

УДК 621.396:681.34

**А.А. РОЕНКО, В.В. ЛУКИН, А.В. ТОЦКИЙ**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РОБАСТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ БИСПЕКТРАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ**

Рассмотрены методы восстановления сигналов, основанные на биспектральном анализе. Показано, что при малом отношении сигнал/шум преобладающее влияние на оценку биспектра оказывают слагаемые с законом распределения, отличным от гауссова. Предложены методы формирования биспектральной оценки по ансамблю реализаций с использованием робастных процедур, в качестве которых исследованы медианная и мириадная оценки.

**биспектральная оценка, робастная процедура, закон распределения**

### **Введение**

Во многих прикладных задачах процесс обработки данных вызывает значительные трудности, связанные с тем, что исходная информация искажена помехами различного типа. При этом статистические характеристики шума часто априори неизвестны, а если и определены, то частично и неточно. Такая ситуация характерна при обнаружении и распознавании сигналов на фоне помех в радиолокации, гидроакустике и радиоастрономии, а также в системах дистанционного зондирования и в диагностических системах обработки данных [1 – 3]. Поэтому вопросы повышения эффективности и практической реализации разнообразных методов фильтрации и восстановления сигналов на фоне помех вызывают неизменный интерес у широкого круга специалистов в различных областях науки и техники.

Помимо априорной неопределенности характеристик помех ещё одним важным параметром, оказывающим влияние на качество восстановления полезного сигнала, является отношение сигнал/шум. На практике при использовании традиционных методов фильтрации и восстановления сигналов требуемую точность оценивания удается реализовать обычно при больших ( $\gg 1$ ) значениях этого параметра. Однако в ряде важных практических задач в указанных выше приложениях отношение сигнал/шум на входе системы обработки не превышает единицу.

Одним из перспективных подходов к решению таких задач является метод восстановления сигналов и изображений с использованием биспектрального анализа [4]. Несмотря на большую сложность вычисления тройных корреляционных функций (ТКФ) и биспектров по сравнению с обычными корреляционными функциями и энергетическими спектрами, моменты третьего порядка отличаются несколькими принципиальными преимуществами [5]:

– во-первых, ТКФ или биспектры позволяют сохранить комплексный Фурье-спектр сигнала и, следовательно, восстановить информацию о форме исходного сигнала;

– во-вторых, ТКФ (нечетный момент) гауссова шума стремится к нулю, что обеспечивает в ряде практических приложений устойчивость алгоритмов восстановления негауссовых сигналов к воздействию аддитивного гауссова шума;

– в-третьих, биспектр инвариантен к смещению исходного сигнала.

При так называемом прямом биспектральном методе [6] формирование биспектральной оценки (БО) предусматривает следующие этапы:

1) для каждой реализации находят выборочную БО с использованием прямого преобразования Фурье (ППФ);

2) оценку биспектра для всех реализаций получают путем обычного усреднения БО всех наблюдаемых реализаций.

Затем с помощью рекурсивного алгоритма [2] восстанавливают амплитудный и фазовый Фурье-спектр сигнала. На заключительном этапе для формирования оценки восстановленного сигнала применяют обратное преобразование Фурье.

При больших отношениях сигнал/шум усреднение является оптимальной операцией формирования БО с точки зрения эффективности подавления шума, так как вещественная (*Re*) и мнимая (*Im*) компоненты БО для всех независимых реализаций, являющихся комплексными двумерными функциями, имеют плотности распределения вероятности (ПРВ), близкие к нормальному закону [6, 7]. Однако, когда отношение сигнал/шум становится  $\leq 1$ , ситуация меняется. В этом случае закон распределения вероятности становится отличным от нормального [7] и, следовательно, усреднение уже не является оптимальной процедурой [8].

В связи с этим актуальной задачей представляется разработка и исследование других, отличных от традиционного усреднения, желательных оптимальных, методов формирования БО. Однако в условиях отсутствия априорных сведений о сигнале и помехах это является нетривиальной задачей. Поэтому в данной работе для улучшения БО при обработке реализаций вместо операции нахождения среднего (*mean*) рассмотрена возможность применения робастных оценок [8]. В качестве таковых используются медиана (*med*) [9] и мириада (*myriad*) [10].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим вещественный стационарный одномерный процесс  $\{x^{(m)}(i)\}$ , наблюдаемый в виде дискретной последовательности  $i = 0, 1, 2, \dots, I-1$  отсчетов во временной области по набору  $m = 1, 2, \dots, M$  независимых реализаций  $x^{(m)}(i)$ . Положим также, что данный процесс является смесью двух составляющих: сигнальной  $s(i-\tau^{(m)})$  и шумовой  $n^{(m)}(i)$ , где  $\tau^{(m)}$  – случайный сдвиг исходного информационного детерминированного сигнала,  $n^{(m)}(i)$  –  $m$ -ая реализа-

ция белого аддитивного стационарного гауссова шума с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией  $\sigma_G^{(m)2}$ . Таким образом, уравнение наблюдения можно представить в следующем виде:

$$x^{(m)}(i) = s(i-\tau^{(m)}) + n^{(m)}(i). \quad (1)$$

Выборочную  $m$ -ю оценку биспектра  $\hat{B}_x^{(m)}(p, q)$  наблюдения (1) в соответствии с прямым методом запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{B}_x^{(m)}(p, q) &= \dot{X}^{(m)}(p)\dot{X}^{(m)}(q)\dot{X}^{(m)*}(p+q) = \\ &= \left| \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right| \exp(j\hat{\gamma}_x^{(m)}(p, q)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\dot{X}^{(m)}(\dots) = \text{ППФ}[x^{(m)}(i)] = \dot{S}^{(m)}(\dots) + \dot{N}^{(m)}(\dots)$  – прямое преобразование Фурье (ППФ)  $m$ -й реализации;  $\left| \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right|$  и  $\hat{\gamma}_x^{(m)}(p, q)$  – амплитудный и фазовый биспектры соответственно;  $\dot{S}^{(m)}(\dots)$  и  $\dot{N}^{(m)}(\dots)$  – ППФ сигнала и шума соответственно;  $p = 0, 1, \dots, I-1$ ,  $q = 0, 1, \dots, I-1$  – индексы независимых частот в биспектральной области.

Исходя из выражения для  $\dot{X}^{(m)}(\dots)$ , БО (2) для  $m$ -й реализации можно представить как [7]:

$$\hat{B}_x^{(m)}(p, q) = \hat{B}_S^{(m)}(p, q) + \hat{B}_N^{(m)}(p, q), \quad (3)$$

где  $\hat{B}_S^{(m)}(p, q)$  – БО сигнала;  $\hat{B}_N^{(m)}(p, q)$  – шумовая компонента БО, наличие которой вызвано присутствием аддитивной помехи на входе системы.

Последнее слагаемое в выражении (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{B}_N^{(m)}(p, q) &= \dot{S}(p)\dot{S}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(p)\dot{S}^*(p+q)\dot{N}^{(m)}(q)e^{j\tau^{(m)}q} + \\ &+ \dot{S}(q)\dot{S}^*(p+q)\dot{N}^{(m)}(p)e^{j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(q)\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}q} + \\ &+ \dot{S}^*(p+q)\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)e^{j\tau^{(m)}(p+q)} + \\ &+ \dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q). \end{aligned} \quad (4)$$

При больших отношениях сигнал/шум закон распределения вероятности *Re* и *Im* компонент  $\hat{B}_N^{(m)}(p, q)$  зависит, в основном, от первых трёх слагаемых. Он близок к нормальному, поскольку член

$\dot{N}^{(m)}(\dots)$  для принятой модели помехи  $n^{(m)}(i)$  является реализацией белого гауссового шума с нулевым математическим ожиданием. Таким образом, в этом случае оптимальной операцией формирования БО для всех реализаций является усреднение

$$\hat{B}_x(p, q) = \left\langle \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right\rangle_M, \quad (5)$$

где  $\langle \dots \rangle_M$  – операция усреднения по ансамблю  $M$  наблюдаемых реализаций.

Однако, совершенно иная ситуация имеет место, когда дисперсия шумов становится соизмеримой с мощностью сигнала. Рассмотрим этот случай более детально и исследуем плотности распределения вероятностей слагаемых, содержащих произведения двух и трех шумовых компонент.

## 2. Анализ статистических характеристик оценок биспектров и предлагаемые методы их обработки

Представим член  $\dot{N}^{(m)}(\dots)$  в следующем виде:

$$\dot{N}^{(m)}(\dots) = \text{ППФ}[n^{(m)}(i)] = N_{\text{Re}}^{(m)}(\dots) + jN_{\text{Im}}^{(m)}(\dots), \quad (6)$$

где  $N_{\text{Re}}$  и  $N_{\text{Im}}$  – *Re* и *Im* компоненты ППФ  $n^{(m)}(i)$ , каждая из которых является реализацией белого стационарного гауссового шума с нулевым математическим ожиданием (МО) и выборочными дисперсиями  $\sigma_{\text{Re}}^{(m)2} = \sigma_{\text{Im}}^{(m)2}$ , пропорциональными  $\sigma_G^{(m)2}$ .

Слагаемые с 4-го по 6-е в (4), например, член  $\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}$  можно представить в виде *Re* и *Im* компонент как:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}] &= N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) \times \\ &\times \{S_{\text{Re}}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{\text{Im}}(p)\sin\tau^{(m)}p\} - N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) \times \\ &\times \{S_{\text{Re}}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{\text{Im}}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + \\ &+ N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) \times \{S_{\text{Re}}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{\text{Im}}(p)\cos\tau^{(m)}p\} + \\ &+ N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) \times \{S_{\text{Re}}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{\text{Im}}(p)\cos\tau^{(m)}p\}; \end{aligned} \quad (7, a)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}[\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}] &= N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) \times \\ &\times \{S_{\text{Im}}(p)\cos\tau^{(m)}p - S_{\text{Re}}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) \times \\ &\times \{S_{\text{Re}}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{\text{Im}}(p)\cos\tau^{(m)}p\} + \\ &+ N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) \times \{S_{\text{Re}}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{\text{Im}}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + \\ &+ N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) \times \{S_{\text{Im}}(p)\sin\tau^{(m)}p + S_{\text{Re}}(p)\cos\tau^{(m)}p\}. \end{aligned} \quad (7, б)$$

Анализ выражений (7,а, б) показывает, что каждая компонента содержит четыре слагаемых, представляющих собой произведение случайной величины вида  $N(\dots) \cdot N(\dots)$ , и сигнално-зависимых множителей, которые также являются случайными вследствие неопределенности  $\tau^{(m)}$ .

Найдем ПРВ произведения двух случайных гауссовых процессов  $x$  и  $y$ . Для этого запишем закон распределения каждого процесса следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right); \\ f_2(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y} \cdot \exp\left(-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – СКО;  $m_x$  и  $m_y$  – математические ожидания (в рассматриваемом случае  $m_x = m_y = 0$ ).

Для определения ПРВ процесса  $z = xy$  воспользуемся выражением, приведенным в [11]:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) \frac{dx}{|x|}. \quad (9)$$

Учитывая, что  $y = z/x$ , формулу (9) можно переписать в виде

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) \frac{dx}{|x|} = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{x^2 2\sigma_y^2}\right) \frac{dx}{|x|}, \quad (10)$$

где  $A = (2\pi\sigma_x\sigma_y)^{-1}$ .

Так как функция  $g(z)$  является четной относительно  $x$ , то последнее выражение принимает вид

$$g(z) = 2A \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{x^2 2\sigma_y^2}\right) \frac{dx}{x}. \quad (11)$$

После замены переменных  $x^2 = t$ ,  $dx = dt(2\sqrt{t})^{-1}$ :

$$g(z) = A \int_0^{\infty} \exp\left(-t\gamma - \frac{\beta}{t}\right) \frac{dt}{t}, \quad (12)$$

где  $\gamma = (2\sigma_x^2)^{-1}$ ,  $\beta = z^2/2\sigma_y^2$ .

Решение этого интеграла можно записать в виде:

$$g(z) = A \int_0^{\infty} t^{\nu-1} \exp\left(-t\gamma - \frac{\beta}{t}\right) dt = 2A \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\nu/2} \cdot K_{\nu}\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right), \quad (13)$$

при условии  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$  ([12], 3.471-9).

В данном случае  $v = 0$  :

$$g(z) = 2A \cdot K_0(z/\sigma_x \sigma_y), \quad (14)$$

где  $K_0(z/\sigma_x \sigma_y)$  – цилиндрическая функция мнимого аргумента, которая принимает действительные значения только при действительном значении аргумента [13].

Раскладывая функцию  $K_0(\dots)$  в ряд [13]:

$$K_0(x) = \sqrt{\pi/2x} \cdot e^{-x} + \dots, \quad (15)$$

и отбросив слагаемые более высокого порядка малости, окончательно получим:

$$g(z) = B \cdot \sqrt{1/z} \cdot \exp\left(-\frac{z}{\sigma_x \sigma_y}\right), \quad (16)$$

где  $B = A \cdot \sqrt{2\pi\sigma_x\sigma_y} = (\sqrt{2\pi\sigma_x\sigma_y})^{-1}$ .

Выражение (16) показывает, что ПРВ произведения двух случайных величин с нормальным законом распределения отличается от Гауссова и имеет тяжелые хвосты. Так как каждая из формул (7,а) и (7,б) содержит сумму четырех членов с ПРВ вида (16), то закон распределения суммы данных членов вещественной и мнимой компонент 4-го, 5-го и 6-го членов в (4) хотя и отличается от (16), однако имеет более тяжелые хвосты по сравнению с нормальным распределением, что подтверждают стандартные тесты [11].

Последнее слагаемое в (4) также оказывает влияние на вид ПРВ БО. Рассмотрим его более подробно. С учетом (6) получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)\} &= N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(q) \times \\ &\times N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p+q) + N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p+q) + N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p) \times \\ &\times N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p+q) - N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p+q); \end{aligned} \quad (17,а)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)\} &= N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(q) \times \\ &\times N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p+q) + N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p+q) + N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p) \times \\ &\times N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p+q) - N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(p)N_{\operatorname{Re}}^{(m)}(q)N_{\operatorname{Im}}^{(m)}(p+q). \end{aligned} \quad (17,б)$$

Анализ выражений (17, а, б) показывает, что вид ПРВ члена  $\dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)*}(\dots)$  зависит от закона распределения произведения трёх стационарных гауссовых случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Из-за сложности выво-

да аналитического выражения для ПРВ процесса, который является, произведением трех распределенных по нормальному закону процессов, характеристики процесса вида  $\dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)*}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)}(\dots)$  исследовались численным моделированием. Гистограмма распределения для вещественной и мнимой частей показана на рис. 1.

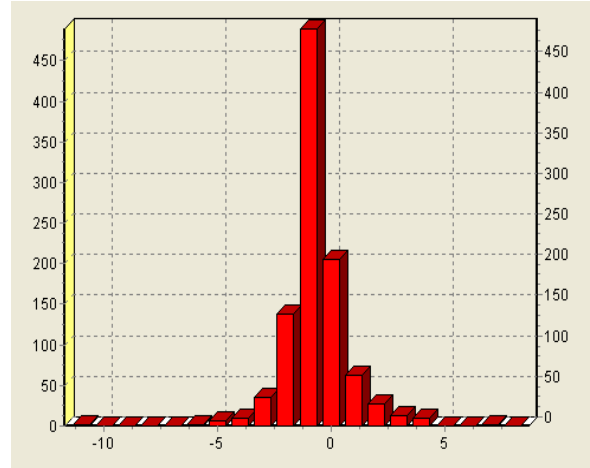


Рис. 1. Пример гистограммы шумовых компонент (17, а) и (17, б)

Коэффициент эксцесса в этом случае равен  $7 \dots 7,5$ , что подтверждает негауссов характер ПРВ.

Таким образом, проведенный анализ свидетельствует о том, что при малых отношениях сигнал/шум закон распределения вероятности БО становится отличным от нормального.

Для улучшения точности восстановления сигнала в присутствии аддитивного гауссового шума на входе биспектральной системы восстановления сигналов ниже исследована возможность применения робастных процедур, таких как медиана и мириада при формировании БО по наблюдаемому ансамблю реализаций. БО, получаемая при использовании медианы, записывается следующим образом:

$$\hat{B}_{\operatorname{med}}(p, q) = \operatorname{med}_m[\operatorname{Re}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))] + j \operatorname{med}_m[\operatorname{Im}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))]. \quad (18)$$

Свойства мириадной оценки зависят от настроенного параметра  $k$  [10]. Согласно [14], мириада эффективно подавляет помехи смешанного типа (гауссовы и импульсные шумы) в случае, когда  $k \approx 2\sigma_p$ , где  $\sigma_p$  – СКО основного распределения

помехи. В ситуации, когда  $\sigma_p$  неизвестно, можно использовать робастную оценку [9]:

$$\sigma_p = 1,483 \cdot \text{med}_m \left| \widehat{B}_X^{(m)}(p, q) - \text{med}_m(\widehat{B}_X^{(m)}(p, q)) \right|. \quad (19)$$

При использовании мириадной операции, выражение для БО имеет вид

$$\widehat{B}_{\text{мр}}(p, q) = \text{mрr}_m[k_1, \text{Re}(\widehat{B}_X^{(m)}(p, q))] + j \text{mрr}_m[k_2, \text{Im}(\widehat{B}_X^{(m)}(p, q))], \quad (20)$$

где  $k_1 \approx 2\sigma_{p\text{Re}}$  и  $k_2 \approx 2\sigma_{p\text{Im}}$ , эти оценки СКО получены для выборок значений вещественной и мнимой частей БО отдельно в соответствии с (19).

### 3. Результаты моделирования

Для проведения статистических исследований предложенных методов была использована специализированная модифицированная программа “Bispectr”. Данное программное обеспечение позволяет исследовать одномерные сигналы различной формы, искаженные гауссовым и импульсным шумами, а также моделировать случайные сдвиги исходного сигнала. На рис. 2 приведен исходный тестовый сигнал, наблюдаемый на сетке длительностью 256 отсчетов и состоящий из двух близкорасположенных импульсов прямоугольной формы с различными амплитудами  $A_1=2$ ,  $A_2=6$  и относительным сдвигом между импульсами  $\Delta t = 6$ .

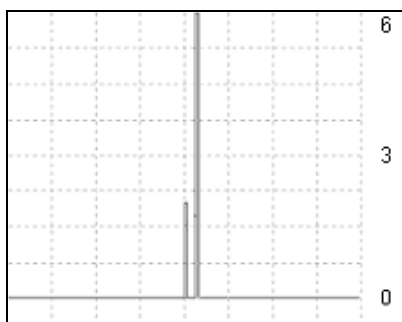


Рис. 2. Тестовый сигнал без шума

Длительности импульсов  $t_1$  и  $t_2$  составляли 2 отсчета. Тестовый сигнал подвергался случайным смещениям, меняющимся от реализации к реализации с девиацией, равной  $\pm 12$  отсчетов. Реализация тестового сигнала, искаженного аддитивным гауссовым шумом и случайным смещением показана на рис. 3.

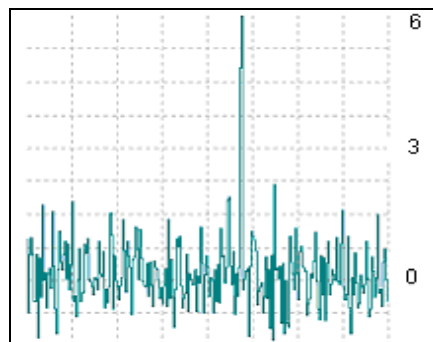


Рис. 3. Реализация тестового сигнала, искаженная аддитивным гауссовым шумом и случайным смещением

С учетом свойств симметрии биспектра [6] при восстановлении амплитудного и фазового Фурье-спектров сигнала достаточно использовать всего лишь 1/8 часть биспектра, ограниченную главной треугольной областью. На рис. 4, 5 в виде изображений визуализированы соответственно значения коэффициента эксцесса и дисперсии, рассчитанные для вещественной части оценок  $\{\widehat{B}_X^{(m)}(p, q), m = 1, \dots, M\}$ . Массивы значений приведены не полностью, показана лишь их 1/4 часть, для которой хорошо видна их симметричность относительно диагонали. Для данного случая отношение сигнал/шум на входе равно 6,27; количество реализаций  $M = 32$ ; эксперимент повторялся  $K = 30$  раз. При визуализации значения, расположенные на главной диагонали, были обнулены. Более ярким пикселям на рис. 4, 5 соответствуют большие значения коэффициента эксцесса и дисперсии и наоборот. Значения дисперсии достаточно велики для тех частотных индексов  $p$  и  $q$ , для которых велики значения модуля  $\widehat{B}_S^{(m)}(p, q)$ , и, соответственно, основной вклад в  $\widehat{B}_N^{(m)}(p, q)$  вносят первые три слагаемых в (4), которые характеризуются гауссовыми ПРВ вещественной и мнимой компонент. Именно для таких  $p$  и  $q$  значения коэффициента эксцесса стремятся к нулю (показаны темным цветом). Для тех же  $p$  и  $q$ , для которых дисперсия невелика (темный цвет на рис. 5) и вид ПРВ обусловлен слагаемыми с 4-го по 7-е в (4), имеет место явная негауссовость, вслед-

ствие чего значения коэффициента эксцесса велики (более светлые пиксели на рис. 4).

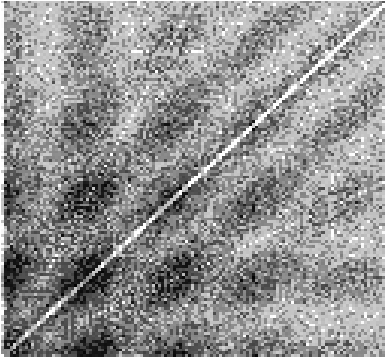


Рис. 4. Коэффициент эксцесса Ре БО

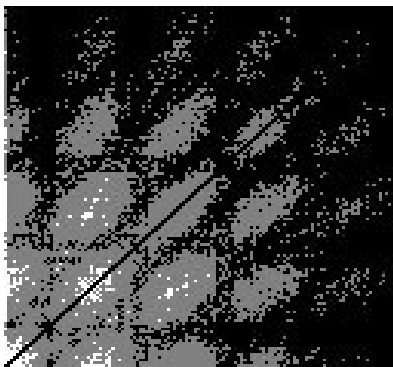


Рис. 5. Дисперсия Ре БО

Таким образом, для разных  $p$  и  $q$  ПРВ неодинаковы и зависят как от спектральных характеристик сигнальной составляющей, так и интенсивности помех. Причем априорная информация об этих характеристиках либо полностью отсутствует (напомним, что решается задача восстановления сигнала неизвестной формы), либо ограничена.

#### 4. Анализ результатов восстановления тестовых сигналов

Для количественной оценки и сравнительного анализа эффективности восстановления сигналов с использованием различных операций формирования БО ансамбля реализаций, проведены расчет и анализ следующих параметров:

– выходной дисперсии флуктуаций  $\bar{\sigma}_{out}^2$  (output variance):

$$\bar{\sigma}_{out}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [\hat{s}_k(i) - \bar{s}(i)]^2 \right\}, \quad (21)$$

где  $\bar{s}(i) = \left\{ \sum_{k=1}^K \hat{s}_k(i) \right\} / K$ ;  $\hat{s}_k(i)$  –  $k$ -я оценка процесса;

$K$  – количество экспериментов;

– динамической ошибки  $\delta_{out}^2$  восстановления формы сигнала (bias):

$$\delta_{out}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - \bar{s}(i)]^2. \quad (22)$$

Зависимости  $\bar{\sigma}_{out}^2$  и  $\delta_{out}^2$  от отношения сигнал/шум на входе ( $\overline{SNR}_{inp}$ ) для различного количества реализаций  $M$  при обработке тестового сигнала, изображенного на рис. 2, показаны на рис. 6 – 11.

Для каждого значения  $\overline{SNR}_{inp}$  и количества реализаций  $M$  использовалось  $K = 30$  экспериментов.

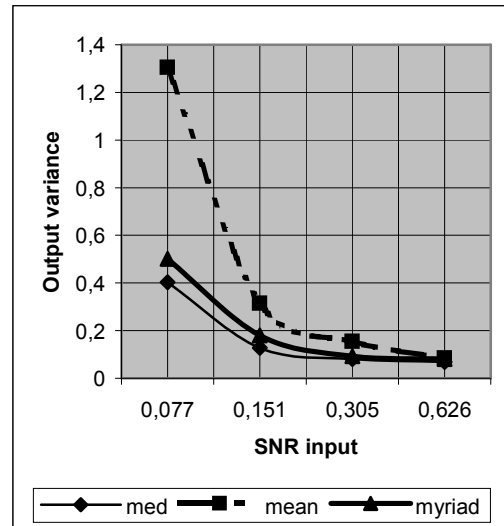


Рис. 6. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 32$

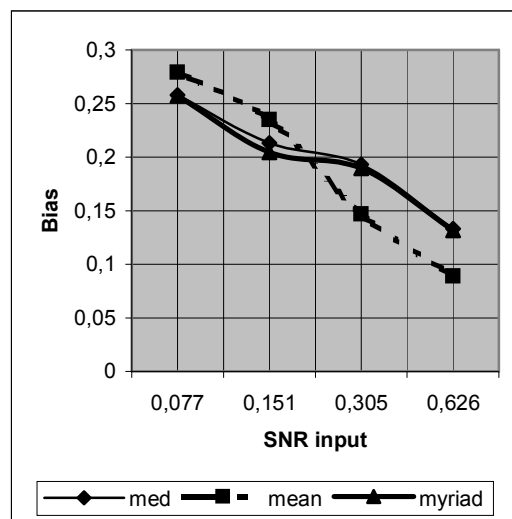


Рис. 7. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 32$

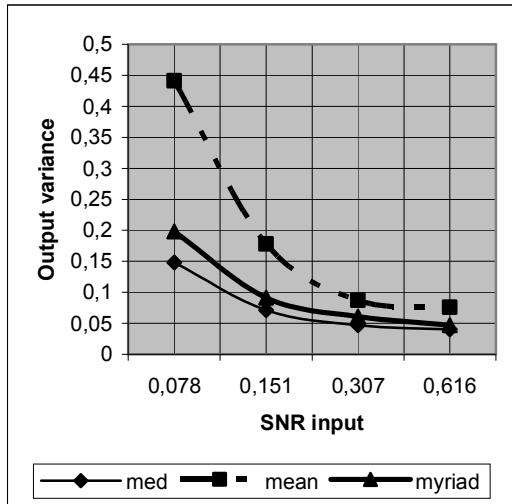


Рис. 8. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 64$

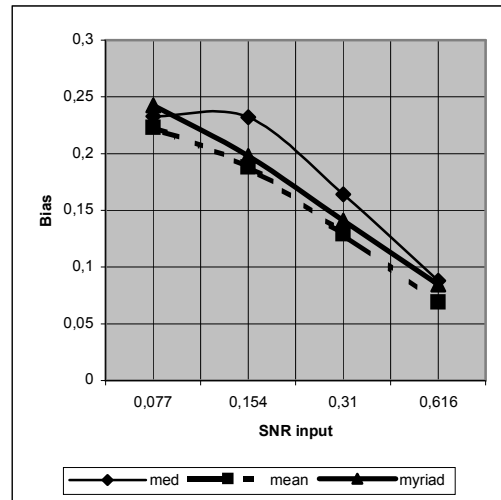


Рис. 11. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 128$

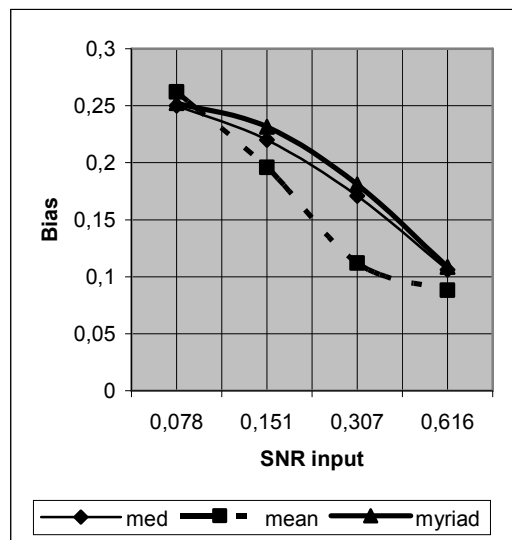


Рис. 9. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 64$

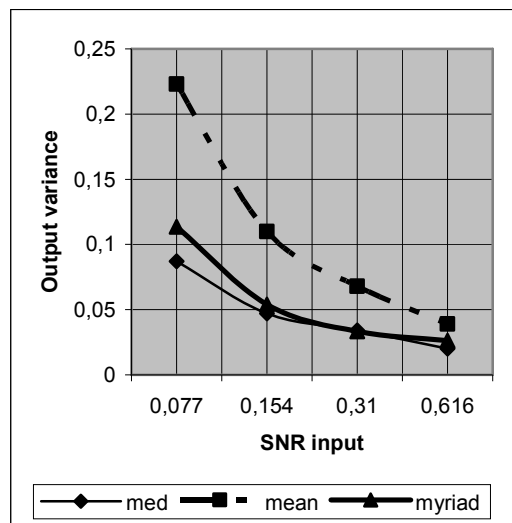


Рис. 10. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 128$

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы:

- для всех рассматриваемых отношений сигнал/шум значения  $\bar{\sigma}_{out}^2$  лучше (меньше) в случае применения предложенных робастных процедур;
- благодаря применению медианы вместо усреднения удаётся улучшить  $\bar{\sigma}_{out}^2$  примерно в три раза;
- при малом отношении сигнал/шум значения  $\delta_{out}^2$  для рассматриваемых методов становятся приблизительно равными.

Поскольку решается задача восстановления сигнала неизвестной формы, сравнительный анализ характеристик стандартного и предложенных методов был проведен для нескольких других тестовых сигналов. Графики зависимостей  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для случая тестового сигнала в виде двух импульсов треугольной формы ( $\Delta t = 6, A_1 = 2, A_2 = 6, t_1 = t_2 = 3$ ) для разного количества реализаций  $M$  показаны на рис. 12, 13. Кроме того, на рис. 14 приведена зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для тестового сигнала в виде импульсов прямоугольной формы с параметрами ( $\Delta t = 6, A_1 = 2, A_2 = 6, t_1 = t_2 = 11$ ). Как и для первого тестового сигнала, для этих тестовых сигналов при малых отношениях сигнал/шум зависимости  $\delta_{out}^2$  от

$\overline{SNR}_{inp}$  примерно совпадают для всех трех рассматриваемых методов, поэтому они не приведены.

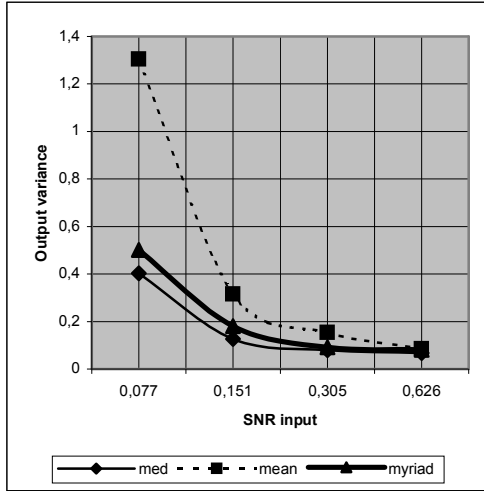


Рис. 12. Зависимость  $\overline{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 32$

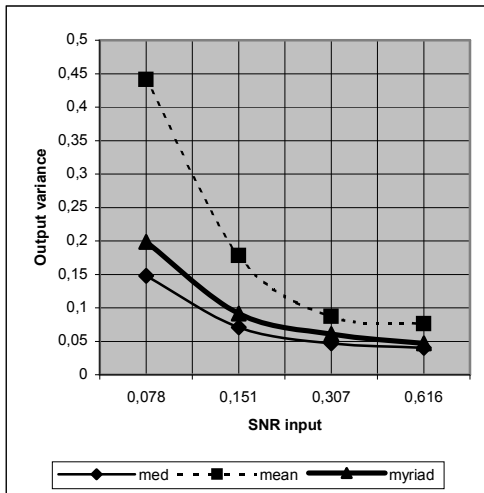


Рис. 13. Зависимость  $\overline{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 64$

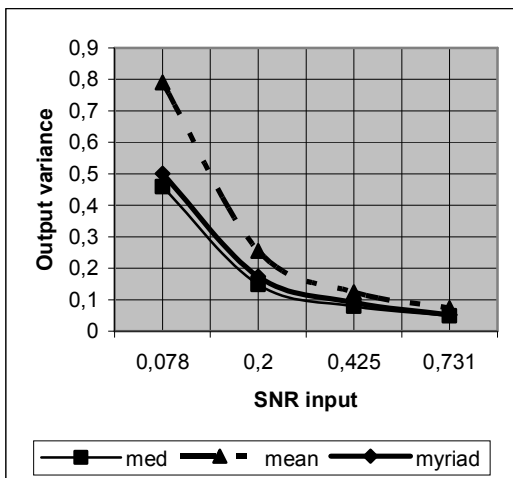


Рис. 14. Зависимость  $\overline{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M = 64$

Анализ полученных данных показывает, что формирование БО ансамбля реализаций при помощи робастных операций позволяет в несколько раз улучшить (уменьшить) выходную дисперсию флуктуаций. Таким образом, выигрыш наблюдается для различных форм тестовых импульсов, что очень важно, так как для практических приложений априорная информация о характеристиках сигнала либо отсутствует, либо является неполной. На рис. 15 – 17 изображены оценки сигналов, восстановленные при помощи использования операций усреднения, медианы и мириады при формировании БО ансамбля реализаций для тестового сигнала, показанного на рис. 2. Изображения приведены для случая  $\overline{SNR}_{inp} = 0,151$  и  $M = 128$ .

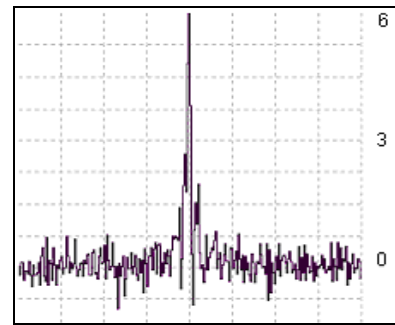


Рис. 15. Оценка сигнала, восстановленная при использовании операции усреднения

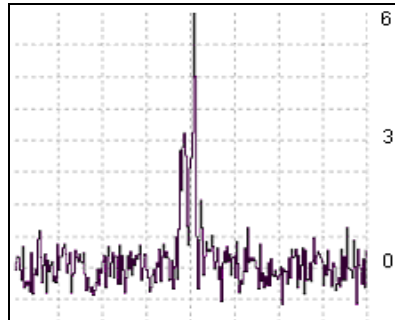


Рис. 16. Оценка сигнала, восстановленная при использовании медианной операции (18)

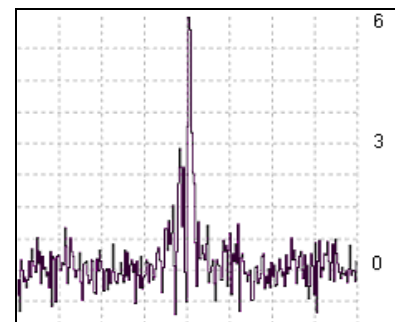


Рис. 17. Оценка сигнала, восстановленная при использовании мириадной операции (20)



Анализ приведенных графиков показывает, что при малом отношении сигнал/шум предложенные методы позволяют восстановить и различить исходные импульсы, в то время как в сигнале, восстановленном с использованием операции усреднения, этого сделать не удается.

### Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что биспектральная оценка содержит слагаемые с законами распределения, отличными от нормального. При малых отношениях сигнал/шум эти компоненты оказывают значительное влияние на плотность распределения вероятности компонент биспектральной оценки. Показано, что применение робастных процедур для формирования БО ансамбля реализаций позволяет значительно улучшить биспектральную оценку и обеспечить лучшее качество восстановления сигнала в сравнении с традиционными методами.

### Литература

1. Sasaki K., Sato T., Nakamura Y. Holographic Passive Sonar // IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, SU-24. – 1977, May. – P.193 – 200.
2. Lohmann A.W., Weigelt G., Wirtzner B. Speckle Masking in Astronomy: Triple Correlation Theory and Applications // Applied Optics. – 1983, Dec. – Vol. 22. – P. 4028 – 4037.
3. Totsky A.V., Gorbunenko B.F. Investigations of the Synthetic Aperture Radar Images Formed by Processing of Bispectral Data // International Journal of Electronics and Communications (AEU). – 1999. – Vol. 53, № 3. – P. 146 – 150.
4. Важинский В.Н., Тетерин В.В. Корреляционная функция третьего порядка и биспектр в задачах обработки сигналов // ОМП. – 1991. – № 4. – С. 4 – 14.
5. Тоцкий А.В., Астола Я., Егиазарян К.О., Зеленский А.А., Курбатов И.В., Лукин В.В. Восстановление сигналов по оценкам биспектров в присутствии гауссовых и негауссовых помех // Зарубежная радиоэлектроника. – 2002. – №11. – С. 44 – 58.
6. Nikias, C.L., Raghuveer, M.R. Bispectral Estimation: A Digital Signal Processing Framework // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, № 7. – P. 869 – 891.
7. Totsky A.V., Lukin V.V., Kurbatov I.V., Egiazarian K.O. Combined bispectrum-filtering techniques for radar output signal reconstruction in ATR applications // Proceedings of International Conference "Automatic Target Recognition XIII". – Orlando (USA), 2003. – Vol. 5094. – P. 301 – 312.
8. Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
9. Astola J., Kuosmanen P. Fundamentals of non-linear digital filtering // CRC Press LLC. – Boca Raton (USA). – 1997. – P. 276.
10. Kalluri S., Arce G. Adaptive Weighted Myriad Filter Algorithms for Robust Signal Processing in  $\alpha$ -stable Noise Environments // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1998. – Vol. 46, No. 2. – P. 322 – 334.
11. Левин Б.П. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1957. – 320 с.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Сов. радио, 1962. – 354 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 690 с.
14. Абрамов С.К., Зеленский А.А., Лукин В.В. Определение моды выборки данных с существенно несимметричным законом распределения на основе использования мириадной оценки и порядковых статистик // Радіотехнічні системи та засоби літальних апаратів. – 2002. – № 29. – С. 74 – 83.

Поступила в редакцию 28.09.2004

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.К. Волосюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.