования:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{M} C_{i,k} t_{i,k} \to \min ,$$

$$\sum_{k=1}^{M} \left(-z_{i,k}\right) t_{i,k} \le 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_{i,j} \sum_{k=1}^{M} z_{j,k} t_{j,k} \le d_0 ,$$

$$-\sum_{j=1}^{N-1} a_{i,j} \sum_{k=1}^{M} z_{j,k} t_{j,k} \le d_0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{M} t_{i,k} = 1, \quad t_{i,k} \ge 0 , \quad i = 1, 2, ..., N-1.$$

Где коэффициенты целевой функции $C_{i,k}$ вычисляются по формуле $C_{i,k} = \frac{1}{\sqrt[3]{z_{i,k}}}$.

Решение задачи целесообразно проводить за несколько итераций, на каждом этапе уточняя и уменьшая интервалы возможных высот балки в узлах $\left[h_i^{min}; h_i^{max}\right]$. Например, задав на первой итерации интервалы заведомо широким, на последующих итерациях можно сокращать ширину интервала в несколько раз. При этом в качестве середины нового (уменьшенного) интервала брать вычисленное на предыдущей итерации оптимальное значение высоты балки h_i .

Переход от найденных в ходе решения задачи переменных $t_{i,k}$ к переменным z_i проводим по формуле (18). А затем по (15) и (14) находим высоты балки в узлах h_i и перемещения узлов балки w_i . Действуя подобным образом, за 2-3 итерации получим значения высот, которые на дальнейших итерациях практически не изменяются.

Модельная задача

Рассмотрим стальную ($E = 200$ ГПа) шарнирно опертую по краям балку длиной $L = 1$ м, шириной $b = 5$ мм. Балка нагружена силой $F = 980$ Н (100 кгс) в точке, удаленной на 0,75 м от левого конца. Для оценки эффективности алгоритма решим прямую задачу нахождения прогиба балки постоянной высоты $h_0 = 20$ мм. Вычисления показывают, что максимальный прогиб балки составляет 21,4 мм. Графики изгибающих моментов и прогибов балки постоянного сечения показаны на рис. 1. Графики даны в безразмерной форме как отношение к максимальному прогибу или моменту соответственно.

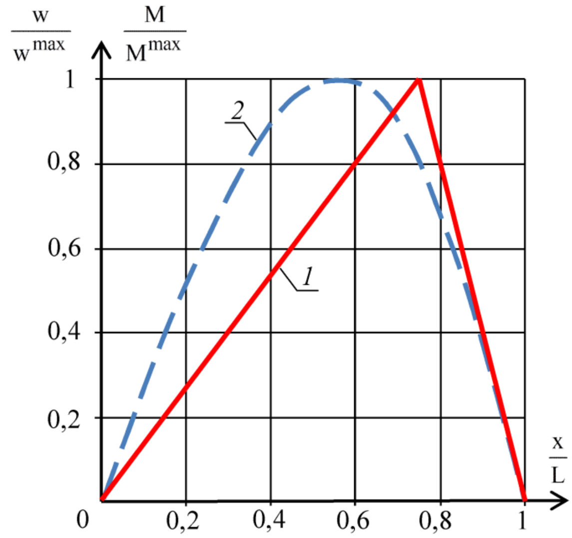

Рис. 1. Изгибающие моменты в балке (1) и прогибы (2) балки постоянного сечения

Максимальный изгибающий момент $M^{max} = 183,75$ Н·м, максимальные прогибы балки $w^{max} = 21,4$ мм.

При решении задачи оптимизации балки назначим начальные значения высот балки $h_i^{max} = 60$ мм и $h_i^{min} = 0,5$ мм для всех узлов, а максимально допустимые прогибы равными прогибам балки постоянного сечения, т.е. $d_0 = 21,4$ мм. Выполнив все необходимые вычисления (количество узлов $N = 100$, $M = 15$, три итерации), которые занимают несколько секунд, получим распределение высот балки в узлах h_i . График h_i , а также график прогибов оптимальной балки w_i показаны на рис. 2.

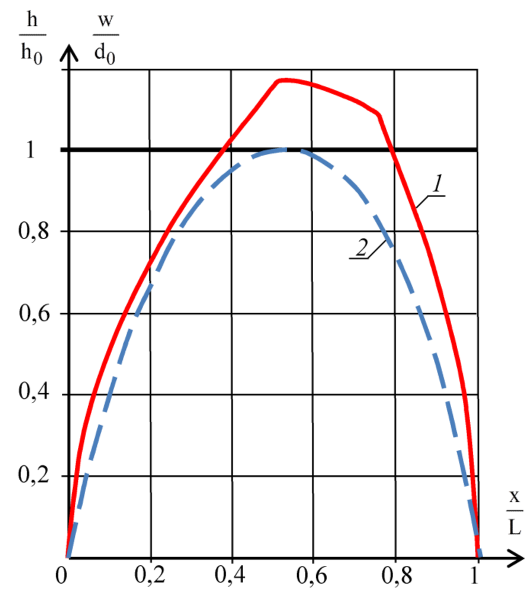

Рис. 2. Высота h (1) и перемещения w (2) балки минимального веса

ISSN 1727-7337 (print)
ISSN 2663-2217 (online)

Как видим, прогибы максимальны в точке, близкой к середине балки, а не в точке приложения силы. В этой же точке высота балки максимальна и функция высот $h(x)$ имеет излом. Второй излом расположен в точке приложения нагрузки.

Для оценки эффективности оптимизации сравним значения целевой функции (2) в обоих рассмотренных случаях. Балка постоянного сечения:

$$h_0 L = 0,02 \text{ м}^2.$$

Оптимальная балка:

$$\int_0^L h(x)dx = 0,017 \text{ м}^2.$$

Таким образом, благодаря оптимальному перераспределению материала, массу балки удалось снизить на 15 % при тех же самых максимальных прогибах.

Заключение

Предложен алгоритм численного решения задачи оптимального проектирования балки при наличии ограничения на величину прогиба балки. Дискретизация балки позволяет использовать метод конечных разностей для описания прогиба балки и применить методы исследования операций. Предложена замена переменных, которая позволяет свести задачу оптимального проектирования к задаче нелинейного программирования с нелинейной, но сепарабельной целевой функцией и линейными ограничениями. Дискретизация балки по длине и по толщине является вполне естественной для балок, изготовленных из слоистых композитов. Предложенная методика решения задачи на этапе линеаризации целевой функции учитывает и возможные ограничения на высоту балки.

Предложенный подход может быть развит и обобщен. В частности, могут быть решены:

- задача оптимального проектирования балки двутаврого сечения с как постоянной, так и переменной по длине шириной полок;
- задача проектирования статически неопределимой балки произвольного поперечного сечения, в том числе переменной ширины;
- задача проектирования криволинейных балок произвольного поперечного сечения и т.д.

В математическую модель могут быть включены дополнительные ограничения. Которые могут учитывать, например:

- несколько случаев нагружения;
- ограничения по прочности;
- ограничения по потере устойчивости.

Кроме того, данный подход может быть развит на динамические задачи [16] и быть использован для оптимизации конструкции, на которую накладываются ограничения на динамические прогибы.

Литература

1. *Кондратьев, А. В. Обзор и анализ существующих методологий оптимального проектирования композитных агрегатов ракетно-космической техники [Текст] / А. В. Кондратьев // Авиационно-космическая техника и технология. - 2018. - № 6. - С. 52–66.*
2. *Hasan Imam, M. Three- dimensional shape optimization [Text] / M. Hasan Imam // International Journal For Numerical Methods In Engineering. – 1982. - Vol. 18. – P. 661-673. DOI: 10.1002/nme.1620180504.*
3. *Eschenauer, H. A. Topology optimization of continuum structures: a review [Text] / H. A. Eschenauer, N. Olhoff // Appl. Mech. Rev. – 2001. – Vol. 54(4). – P. 331-390. DOI:10.1115/1.1388075.*
4. *Баничук, Н. В. Оптимизация форм упругих тел [Текст] / Н. В. Баничук. – М. : Наука, 1980. – 256 с.*
5. *Баничук, Н. В. Введение в оптимизацию конструкций [Текст] / Н. В. Баничук. – М. : Наука, 1986. – 304 с.*
6. *Алёхин, В. В. Проектирование поперечнослоистой консоли минимальной массы при ограничении на максимальный прогиб [Текст] / В. В. Алёхин // Прикладная механика и техническая физика. - 2007. - Т. 48. № 4. - С. 104-110.*
7. *Оптимизация гибких балок [Текст] / Н. В. Баничук, А. А. Барсук, С. Ю. Иванова, Е. В. Макеев // Изв. РАН. МТТ. - 2010. - № 5. - С. 57-70.*
8. *Abdalla, H. M. On the longest reach problem in large deflection elastic rods [Text] / H. M. Abdalla, D. Casagrande // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2020. – Vol. 119. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103310.*
9. *Pre-bent shape design of full free-form curved beams using isogeometric method and semi-analytical sensitivity analysis [Text] / S. F. Hosseini, B. Moetakef-Imani, S. Hadidi-Moud, et al. // Struct. Multidisc. Optim. – 2018. – Vol. 58. – P. 2621–2633. DOI: 10.1007/s00158-018-2041-0.*
10. *Упругие балки минимального веса, при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок [Электронный ресурс] / А. А. Гурченков, Н. Т. Вилисова, И. И. Герман, А. М. Романенков // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2015. - Вып. 5. https://rucont.ru/efd/350736. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-9-1531.*
11. *Карпов, Я. С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник [Текст] / Я. С. Карпов. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.*

12. Гагауз, Ф. М. Оптимизация конструктивных параметров балок и лонжеронов из композиционных материалов [Текст] / Ф. М. Гагауз, Я. С. Карпов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. - 2017. - Вып. 3. - С. 15-21.

13. Сейранян, А. П. Оптимальное проектирование балок при ограничениях по прогибам [Текст] / А. П. Сейранян // Известия АН Армянской СССР. Серия Механика. – 1975. - Вып. 2, № 6. - С. 24-33.

14. Banichuk, N. V. Variational method for non-classical problems of mechanics with constraints based on finite elements approximations and local variations [Text] / N. V. Banichuk, E. V. Makeev // PNRPU Mechanics Bulletin. - 2017. - № 3. - P. 37-52. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.03.

15. Вагнер, Г. Основы исследования операций. Том 2. [Текст] : пер. с англ. / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1973. – 489 с.

16. Куреннов, С. С. Численный метод расчета динамических напряжений в клеевом соединении [Текст] / С. С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. - 2010. - Вып. 4. - С. 133-139.

References

1. Kondratev, A. V. Obzor i analiz sushestvuyushih metodologij optimalnogo proektirovaniya kompozitnyh agregatov raketno-kosmicheskoj tehniki [Review and analysis of existing methodologies for the optimal design of composite units of rocket and space technology]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2018, no. 6, pp. 52-66.

2. Hasan Imam, M. Three- dimensional shape optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 1982, vol. 18, pp. 661-673. DOI: 10.1002/nme.1620180504.

3. Eschenauer, H. A., Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures: a review. *Appl. Mech. Rev*, 2001, vol. 54(4), pp. 331-390. DOI: 10.1115/1.1388075.

4. Banichuk, N. V. *Optimizacija form uprugih tel* [Optimization of the forms of elastic bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 256 p.

5. Banichuk, N. V. *Vvedenie v optimizaciju konstrukcij* [Introduction to Structural Optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 304 p.

6. Aljohin, V. V. Proektirovanie poperechno-sloistoj konsoli minimal'noj massy pri ograni-chenii na maksimal'nyj progib [Design of a transversely-layered cantilever of minimum weight with limitation on maximum deflection]. *Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 104-110.

7. Banichuk, N. V., Barsuk, A. A., Ivanova, S. Ju., Makeev, E. V. Optimizacija gibkih balok [Optimization of flexible beams]. *Izv. RAN. MTT*, 2010, no. 5, pp. 57-70.

8. Abdalla, H. M., Casagrande, D. On the longest reach problem in large deflection elastic rods. *Int. J. of Non-Linear Mech*, 2020, vol. 119, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103310.

9. Hosseini, S.F., Moetakef-Imani, B., Hadidi-Moud, S. et al. Pre-bent shape design of full free-form curved beams using isogeometric method and semi-analytical sensitivity analysis. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2018, vol. 58, pp. 2621-2633. DOI: 10.1007/s00158-018-2041-0.

10. Gurchenkov, A. A., Vilisova, N. T., German, I. I., Romanenkov, A. M. Uprugie balki minimal'nogo vesa, pri nalichii neskol'kih vidov izgibajushhih nagruzok [Elastic beams of minimum weight, in the presence of several types of bending loads]. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii*, 2015, vol. 5, DOI: 10.18698/2308-6033-2016-9-1531.

11. Karpov, Ja. S. *Proektirovanie detalej i ag-regatov iz kompozitov: uchebnik* [Designing parts and assemblies from composites: a textbook]. Kharkiv, KhAI Publ., 2010. 768 p.

12. Gagauz, F. M., Karpov, Ja. S. Optimizacija konstruktivnyh parametrov balok i lonzheronov iz kompozici-onnyh materialov [Optimization of structural parameters of beams and spars from composite materials] *Voprosy proektirovaniya i proizvodstvakonstruktsii letatel'nykh apparatov*, 2017, no. 3, pp. 15-21.

13. Sejranjan, A. P. Optimal'noe proektirova-nie balok pri ogranichenijah po progibam [Optimum beam design with deflection limitations] *Izvestija AN Armjanskoj SSSR. Serija Mehanika*, 1975, no. 6, pp. 24-33.

14. Banichuk, N. V., Makeev, E. V. Variational method for non-classical problems of mechanics with constraints based on finite elements approximations and local variations. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 3, pp. 37-52. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.03.

15. Vagner, G. *Osnovy issledovanija operacij. T. 2.* [Fundamentals of operations research. Vol. 2]. Moscow. Mir Publ., 1973. 489 p.

16. Kurennov, S. S. Chislennyj metod rascheta dinamicheskih napryazhenij v kleevom soedinenii [Numerical method for calculating dynamic stresses in adhesive joint]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstvakonstruktsii letatel'nykh apparatov*, 2010, no. 4, pp. 133-139.

Поступила в редакцию 12.12.2019, рассмотрена на редколлегии 20.01.2020

ISSN 1727-7337 (print)
ISSN 2663-2217 (online)

ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА МАКСИМАЛЬНИЙ ВИГИН

С. С. Курєннов

Розв'язана задача зі знаходження оптимального розподілу висоти балки за довжиною конструкції за наявності обмеження на максимальну величину прогину. Проведено огляд літератури, і показано, що відомі розв'язки або помилкові, оскільки засновані на помилкових гіпотезах, або мають вузьку область застосування, обмежуючись лише симетричними конструкціями, для яких точка максимальних прогинів відома заздалегідь. В роботі розглядається балка прямокутного перетину постійної ширини. Балка покладається статично визначною, а навантаження - довільним, в тому числі несиметричним та різноспрямованим. Точки (або точка), в яких прогини балки максимальні - заздалегідь невідомі і визначаються в результаті розв'язання задачі. Розглядається лінійна постановка задачі. Критерієм оптимізації є маса балки. Для знаходження прогинів балки, тобто для розв'язання диференціального рівняння вигину балки змінного перерізу використовується метод скінчених різниць. Задача проектування зведена до знаходження потрібних висот балки в системі вузлових точок. При цьому шуканий розв'язок має задовольнити системі обмежень на переміщення вузлових точок і на знак змінних. Оскільки обмеження на переміщення кожного вузла розглядаються окремо і незалежно, запропонована методика дозволяє легко управляти обмеженнями на переміщення балки. За допомогою запропонованої в роботі заміни змінних задача проектування балки зведена до задачі нелінійного програмування, в якій цільова функція є сепарабельною, а обмеження – лінійними функціями. Дана задача за допомогою лінеаризації зведена до задачі лінійного програмування щодо нових змінних. Розв'язана модельна задача, і показано, що запропонований алгоритм дозволяє ефективно розв'язувати задачі оптимального проектування балок за наявності обмежень на максимальну величину прогину. Запропонований підхід може бути розвинений на наявність обмежень по міцності, на балки змінної ширини, двотаврового поперечного перерізу і т.п.

Ключові слова: балка; оптимізація; обмеження; метод скінчених різниць; проектування.

OPTIMUM DESIGN OF A STATICALLY DEFINABLE BEAM WITH LIMITATION ON THE MAXIMUM BEAM DEFLECTION

S. S. Kurennov

Here is solved the optimization problem for the longitudinal depth distribution in the beam with a limitation on the maximum value of deflection. A review of the references is done, and it is shown that the known solutions are either erroneous, because they are based on false hypotheses, or have a narrow field of application, limited only to symmetrical constructions for which the point of the maximum deflection is known a priori. The paper considers a beam of the rectangular cross-section of constant width. The beam is assumed to be statically determinate, and the load is arbitrary and asymmetric and multidirectional as well. The points (or point) of the beam maximum deflections are unknown in advance and would be determined in the problem-solution procedure. A linear problem is considered. The optimization criterion is the mass of the beam. To find the deflections of the beam, i.e. to solve the differential equation of a variable cross-section beam bending the finite difference method is used. The design problem is reduced to the required beam depths obtaining in the system of nodal points. In this case, the desired solution must satisfy the restriction system for the nodal points shift and the sign of variables as well. Since the restrictions of the shift of each node are considered separately and independently, so the proposed method allows flexible control of the beam shift restrictions. Using the change of variables proposed in the paper, the problem to be solved is reduced to a nonlinear programming problem where the criterion function is separable and restrictions are linear functions. Using linearization, this problem can be reduced to the linear programming problem relatively to new variables. The model problem is solved, and it is shown that the proposed algorithm efficiently allows us to solve the problems of the beam optimal design with the restrictions of the maximally allowed deflection. The proposed approach can be spread for the strength limitations, for beams of variable width, I-beam cross-section, etc.

Keywords: beam; optimization; constraints; finite difference method; optimal design.

Куреннов Сергей Сергеевич – д-р техн. наук, доц., проф. каф. высшей математики и системного анализа, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Kurennov Sergey – Doctor of Science of Engineering Science, Associate Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, e-mail: kurennov.ss@gmail.com,
ORCID Author ID: 0000-0002-3835-3288, Scopus Author ID: 11839716000.