

УДК 629.7.025.6

М.В. ЦЕХОВСКОЙ, Н.Д. КОШЕВОЙ, В.А. ДЕРГАЧЕВ, Е.М. КОСТЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ ПЛАНОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Предложена классификация планов многофакторного эксперимента (МФЭ) относительно заданной группы преобразований. Рассмотрены виды преобразований планов МФЭ. Разработан метод построения типовых планов МФЭ на основе эквивалентных преобразований для группы $G = \{LP, CP\}$ преобразований планов МФЭ. Процедура построения каталога типовых планов МФЭ состоит в генерации множества преобразований, оценки характеристик планов МФЭ, полученных в результате преобразований, и формирования множества различных представителей. Получены оценки количества типовых планов МФЭ и построены каталоги типовых представителей. Показано влияние вида плана МФЭ на характеристики планов МФЭ и вид каталога.

Ключевые слова: оптимальное планирование, эквивалентное преобразование, комбинаторика, фактор, каталог, метод.

Введение

Постановка проблемы. Оптимальное планирование экспериментов при исследовании сложных технических систем и технологических процессов часто требует сложного упорядочения опытов в соответствии с уровнями факторов, и такие упорядочения основаны на комбинаторных схемах [1]. Планы для решения таких задач, как правило, строятся на основе стандартных комбинаторных конфигураций и таблиц, но общий подход к классификации планов многофакторного эксперимента (МФЭ) в настоящее время отсутствует.

Анализ последних исследований и публикаций. Задача оценки количества типовых вариантов оптимальных планов МФЭ и определения их вида относится к классу перечислительных задач. Теория перечисления комбинаторного анализа занимается в основном нахождением и исследованием формул для точного и асимптотического подсчета элементов в различных классах комбинаторных объектов [2]. Решение конкретной задачи перечисления позволяет установить специфические комбинаторные свойства исходных объектов, проявляющиеся в самой процедуре перечисления или вытекающие из получаемых результатов. Существующие методы перечисления (метод непосредственных подсчетов, метод рекуррентных соотношений, метод производящих функций, асимптотические методы) не учитывают специфику планов МФЭ.

Классификация планов МФЭ исследовалась Д. Присом, С. Пирсом и Дж. Керром [3] для отдельных классов комбинаторных планов: латинские кубы, гиперкубы, гипер-греко-латинские кубы. На ос-

нове результатов исследования множества латинских кубических планов построены специальные таблицы и графики, которые могут быть использованы при выборе плана эксперимента. Эта классификация значительно расширяет класс кубических латинских планов, так как параллелепипеды и частично ортогональные латинские кубы второго порядка практически не изучены и упоминаются в литературе крайне редко.

В работе [4] рассмотрены виды преобразований планов МФЭ. Для выбора оптимального плана МФЭ необходимо разработать метод классификации типовых планов МФЭ.

Цель работы: разработать метод классификации типовых планов МФЭ на основе эквивалентных преобразований.

Основные результаты исследований

В основе классификации планов МФЭ лежат эквивалентные преобразования планов МФЭ. В соответствии с принятой в работе [5] терминологией, будем рассматривать группу $G = \{LP, CP\}$ преобразований планов МФЭ.

Два плана МФЭ называются CP (column permutation) эквивалентными, если один переходит в другой при изменении номеров (или обозначения) факторов.

Два плана эксперимента называются LP (line permutation) – эквивалентными, если один переходит в другой при некоторой перестановке $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, соответствующей порядку проведения эксперимента. Значения множества $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, соответствуют порядку следования опытов.

Например, планы эксперимента $M_1(F_1, F_2, F_3, F_4)$ и $M_2(E_1, E_2, E_3, E_4)$, приведенные в табл. 1 и 2, являются эквивалентными относительно группы G преобразований. Действительно, план эксперимента $M_1(F_1, F_2, F_3, F_4)$ преобразуется в план $M_2(E_1, E_2, E_3, E_4)$ при $E_1=F_3, E_2=F_4, E_3=F_1, E_4=F_2$ и перестановке опытов $\Pi = \{7, 4, 2, 8, 1, 5, 3, 6\}$.

Таблица 1

План эксперимента M_1

Номер опыта	Кодированные значения факторов			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	-1	+1	-1
3	+1	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1	+1
5	-1	-1	-1	+1
6	-1	-1	+1	-1
7	-1	+1	-1	-1
8	-1	+1	+1	+1

Таблица 2

План эксперимента M_2

Номер опыта	Кодированные значения факторов			
	E_1	E_2	E_3	E_4
1	-1	-1	-1	+1
2	+1	+1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1	+1
5	-1	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1	-1
7	-1	-1	+1	+1
8	+1	-1	-1	-1

Типовые варианты планов МФЭ представляют в виде множества последовательностей изменений уровней факторов, которое формируется следующим образом.

В общем случае матрица планирования эксперимента может быть представлена в виде таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Матрица планирования эксперимента

Номер опыта	Кодированные значения факторов			
	F_1	F_2	...	F_k
1	f_{11}	f_{21}	...	f_{k1}
2	f_{12}	f_{22}	...	f_{k2}
...
n	f_{1n}	f_{2n}	...	f_{kn}

Поставим в соответствие последовательности изменения уровней i -го фактора $F_i = \{f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}\}$ значение D_i , определяемое следующим образом:

$$D_i = \sum_{j=1}^n \lambda(f_{ij}) \times 2^{n-j},$$

где $\lambda(f_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f_{ij} = -1, \\ 1, & \text{если } f_{ij} = 1. \end{cases}$

Тогда план МФЭ описывается множеством $D = \{D_1, \dots, D_k\}$.

В общем случае, процедура построения каталога типовых планов МФЭ состоит в генерации множества преобразований, оценки характеристик планов МФЭ, полученных в результате преобразований, и формирования множества различных представителей.

В ряде случаев количество рассматриваемых вариантов преобразований можно существенно уменьшить. Например, при исследовании планов МФЭ, имеющих заданное количество изменений уровней факторов в процессе эксперимента, при описании типа использовать упорядоченное множество последовательностей изменения уровней факторов (Y).

При описании процедуры формирования типовых планов МФЭ использованы следующие обозначения:

P – исходный план МФЭ;

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_q\}$ – множество преобразований планов МФЭ;

$T = P(h_i)$ – производный план МФЭ, полученный из исходного плана P в результате преобразования h_i ;

$C(T)$ – количество изменений уровней факторов в плане T ;

g – заданное количество изменений уровней факторов;

U – множество типовых вариантов планов МФЭ;

L_u – количество сформированных планов МФЭ;

V – множество базовых последовательностей изменений уровней факторов;

L_v – количество сформированных базовых последовательностей изменений уровней факторов;

$D^i = \{D^i_1, \dots, D^i_k\}$ – последовательности изменений уровней факторов производного плана $T=P(h_i)$;

Y^i – упорядоченная последовательность изменений уровней факторов D^i ;

$D^i_j \rightarrow V$ означает запись последовательности изменений уровней факторов D^i_j в множество базовых последовательностей V ;

$Y^i \rightarrow U$ означает запись упорядоченной последовательности изменений уровней факторов Y^i в множество типовых вариантов планов МФЭ;

i – текущий номер преобразования.

Процедура построения каталога типовых планов МФЭ для заданных значений n, k, r и исходного плана P состоит из следующих этапов.

Этап 1. Полагаем $i = 0$.

Этап 2. Определяем текущий номер преобразования $i = i + 1$.

Этап 3. Формируем производный план МФЭ $T = P(h_i)$.

Этап 4. Если $C(T) \neq r$, то переходим к этапу 2.

Этап 5. Определяем D^i и Y^i .

Этап 6. Если $D_j^i \notin V$, то $D_j^i \rightarrow V, L_v = L_v + 1$.

Этап 7. Если $Y^i \notin U$, то $Y^i \rightarrow U, L_u = L_u + 1$.

Этап 8. Если $i < q$, то переходим к этапу 2.

Этап 9. Конец.

Рассмотрим пример построения каталога типовых планов МФЭ для $n = 8, k = 4, r = 11$. Матрица исходного плана эксперимента приведена в табл. 4.

Таблица 4

Исходный план эксперимента

Номер опыта	Кодированные значения факторов			
	X_1	X_2	X_3	X_4
1	+1	+1	-1	+1
2	-1	-1	+1	+1
3	-1	+1	-1	-1
4	-1	+1	+1	-1
5	+1	+1	+1	+1
6	+1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	-1
8	-1	-1	-1	+1

В табл. 5 и 6 приведены виды множеств Π и D для которых выполняется условие $r = 11$ (для первых десяти типовых планов МФЭ). Значения D_j^i , которые записываются в множество V , отмечены знаком «+».

Таблица 5

Множества Π для $r = 11$

№	Π							
	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8
1	3	4	5	1	6	7	8	2
2	4	3	1	5	6	7	2	8
3	4	3	5	1	6	7	2	8
4	4	5	1	3	6	7	2	8
5	4	5	1	6	7	2	8	3
6	1	5	4	3	6	7	8	2
7	5	1	4	3	6	7	2	8
8	5	4	3	1	6	7	2	8
9	5	4	3	6	7	2	8	1
10	5	1	3	4	6	7	2	8

Таблица 6

Множества D для $r = 11$

№	D			
	D_1	D_2	D_3	D_4
1	60+	240+	101+	51+
2	60	240	150+	51
3	60	240	166+	51
4	108+	240	198+	99+
5	120+	225+	204+	102+
6	204	240	101	195+
7	204	240	166	195
8	156+	240	198	147+
9	153+	225	204	135+
10	204	240	150	195

В табл. 7 приведен процесс формирования множества базовых последовательностей изменений уровней факторов V после определение нового типового плана МФЭ с упорядоченной последовательностью изменений уровней факторов Y .

Таблица 7

Формирование множества V после определение нового типового плана

№	Y	V
1	51, 60, 101, 240	60, 240, 101, 51
2	51, 60, 150, 240	60, 240, 101, 51, 150
3	51, 60, 166, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166
4	99, 108, 198, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99
5	102, 120, 204, 225	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102
6	101, 195, 204, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102, 195
7	166, 195, 204, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102, 195
8	147, 156, 198, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102, 195, 156, 147
9	135, 153, 204, 225	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102, 195, 156, 147, 153, 135
10	150, 195, 204, 240	60, 240, 101, 51, 150, 166, 108, 198, 99, 120, 225, 204, 102, 195, 156, 147, 153, 135

В табл. 8 приведенные полученные базовые последовательности изменений уровней факторов, а в табл. 9 типовые варианты структур планов МФЭ для $n=8, k=4, r=11$.

Таблица 8

Базовые последовательности изменений уровней факторов для $n=8, k=4, r=11$

№	Номер опыта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1
3	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
5	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1
7	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1
9	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1
11	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
13	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
15	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1
17	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1
10	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1
12	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
14	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
16	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
18	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1

Таблица 9

Типовые варианты структур планов МФЭ для $n=8, k=4, r=11$

№	B_1	B_2	B_3	B_4
1	1	2	3	4
4	2	7	8	9
7	2	6	12	14
10	2	5	12	14
2	1	2	4	5
5	10	11	12	13
8	2	8	15	16
3	1	2	4	6
6	2	3	12	14
9	11	12	17	18

С помощью описанного метода были построены каталоги типовых планов МФЭ для $n = 8, k = 3, \dots, 5$. В табл. 10 приведены значения L_v и L_u для разработанных каталогов типовых планов. Вид плана МФЭ, в общем случае, влияет на характеристики планов МФЭ и вид каталога. В табл. 10 столбец $k = 4(1)$ соответствует исходной матрице МФЭ, в которой фактор $F_4=F_1 \cdot F_2$, а столбец $k=4(2)$ соответствует исходной матрице МФЭ, в которой фактор $F_4=F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$.

Таблица 10

Характеристики каталогов планов МФЭ для $n = 8, k = 3, \dots, 6$

r	k=3		k=4 (1)		k=4 (2)		k=5	
	L_v	L_u	L_v	L_u	L_v	L_u	L_v	L_u
7	16	24						
8	42	104						
9	68	472						
10	70	744	8	8				
11	70	1456	32	56				
12	70	1264	56	168				
13	70	1392	66	440				
14	66	592	68	592	70	576		
15	58	440	70	1392			18	16
16	42	168	70	1264	70	656	42	64
17	24	56	70	1456			70	288
18	6	8	70	744	68	336	70	512
19			70	472			70	1136
20			48	104	50	96	70	1008
21			18	24			70	1136
22					16	16	70	512
23							70	288
24							44	64
25							18	16
26								
27								

Заключение

Предложен метод классификации планов МФЭ на основе LP и CP преобразований. Получены оценки количества типовых планов МФЭ и приведен пример формирования каталога. Рассмотренная задача относится к классу сложных комбинаторных задач. Следующим этапом исследований является разработка программных средств для автоматизации построения каталогов типовых планов МФЭ.

Работа выполнена за бюджетные средства, выделенные в соответствии с Грантом Президента Украины №Ф32/261-2011.

Литература

1. Дисперсионный анализ и синтез планов на ЭВМ [Текст] / Е.В. Маркова, В.И. Денисов, И.А. Полетаева, В.В. Пономарев. – М.: Наука, 1982. – 194 с.
2. Маркова, Е.В. Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента [Текст] / Е.В. Маркова, А.Н. Лисенков. – М.: Наука, 1979. – 347 с.
3. Preece, D.A. Orthogonal designs for three-dimensional experiments [Text] / D.A. Preece, S.C. Pearce, J.R. Kerr // *Biometrika*. – 1973. – № 60. – P. 349- 356.
4. Кошевой, Н.Д. Применение комбинаторного анализа при выборе оптимальных планов многофакторного эксперимента [Текст] / Н.Д. Кошевой, С.Г. Бестань, В.А. Дергачев // Теорія і практика перебудови економіки: зб. наукових праць ЧІТІ. – Черкаси, 2001. – С. 224 – 227.
5. Кошевой, Н.Д. Планирование эксперимента на основе комбинаторных конфигураций [Текст] / Н.Д. Кошевой, С.Г. Бестань, В.А. Дергачев // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 3. – С. 69 – 72.

Поступила в редакцію 12.09.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф., заведуючий кафедрой информатики А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МЕТОД КЛАСИФІКАЦІЇ ПЛАНІВ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

М.В. Цеховський, М.Д. Кошовий, В.А. Дергачов, О.М. Костенко

Запропоновано класифікацію планів багатofакторного експерименту (БФЕ) щодо заданої групи перетворень. Розглянуто види перетворень планів БФЕ. Розроблено метод побудови типових планів БФЕ на основі еквівалентних перетворень для групи $G = \{LP, CP\}$ перетворень планів БФЕ. Процедура побудови каталогу типових планів БФЕ складається в генерації множини перетворень, оцінки характеристик планів БФЕ, отриманих у результаті перетворень, і формування множини різних представників. Отримано оцінки кількості типових планів БФЕ та побудовані каталоги типових представників. Показано вплив виду плану БФЕ на характеристики планів БФЕ і вид каталогу.

Ключові слова: оптимальне планування, еквівалентне перетворення, комбінаторика, фактор, каталог, метод.

METHOD OF CLASSIFICATION PLANS OF MULTIVARIABLE EXPERIMENT

M.V. Tsekhovskiy, N.D. Koshevoj, V.A. Dergachov, E.M. Kostenko

Classification of multiple-factor experiment (MFE) plans concerning the set group of transformations is offered. Kinds of plans MFE transformations are considered. On the basis of equivalent transformations the method of typical plans MFE construction is developed for group $G = \{LP, CP\}$ transformations of plans MFE. Procedure of typical plans MFE catalog construction consists in generation of transformations set, estimations of plans MFE characteristics received as a result of transformations, and formations of various representatives set. Estimations of typical plans MFE quantity are received and catalogs of typical representatives are constructed. Influence of plan MFE kind on characteristics of plans MFE and a catalog kind is shown.

Key words: optimum planning, equivalent transformation, combinatorics, factors, catalogue, method.

Цеховской Максим Владимирович – канд. техн. наук, с.н.с., доцент кафедры авиационных приборов и измерений, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: Tsehovskiy@rambler.ru.

Кошевой Николай Дмитриевич – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой авиационных приборов и измерений, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: kafedraapi@rambler.ru.

Дергачев Владимир Андреевич – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры авиационных приборов и измерений, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: dvan@rambler.ru.

Костенко Елена Михайловна – канд. техн. наук, доцент, проректор по учебно-педагогической и инновационной работе Полтавской Государственной аграрной академии, Полтава, Украина, e-mail: Kostenko@pdaa.com.ua.