

УДК 621.03

Ю.Н. СОКОЛОВ, А.Ю. СОКОЛОВ, В.М. ИЛЮШКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»***КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПРИРОДЫ И ОБЩЕСТВА.****Часть 1.****УРАВНЕНИЯ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА.****КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ВИДОВ В ПРИРОДЕ**

*Рассмотрена технология компьютерного моделирования процессов, описываемых уравнениями Лотки – Вольтерра. Предложены и исследованы схемы имитационного моделирования наиболее распространенных систем «хищник - жертва» средствами MATLAB/Simulink (версия 7.6.0 (R2008a)): классическая модель Лотки – Вольтерра, модель с логистической поправкой, модель Холлинга – Тэннера и модель с переменными параметрами. Приведены результаты моделирования систем «хищник - жертва» при различных начальных условиях, анализ которых выполнен с помощью временных функций (изменение популяции) и фазовых траекторий.*

**Ключевые слова:** уравнения Лотки – Вольтерра, модель Холлинга – Тэннера, фазовые траектории, дифференциальные уравнения, имитационное моделирование.

**Введение**

Модель взаимодействия "хищник - жертва" независимо предложили в 1925 – 1927 гг. Лотка<sup>1</sup> и Вольтерра<sup>2</sup> [1]. Эта модель получила огромную популярность и иногда называется классической моделью взаимодействия популяций хищника и жертвы или просто моделью "хищник - жертва". Для системы с постоянными коэффициентами модель имеет точное аналитическое решение.

Впоследствии многими исследователями изучались более сложные модели, в частности, модели, учитывающие внутривидовую конкуренцию, влияние сезонности, наличие и изменение количества кормов и т. п. Например, летом взаимодействие видов происходит согласно уравнениям Лотка - Вольтерра "хищник-жертва", а зимой имеет место экспоненциальное вымирание особей обоих видов. Учет этих факторов неизбежно приводит к усложнению классической модели – появлению дополнительных

слагаемых в правых частях уравнений системы или к увеличению ее порядка. Независимо от сложности модели, изучение такой проблемы позволяет глубже понять экосистему, в которой взаимодействуют два вида – хищник и жертва.

В любом случае (за исключением тривиальных) модель Лотки – Вольтерра является нелинейной, и ее аналитическое решение не представляется возможным. Возникает необходимость разработки эффективных и наглядных способов решения и исследования таких моделей. Для этой цели могут быть использованы различные современные компьютерные пакеты. В статье приведено достаточно полное исследование моделей Лотки – Вольтерра в пакете MATLAB/Simulink, который, по мнению автора, обладает для решения рассматриваемых здесь задач заметными преимуществами перед иными пакетами (Mathcad, Maple и др.).

Актуальность и практическая значимость рассматриваемых ниже моделей и способов их компьютерной реализации состоит в том, что они могут описывать и имитировать, например, динамику конкурирующих предприятий или процессы выравнивание цен (см. часть 2 одноименной статьи авторов в следующем выпуске журнала «Радиоэлектронные и компьютерные системы»).

Аналогичными моделями можно также описать динамику численности воюющих армий, изменение экологической обстановки, развитие науки, общества (см. часть 3) и т.п.

<sup>1</sup> Альфред Джеймс Лотка (англ. Alfred James Lotka; 1880 – 1949) – американский математик, физикохимик, статистик. Альфреда Лотки можно считать нашим соотечественником, поскольку родился он в 1880 г. во Львове, который тогда находился на территории Австро-Венгрии и именовался Лембергом.

<sup>2</sup> Вито Вольтерра (англ. Vito Volterra; 1860 – 1940) – итальянский математик, физик. Член-корреспондент по разряду математических наук Физико-математического отделения Российской императорской академии наук с 1908 года, почетный член РАН с 1926 года.

## 1. Классическая модель системы «хищник - жертва»



### 1.1. Уравнения Лотки – Вольтерра

Иногда простая математическая модель хорошо описывает сложную биологическую, экологическую [2] или экономическую систему. Примером этого служат долговременные отношения между видами хищника (лиса) и жертвы (заяц) в какой-либо экосистеме. Математические расчеты роста популяции отдельно взятого вида показывают, что пределы плотности популяции можно описать простыми уравнениями, решение которых дает характерную кривую численности популяции, которая растет экспоненциально, пока она небольшая, а затем выравнивается, когда она достигает пределов возможности экосистемы поддерживать ее. Простое продолжение этой концепции позволяет понять экосистему, в которой взаимодействуют два вида – хищник и жертва.

Пусть число растительноядных жертв  $x$ , а число плотоядных хищников  $y$ . Тогда вероятность того, что хищник встретится с травоядным, пропорциональна произведению  $xу$ . Другими словами, чем выше численность одного из видов, тем выше вероятность таких встреч. В отсутствие хищников популяция жертвы будет расти экспоненциально (по крайней мере вначале), а в отсутствие жертв популяция хищника сократится до нуля – либо из-за голода, либо в результате миграции. Теперь, если  $dx$  – изменение популяции растительноядных за время  $dt$ , а  $dy$  – изменение популяции плотоядных за тот же интервал времени, то две популяции описываются классическими уравнениями Лотки – Вольтерра:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & x(0); \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, & y(0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  – численность популяции «жертв»;  $y$  – чис-

ленность популяции «хищников»;  $a$  – коэффициент естественного прироста популяции «жертв», «рождаемость», или скорость роста численности травоядных в отсутствие хищников;  $b$  – коэффициент влияния популяции «хищников» на численность популяции «жертв», («поедание»), или скорость, с которой встречи хищников с жертвами удаляют травоядных из популяции;  $c$  – коэффициент естественной смертности популяции «хищников», или скорость сокращения численности плотоядных в отсутствие травоядных;  $d$  – коэффициент усвоения биомассы «жертв» популяцией «хищников», или скорость, с которой встречи хищников с жертвами позволяют хищникам прибавлять численность своей популяции;  $x(0)$  – начальное количество «жертв»;  $y(0)$  – начальное количество «хищников»;  $t$  – текущее время.

Таким образом, жертвы размножаются с постоянной скоростью  $a$ , а их численность убывает вследствие поедания хищниками (с коэффициентом  $b$ ). Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной количеству пищи (с коэффициентом  $d$ ), и умирают естественным образом (смертность определяется константой  $c$ ).

Будем считать, что все параметры постоянны и неотрицательны, т. е.  $a, b, c, d = \text{const} \geq 0$ .

Знак минус в первом уравнении системы (1) показывает, что встречи хищников с жертвами сокращают популяцию жертвы, а знак плюс во втором говорит о том, что встречи увеличивают популяцию хищника. Как видим, любое изменение численности травоядных влияет на численность плотоядных, и наоборот. Две популяции необходимо рассматривать вместе. В результате решения этих уравнений мы увидим далее, что обе популяции развиваются циклически. Если популяция травоядных увеличивается, вероятность встреч хищник – жертва возрастает, и, соответственно (после некоторой временной задержки), растет популяция хищников. Но рост популяции хищников приводит к сокращению популяции травоядных (также после некоторой задержки), что ведет к снижению численности потомства хищников, а это повышает число травоядных и так далее.

Развитие популяции хищников зависит от количества пищи (жертв). При отсутствии пищи ( $x = 0$ ) относительная скорость изменения популяции хищников равна  $(dy/dt)/y = -c$ ,  $c > 0$ . Наличие пищи компенсирует убывание, и при  $x > 0$  имеем  $(dy/dt)/y = (-c + dx)$ ,  $d > 0$ .

## 1.2. Компьютерное моделирование системы «хищник - жертва»

Рассмотрим подробно методику компьютерного моделирования этой системы средствами MATLAB/ Simulink при некоторых конкретных значениях параметров и начальных условий, полагая что:

- лисы питаются зайцами и их потомством;
- зайцы питаются травой и (иногда) своим выводком;
- площадь обитания ограничена, но растительность восстанавливается быстрее, чем успевают поедать ее зайцы.

Схема моделирования системы "хищник – жертва" в Simulink, построенная по уравнениям (1), показана на рис. 1.

Для регистрации результатов моделирования в схеме используются блок Scope и четыре блока To Workspace с именами: Pray and Predator (жертва и хищник) – для получения графиков изменения популяции жертвы и хищника во времени (в одном окне, так как результат наблюдается в виде вектора, сформированного мультиплексором Mux); Pray (жертва) и Predator (хищник) – для получения фазовых траекторий на плоскости, Time (время) – используется совместно с блоками Pray и Predator для получения фазовой траектории в трехмерном пространстве. Параметры этих блоков Save format: Structure With Time устанавливаются в соответствующих окнах, открываемых двойным щелчком мыши по блокам.

Использование блока Scope удобно для быстрого наблюдения результатов моделирования, однако возможность редактирования полученных графиков в такой среде существенно ограничена. Поэтому следует отдать предпочтение блокам To Workspace.

Наконец, при слишком длительном времени моделирования максимальный шаг дискретности необходимо существенно увеличить. В противном случае (при малом шаге) процесс будет наблюдаться не с нулевого момента времени.

Возьмем для конкретности следующие значения параметров уравнений и начальных условий:  $a = 4$ ;  $b = 2,5$ ;  $c = 2$ ;  $d = 1$ ;  $x(0) = 3$ ;  $y(0) = 1$ . Исходные данные и команды получения результатов моделирования введем в окне свойств модели (Model Properties).

Окно свойств модели открывается в такой последовательности: File → Model Properties → Callbacks. В левой вкладке (Model callbacks) открывшегося окна выбираем InitFcn, а затем в правой вкладке (Model initialization function) вводим

исходные числовые значения параметров и начальных условий:

```
%parameters and initial conditions
a=4; b=2.5; c=2; d=1; x0=3; y0=1;
```

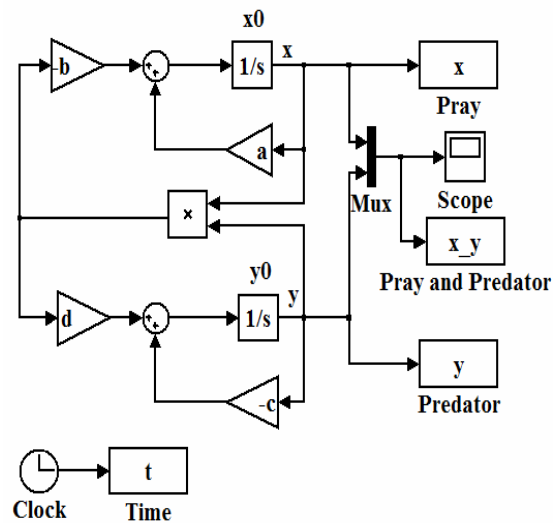


Рис. 1. Схема моделирования системы "хищник - жертва"

Далее в левой вкладке Model callbacks окна Model Properties выбираем StopFcn, а затем в правой вкладке (Simulation stop function) вводим команды построения графиков:

```
figure(1)
plot(x_y.time, x_y.signals.values)
grid on
xlabel('t')
ylabel('x, y')
figure(2)
plot(x.signals.values, y.signals.values)
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
hold on
figure(3)
plot3(t.signals.values, x.signals.values, y.signals.values)
grid on
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('y')
```

Первый график figure(1) изображает изменение численности зайцев и лис с течением времени, второй figure(2) – зависимость численности хищников от количества жертв (фазовый портрет), а третий figure(3) – зависимость численности хищников от количества жертв (фазовая траектория в трехмерном пространстве).

Результаты моделирования представлены на рис. 2 и 3.

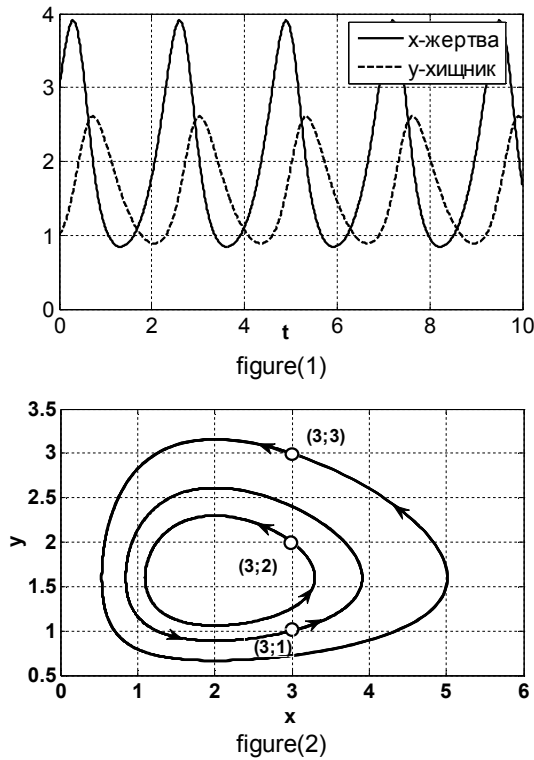


Рис. 2. Временные функции и фазовый портрет системы "хищник – жертва"

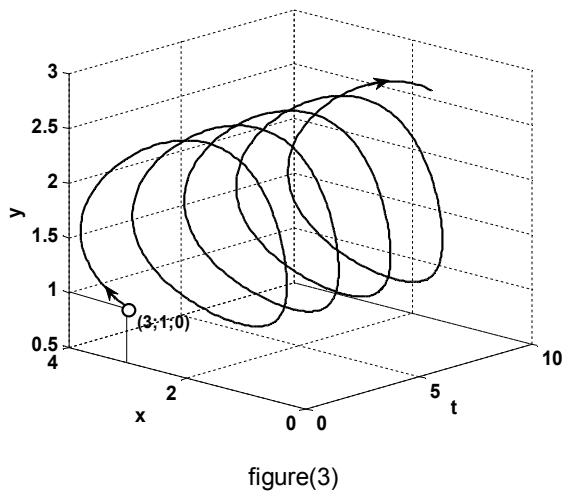


Рис. 3. Фазовая траектория в трехмерном пространстве

*Примечание:* на рис. 2 (figure(2)) показаны три фазовых траектории. Одна из них получена по приведенной программе при  $x_0=3$ ;  $y_0=1$ . Для получения другой пары траекторий можно во вкладке Model initialization function задать последовательно другие пары начальных условий:  $x_0=3$ ;  $y_0=2$  и  $x_0=3$ ;  $y_0=3$ , использовать команду hold on и повторить моделирование.

Таким образом, модель характерна тем, что в рассматриваемой системе наблюдаются циклическое увеличение и уменьшение численности как

хищника, так и жертвы, часто наблюдаемое в природе. Фазовый портрет системы представляет собой концентрические замкнутые кривые, окружающие одну стационарную точку, называемую центром. Модельные колебания численности обеих популяций существенно зависят от начальных условий – после каждого периода колебаний система возвращается в ту же точку.

Из рис. 2 видно, что при заданном начальном соотношении числа особей обоих видов 3 : 1, обе популяции сначала растут. Когда количество хищников достигает величины  $b = 2,5$ , популяция жертв не успевает восстанавливаться и число жертв начинает убывать. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников и когда число жертв достигает величины  $x = c/d = 2$  (в этой точке  $dy/dt = 0$ ), число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением числа жертв. Сокращение популяций происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины  $y = a/b = 1,6$  (в этой точке  $dx/dt = 0$ ). С этого момента начинает расти популяция жертв, через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и процесс повторяется снова и снова. На графике четко виден периодический характер процесса. Количество жертв и хищников колеблется возле величин  $x = 2$ ,  $y = 1,6$  соответственно (дробные числа здесь не означают “половину волка”, величины могут измеряться в сотнях, тысячах и т. п.). Периодичность процесса явно видна на фазовой плоскости – фазовая кривая  $(x(t), y(t))$  – замкнутая линия. Самая левая точка этой кривой – это точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка  $x = 4$ ,  $y = 1,6$  – точка пика популяции жертв. Между этими точками количество хищников сначала убывает до нижней точки фазовой кривой,  $x = 2$ , где достигает наименьшего значения, а затем растет до верхней точки фазовой кривой ( $x = 2$ ,  $y = 2,5$ ). Фазовая кривая охватывает точку  $x = 2$ ,  $y = 1,6$ . На языке дифференциальных уравнений это означает, что система имеет стационарное состояние  $dx/dt = 0$ ,  $dy/dt = 0$ , которое достигается в точке  $x = 2$ ,  $y = 1,6$ . Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения  $x(t)$ ,  $y(t)$  не будут изменяться во времени, останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

На рис. 3 также явно видна периодичность процесса. Фазовая кривая  $(x(t), y(t), t)$  представляет собой спираль.

## 2. Модель системы «хищник -жертва» с логистической поправкой

Рост численности каждой популяции тормозит не только межвидовая, но и внутривидовая конкуренция. Чтобы это учесть, расширим рассмотренную классическую модель динамики двух популяций, добавив к взаимодействию "хищник – жертва" слагаемые, учитывающие внутривидовые конкуренции. В результате система уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2, & x(0); \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2, & y(0), \end{cases} \quad (2)$$

где коэффициенты  $e$  и  $f$  характеризуют убывание численности жертвы и хищника соответственно вследствие внутривидовой конкурентной борьбы.

Такая модель называется моделью с “логистической поправкой” на конкуренцию.

Схема моделирования системы "хищник - жертва" по уравнениям (2) строится аналогично и имеет вид, показанный на рис. 4.

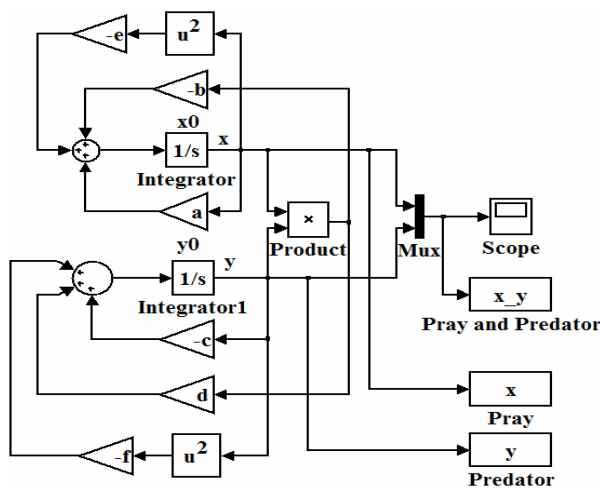


Рис. 4. Схема моделирования системы "хищник – жертва" с логистической поправкой

В этом случае поведение решений в окрестности стационарной точки меняется в зависимости от величины и знака параметра  $e$ .

Процессы во времени и фазовый портрет системы с логистической поправкой для

$$a = 4; b = 2,5; c = 2; d = 1; e = 0,1; f = 0,1$$

с начальным условием  $x(0) = 3; y(0) = 1$  показаны на рис. 5.

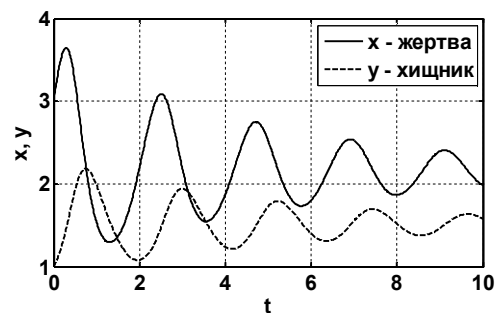
Исходные данные вводятся в окне свойств модели, как и в предыдущем случае:

```
%parameters and initial conditions
a=4; b=2.5; c=2; d=1; e=0.1; f=0.1; x0=3; y0=1;
figure(1)
plot(x_y,time, x_y.signals.values)
grid on
xlabel('t')
figure(2)
plot(x.signals.values, y.signals.values)
grid on
xlabel('x'), ylabel('y')
```

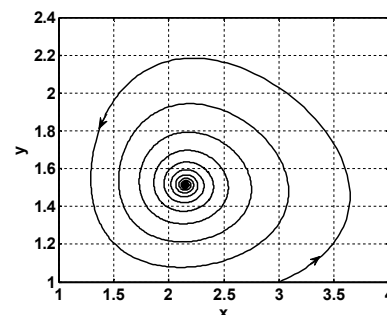
Первый график figure(1) изображает изменение численности жертв и хищников с течением времени, а второй figure(2) – зависимость численности хищников от количества жертв (фазовый портрет).

При необходимости можно получить процессы и фазовые траектории при других начальных условиях, как это сделано в разд. 1.

Графики решений и фазовая кривая системы "хищник – жертва" с логистической поправкой при отрицательном значении параметра  $e, e = -0,2$  приведены на рис. 6. Они построены с использованием аналогичных команд.



figure(1)



figure(2)

Рис. 5. Результаты моделирования системы "хищник - жертва" с логистической поправкой

Как видно из рис. 5, конкурентная борьба приводит после затухающих колебаний к установлению некоторого стационарного состояния, выражающего равновесие видов. Особая точка, к которой стремится решение системы дифференциальных уравнений

подобным образом, называется устойчивым фокусом. При любом начальном условии состояние системы через некоторое время становится близким к стационарному и стремится к нему при  $t \rightarrow \infty$ .

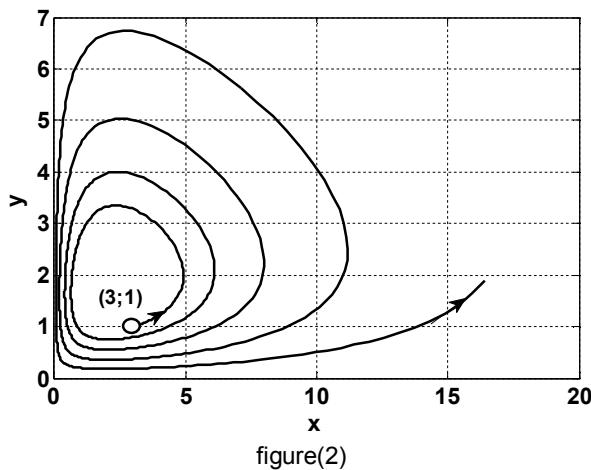
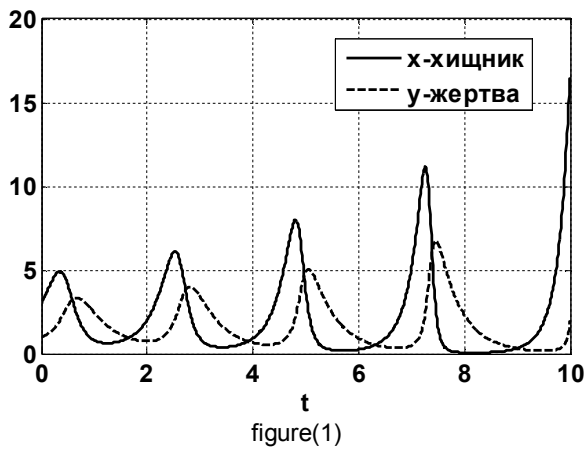


Рис. 6. Результаты моделирования системы "хищник - жертва" с логистической поправкой при  $\epsilon = -0,2$

Из рис. 6 следует, что стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний численности видов растет. В данном случае, как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.

### 3. Модель Холлинга – Тэннера

На примере классической модели и модели с логистической поправкой Лотки – Вольтерра выше было продемонстрировано одно из важнейших качественных свойств центров – они легко разрушаются даже при самых малых изменениях правой части.

Большинство моделей являются идеализацией действительности; в них внимание сосредоточено на некоторых основных переменных и соотношениях между ними. Поэтому устойчивость моделей относительно малых возмущений чрезвычайно важна в приложениях. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, называются грубыми. Модель Лотки – Вольтерра неустойчива относительно возмущений, поскольку ее стационарное состояние – центр.

Существует другой вид моделей, в которых возникают незатухающие колебания, – это модели, имеющие на фазовых портретах предельные циклы. Такая модель существует для системы конкурирующих видов – это модель Холлинга – Тэннера.

Скорость роста популяции жертв  $dx/dt$  в этой модели равна сумме трех величин:

- скорости размножения в отсутствие хищников:  $rx$ ;

- влиянию межвидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах (для случая конкурирующих производителей это влияние ограниченных сырьевых ресурсов):  $-rx \frac{x}{K} = -r \frac{x^2}{K}$ ;

- влиянию хищников, в предположении, что хищник перестает убивать, когда насыщается:

- $-wy \frac{x}{D+x}$ .

Скорость роста популяции хищников  $dy/dt$

строится так же, как в модели Лотки – Вольтерра, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно  $J$  жертв, то популяция из  $x$  жертв сможет обеспечить пищей  $x/J$  хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = y \left( p - \frac{pJ}{x} y \right).$$

Таким образом, имеем модель Холлинга – Тэннера:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left( x - \frac{x^2}{K} \right) - wy \frac{x}{D+x}, & x(0); \\ \frac{dy}{dt} = p \left( y - \frac{Jy^2}{x} \right), & y(0), \end{cases} \quad (3)$$

где  $r, p, K, D, J > 0$ .

Схема моделирования системы по уравнениям Холлинга – Тэннера показана на рис. 7.

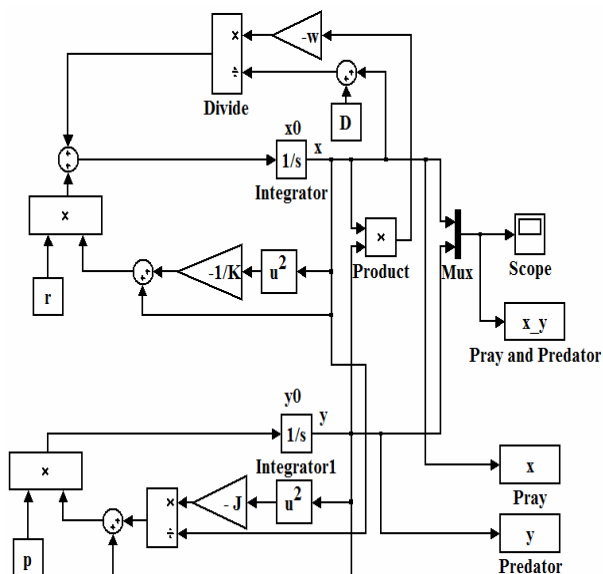


Рис. 7. Схема моделирования системы "хищник - жертва" по уравнениям Холлинга – Тэннера

Для конкретности рассмотрим процессы в системе при следующих значениях параметров и начальных условий:

```
%parameters
r=1; K=7; w=1; D=1; p=0.2; J=0.5;
x0=3; y0=1;
```

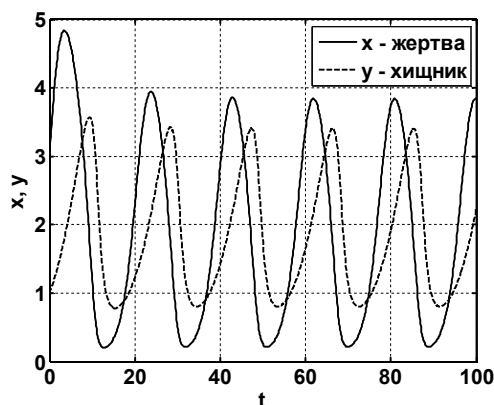
Компьютерным моделированием получим процессы изменения численности хищника и жертвы во времени и фазовые траектории при заданных начальных значениях каждого вида популяции. Ввод параметров и начальных условий выполняется, как и в предыдущих случаях, в меню Model Properties. Аналогично вводятся и команды для графиков:

```
figure(1)
plot(x_y.time, x_y.signals.values)
grid on
xlabel('t')
figure(2)
plot(x.signals.values, y.signals.values)
hold on
grid on
xlabel('x'), ylabel('y')
Запустить модель.
```

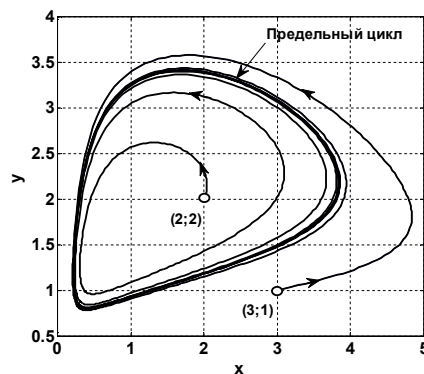
Изменим начальные условия в окне Model initialization function на  $x_0=2$ ;  $y_0=2$ . Для получения процессов при новых начальных условиях в отдельном графическом окне заменим фрагмент приведенной выше команды для figure(1) на:

```
figure(3)
plot(x_y.time, x_y.signals.values)
grid on
xlabel('t')
```

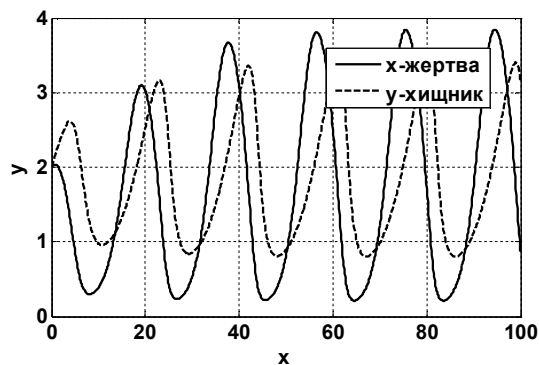
При этом процессы отобразятся в отдельном графическом окне, а фазовая траектория отобразится в окне figure(2). Запустив модель еще раз, получим графики, показанные на рис. 8.



figure(1): Процессы в системе при начальных условиях ( $x_0=3$ ;  $y_0=1$ )



figure(2): фазовые траектории и устойчивый предельный цикл при различных начальных условиях



figure(3): процессы в системе при начальных условиях ( $x_0=2$ ;  $y_0=2$ )

Рис. 8. Результаты моделирования системы "хищник - жертва" по уравнениям Холлинга – Тэннера

Можно убедиться, что при любых начальных условиях фазовые траектории стремятся к устойчивому предельному циклу.

#### 4. Модель Лотки – Вольтерра с переменными параметрами

В модели Лотки – Вольтерра (2) предполагалось, что все параметры постоянны и неотрицательны, т. е.  $a, b, c, d, e, f = \text{const} \geq 0$ . Это означает, что при фиксированном значении  $y$  рост  $x$  вызывает неограниченный рост скоростей потребления жертв и прироста численности хищников.

Пусть теперь коэффициенты  $b$  и  $d$  не являются постоянными, а зависят от  $x$ :

$$b = \frac{\alpha}{1 + \beta x}, \quad d = \frac{\alpha_1}{1 + \beta x}, \quad (4)$$

где  $\alpha, \alpha_1, \beta = \text{const} > 0$ .

Обратная зависимость коэффициентов  $b$  и  $d$  от количества жертв  $x$  означает, что чем больше насыщаемость хищника, тем меньше скорость уничтожения жертв  $bxy$  и соответственно меньше скорость размножения хищников  $dx$ .

Схема моделирования системы с переменными коэффициентами по уравнениям (2) и (4) приведена на рис. 9.

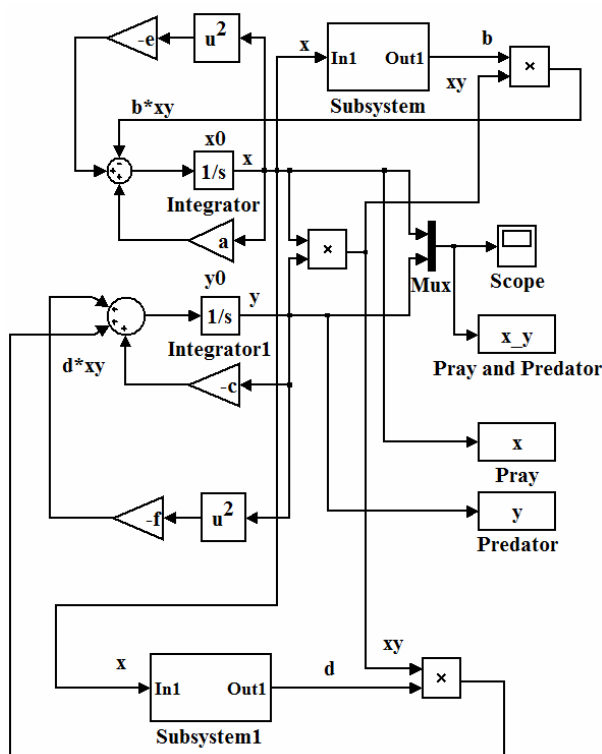


Рис. 9. Модель Лотки – Вольтерра с переменными коэффициентами

Коэффициенты  $b$  и  $d$  вычисляются по формулам (4) с помощью двух подсистем Subsystem и Subsystem1, показанных в демаскированном виде на рис. 10.

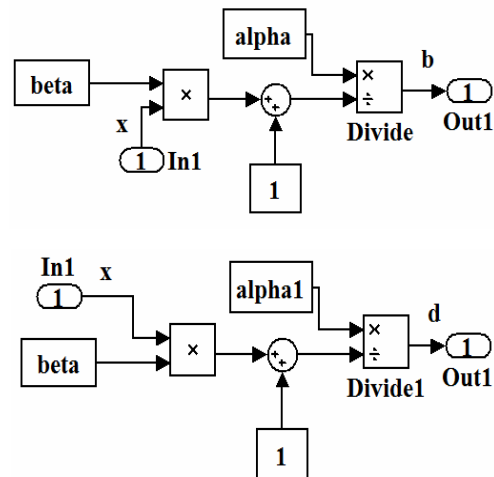


Рис. 10. Вычисление коэффициентов  $b$  и  $d$

Команды построения данных графиков введены в окне свойств модели в виде:

```
figure(1)
plot(x_y.time, x_y.signals.values)
xlabel('t')
grid on

figure(2)
plot(x.signals.values, y.signals.values)
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
```

На рис. 11 и 12 для примера показаны реакция на начальные условия и фазовая траектория рассматриваемой системы при следующих значениях параметров и начальных условий, введенных в меню Model Properties:

```
a=4;
c=2;
e=0.2;
f=0.1;
alpha=1;
beta=0.1;
x0=3;
y0=1;
```



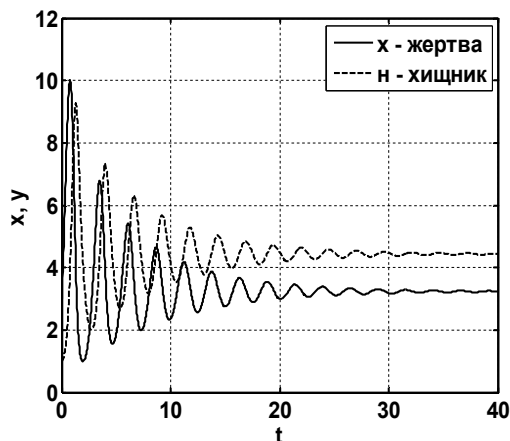


Рис. 11. Реакция системы с переменными коэффициентами на начальные условия

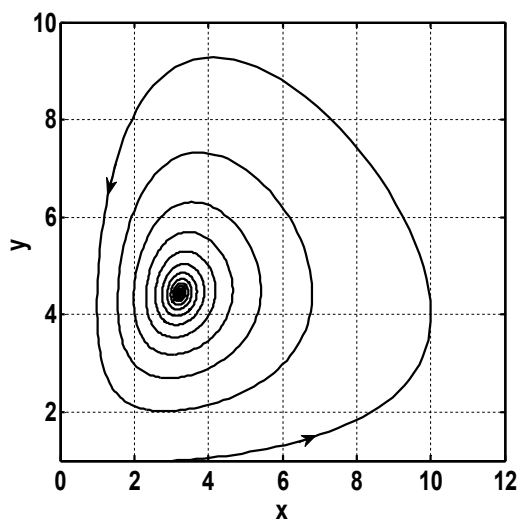


Рис. 12. Фазовая траектория системы с переменными коэффициентами

Таким образом, при заданных параметрах и начальных условиях в системе наблюдается устойчивый предельный цикл. С течением времени после колебаний наблюдается стабилизация на ненулевом уровне с некоторым увеличением популяции жертвы (до 3,23) и хищника (до 4,45).

При иных параметрах системы наблюдаются другого вида процессы. На рис. 13 в качестве примера показаны процессы при  $\beta=0.3$ .

В этом случае после окончания переходного процесса наблюдается стабилизация для жертвы – до 13,30 и для хищника – до 6,67. Процесс протекает практически без колебаний. Напомним, что дробные числа здесь не означают “половину лисы” или зайца, величины могут измеряться в сотнях, тысячах и т.п.

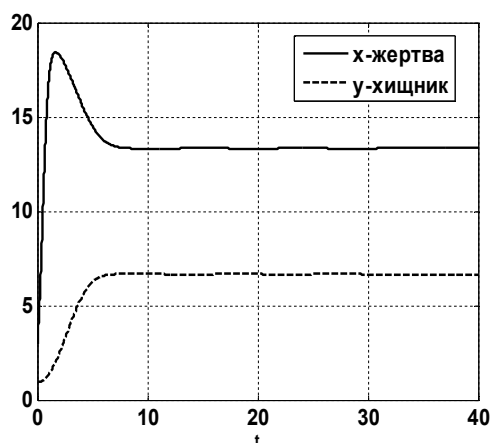


Рис. 13. Процессы в системе при  $\beta = 0,3$

Дополнительные материалы по методам компьютерного моделирования можно найти в [3, 4].

## Заключение

Предложенные Simulink-модели позволяют получить устойчивые решения задач Лотки – Вольтерра. Модели дают возможность исследовать циклические изменения численности популяции, часто наблюдаемое в природе. Модельные колебания численности обеих популяций существенно зависят от начальных условий.

Дальнейший интерес представляют изучение моделей, учитывающих, например, сезонность, количество кормов и иных факторов, характерных для системы “хищник – жертва”, а также прикладные аспекты (экономика, экология, демография и т. п.).

## Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 615 с.
2. Риклефс Р. Основы общей экологии. – М.: Мир, 1979. – 424 с.
3. Соколов Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления: учеб. пособие. – В 5 ч. / Ю.Н. Соколов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – Ч. 1: Непрерывные системы. – 260 с.
4. Персональный сайт Соколова Ю.Н. [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.sokolov.5u.com>.

Поступила в редакцию 25.05.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук., проф., зав. кафедрою інформаційних управляючих систем О.Е. Федорович, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЗАДАЧАХ ПРИРОДИ І СУСПІЛЬСТВА.

### Частина 1.

#### РІВНЯННЯ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА.

#### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПІВДІЇ ВИДІВ В ПРИРОДІ

*Ю.М. Соколов, О.Ю. Соколов, В.М. Ілюшко*

Розглянуто технологію комп'ютерного моделювання процесів, які описуються рівняннями Лотки – Вольєрра. Запропоновані і досліджені схеми імітаційного моделювання найбільш розповсюджених систем «хижак-жертва» засобами MATLAB/Simulink (версія 7.6.0 (R2008a)): класична модель Лотки – Вольєрра, модель з логістичною поправкою, модель Холлінга – Теннера та модель зі змінними параметрами. Наведено результати моделювання систем «хижак-жертва» при різних початкових умовах, аналіз яких виконано за допомогою часових функцій (змінення популяції) і фазових траєкторій.

**Ключові слова:** рівняння Лотки – Вольєрра, Модель Холлінга – Теннера, фазові траєкторії, диференціальні рівняння, імітаційне моделювання.

## COMPUTER TECHNOLOGIES IN PROBLEMS OF NATURE AND SOCIETY.

### Part 1.

#### LOTKA - VOLTERRA EQUATIONS.

#### COMPUTER SIMULATION OF SPECIES INTERACTION IN ECOSYSTEM

*Y.N. Sokolov, A.Y. Sokolov, V.M. Iliushko*

The computer simulation technology of processes described by Lotka - Volterra equations is considered. The simulation diagrams of most extended «predator-prey» systems: classical Lotka - Volterra model, model with logistic correction, Holling - Tenner model and model with variable parameters are proposed by using MATLAB/Simulink (version 7.6.0 (R2008a)). The simulation data of «predator-prey» systems under variable initial conditions are given by means of time responses (variation of population) and phase trajectories.

**Keywords:** Lotka – Volterra equation, Holling – Tenner model, phase trajectories, differential equations, simulation.

**Соколов Юрий Николаевич** – канд. техн. наук, профессор, профессор кафедры производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: sokolovkhai@gmail.com.

**Соколов Александр Юрьевич** – доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: asokolov@xai.edu.ua.

**Ілюшко Виктор Михайлович** – доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой производства радиоэлектронных систем летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина, e-mail: rtsla@ai.kharkov.com.