

В. А. ДУШЕПА

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## ГРАНИЦЫ КРАМЕРА-РАО И БХАТТАЧАРИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ СУБПИКСЕЛЬНОГО СОВМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*Предметом* изучения в статье являются теоретические нижние границы оценок параметров применительно к задаче совмещения изображений. *Целью* является исследование и сравнительный анализ границ Крамера-Рао и Бхаттачария. *Задачи:* сформулировать алгоритмы вычисления границ Крамера-Рао и Бхаттачария для оценки субпиксельного сдвига двух изображений; с помощью метода статистических испытаний сравнить рассчитанные границы с результатами работы реального алгоритма совмещения. Используемыми *методами* являются: имитационное компьютерное моделирование; метод статистических испытаний (Монте-Карло). Метод статистических испытаний использовался как для расчета теоретических границ (частные производные оценивались с помощью формул численного дифференцирования), так и для расчета точности работы реального алгоритма. Субпиксельная точность алгоритма совмещения достигалась методом интерполяции интенсивности, при этом задача определения координат изображения рассматривалась как задача оптимизации, которая решалась численным методом. Получены следующие *результаты*. Экспериментально подтверждается, что при расчете нижних границ точности совмещения в традиционной постановке (когда мы не учитываем ошибки интерполяции, используемой для достижения субпиксельной точности) граница Бхаттачария всегда проходит выше границы Крамера-Рао, что соответствует теоретическим представлениям. Однако, хотя граница Бхаттачария и дает более точные оценки по сравнению с границей Крамера-Рао, ее значения при высоких отношениях сигнал/шум все равно являются чересчур оптимистичными для точности совмещения в реальных ситуациях. В вычислительных экспериментах использовались как искусственно смоделированные изображения (на основе модели фрактального броуновского движения), так и фрагменты реальных спутниковых снимков. *Выводы*. Научная новизна полученных результатов заключается в том, что данная работа, во многом следуя выполненным другими авторами исследованиям, в отличие от них рассматривает функцию максимального правдоподобия, учитывающую возможность линейного яркостного преобразования между двумя изображениями, что является наиболее часто используемой на практике моделью. Правда, возможность поворота двух изображений в этой статье при этом не учитывается.

**Ключевые слова:** совмещение изображений; субпиксельная точность; нормированный корреляционный алгоритм; граница Крамера-Рао; граница Бхаттачария.

### Введение

Оценка потенциальной точности представляет интерес во многих областях, где необходимо осуществить совмещение изображений: дистанционное зондирование Земли, корреляционно-экстремальная навигация, компьютерное зрение и т. д.

Задача совмещения изображений состоит в нахождении пространственного преобразования, между координатными сетками одного и другого изображений. В данной работе будет рассматриваться только простейший случай, когда это преобразование представляет собой сдвиг вдоль каждой из двух координатных осей. В такой постановке задача совмещения изображений схожа с классической задачей оценки задержки сигнала (только в двумерном варианте), поэтому для ее решения используется схожий математический аппарат, в част-

ности, статистическая теория решений. Составление функции правдоподобия (с учетом принимаемых допущений о природе изображений и помех) обычно приводит к некоторому подобию функции корреляции между двумя изображениями. Например, как указано в статье [2], при определенных допущениях функция правдоподобия пропорциональна коэффициенту нормированной корреляции двух изображений.

Так как исходные изображения обычно представляются в цифровом виде, то использование таких критериев как дискретная корреляция или нормированная дискретная корреляция приводит к тому, что положение одного изображения относительно другого мы можем определить лишь с точностью до одного пикселя. Добиться субпиксельной (меньше пикселя) точности позволяют специальные алго-

ритмы, обычно использующие интерполяцию (самых исходных изображений или решающей функции) [1].

Для анализа точности оценок метода максимума правдоподобия (асимптотической) может использоваться граница Крамера-Рао. Систематический анализ этого вопроса проведен в работе [3]. Однако кроме границы Крамера-Рао существуют и другие границы (Бхаттачария, Зива-Закаи и т. д.), которые могут оказаться более точными. Использование этих границ в задачах определения потенциальной точности совмещения изображений был посвящен ряд работ [4, 5]. В данной работе также рассматривается более “плотная” (по сравнению с границей Крамера-Рао), но и более трудоемкая в вычислительном плане – граница Бхаттачария.

Порядок изложения следующий. В разделе 1 будет рассмотрено выражение для функции правдоподобия, а также способ оценки границ Крамера-Рао и Бхаттачария с помощью численного дифференцирования. Затем в разделе 2 будет проведено экспериментальное исследование указанных границ с помощью имитационного моделирования.

## 1. Функция правдоподобия. Границы Крамера-Рао и Бхаттачария

### 1.1. Функция правдоподобия

В качестве модели формирования изображения будем использовать следующую модель:

$$\begin{aligned} z_1(m, n) &= f(m, n) + n_1(m, n), \\ z_2(m, n) &= \alpha \cdot f(m - \theta_1, n - \theta_2) + \beta + n_2(m, n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – два наблюдаемых изображения;

$m$  и  $n$  – индексы пикселей;

$f$  – непрерывная функция изображения, которая нам неизвестна;

$n_1$  и  $n_2$  – помехи (с нормальным распределением и нулевым мат. ожиданием);

$\alpha, \beta$  – неизвестные коэффициенты преобразования яркости;

$\theta_1, \theta_2$  – значения истинного сдвига вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Эта модель задает пространственное преобразование между координатными сетками совмещаемых изображений. Она является некоторым усложнением модели в работах [3, 4], здесь мы учитываем возможное линейное искажение яркости, а также постоянную составляющую яркости. По поводу других способов записи функции правдоподобия (например, на основе модели фрактального броуновского движения) рекомендуем обратиться к [6].

Будем называть  $z_1$  – эталонным изображением

(ЭИ), а  $z_2$  – текущим (ТИ). Согласно [2] логарифм функции правдоподобия  $L$  для такой модели имеет вид

$$\log L(z_2 / \theta_1, \theta_2) = \frac{N^2 \cdot D(z_2)}{2 \cdot \sigma_n^2} (K^2(z_2, \theta_1, \theta_2) - 1), \quad (2)$$

где  $N$  – размер  $z_1$  и  $z_2$  (считаем квадратными);

$$D(z_2) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((z_2)_{ij} - \bar{z}_2)^2}{N^2} \quad \text{– выборочная дисперсия изображения } z_2;$$

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (z_2)_{ij};$$

$\sigma_n^2$  – дисперсия шума  $n_2$  (см. выражение (1));

$K(z_2, \theta_1, \theta_2)$  – нормированный коэффициент корреляции [1] между  $z_2$  и  $f(m - \theta_1, n - \theta_2)$ ; обратим внимание, что  $f$  – это непрерывная функция.

Функция  $f$  на самом деле неизвестна, но мы будем считать, что шум на эталонном изображении отсутствует, и по этому изображению мы можем восстановить непрерывную функцию  $f$  (например, путем интерполяции). В действительности это не совсем так, что приводит к смещенности оценок реальных алгоритмов и этот вопрос анализируется в работе [3].

### 1.2 Граница Крамера-Рао

Как известно информационную матрицу Фишера можно вычислить как [7]

$$I(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} E \left[ \left( \frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} \right)^2 \right] & E \left[ \frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2} \right] \\ E \left[ \frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2} \right] & E \left[ \left( \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

или как

$$I(\theta_1, \theta_2) = - \begin{bmatrix} E \left[ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1^2} \right] & E \left[ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] \\ E \left[ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right] & E \left[ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_2^2} \right] \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $E[\ ]$  означает статистическое усреднение.

Зная матрицу  $I$  (вычисленную в точке истинного совмещения), можем найти нижнюю границу Крамера-Рао. Далее ее будем обозначать просто CRLB (Cramer-Rao lower bound). Нижнюю границу для каждого параметра можем найти как

$$\text{CRLB}(\theta_i) = I^{-1}(i, i), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

### 1.3 Граница Бхаттачария

Общие формулы для расчета границы Бхаттачария можно найти в [4]. Будем использовать границу Бхаттачария 2-го порядка ( $M = 2$ ). Информационная матрица Фишера 2-го порядка (second order Fisher information matrix) будет иметь вид (размер  $4 \times 4$ )

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $I_{11} = I$  (совпадает с матрицей Фишера из предыдущего подраздела).

Общая формула для расчета подматриц

$$[I_{k,r}]_{m,n} = E \left[ \frac{\partial^k \log L(z_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_m^k} \cdot \frac{\partial^r \log L(z_2, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_n^r} \right]$$

для  $k, r = 1, 2$  и  $m, n = 1, 2$ .

Теперь можем вычислить границу Бхаттачария (будем обозначать ее BB, Bhattacharyya bound)

$$BB(\theta_i) = J_2^{-1}(i, i), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

### 1.4. Численное дифференцирование

Как уже было отмечено для оценки CRLB и BB необходимо вычислять производные логарифма функции правдоподобия (для вычисления CRLB использовалось выражение (3)). Для этого будем использовать формулы численного дифференцирования. Если имеется некоторая функция  $g(x)$ , то ее первая и вторая производные в точке  $x = x_0$  могут быть найдены по формулам [8, с. 339]:

$$g'(x_0) \approx \frac{-g_2 + 8g_1 - 8g_{-1} + g_{-2}}{12h}, \quad (8)$$

$$g''(x_0) \approx \frac{-g_2 + 16g_1 - 30g_0 + 16g_{-1} - g_{-2}}{12h^2},$$

где  $g_k = g(x_0 + kh)$  при  $k = -2, -1, 0, 1, 2$  ( $h$  – некоторый шаг).

Для использования этих формул с помощью интерполяции ЭИ вычислялись значения логарифма функции правдоподобия (2) как условно показано на рис. 1. Размер шага  $h$  был выбран равным 0,03 пикселя.

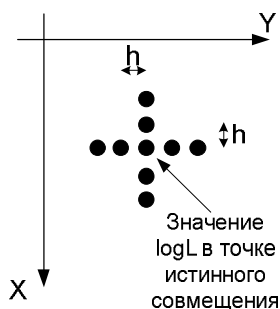


Рис. 1. Пояснение способа численного дифференцирования логарифма функции правдоподобия

## 2. Имитационное моделирование

В качестве тестируемого алгоритма совмещения использовался нормированный корреляционный алгоритм [1], который является оптимальным при линейных искажениях яркости ( $\alpha > 0$  в выражении (1)). Для достижения субпиксельной точности использовалась одна из модификаций метода интерполяции интенсивности. Интерполируя значения ЭИ, мы можем осуществлять поиск фрагмента ЭИ (наиболее похожего на ТИ) как будто ЭИ является непрерывным (функция  $f$  в выражении (1)). В данном случае использовалась бикубическая интерполяция. Поиск максимального значения  $K(z_2, \theta_1, \theta_2)$  тогда, по сути, представляет задачу оптимизации с непрерывными параметрами  $\theta_1, \theta_2$ . Для ее решения использовался симплекс-метод.

Вначале моделирование проводилось для искусственно смоделированных изображений поля фрактального броуновского движения (ФБД) [6]. Пример ФБД-изображения (при показателе Херста  $H = 0,7$ ) показан на рис. 2. Для всех экспериментов использовались ТИ размером  $9 \times 9$ , размер ЭИ составлял  $15 \times 15$ .



Рис. 2. Пример ФБД-изображения при  $H = 0,7$  (размер  $9 \times 9$ )

Рассчитывались RMSE ошибок (корень из среднеквадратической ошибки), оцененные с помощью статистических испытаний для одного фрагмента и разных реализаций шума, а также оценки двух границ: Крамера-Рао (CRLB) и Бхаттачария (BB). RMSE и указанные границы рассчитывались отдельно вдоль каждой из осей. Проводилось 1000 испытаний. RMSE рассчитывалось на основе выборки ошибок, не превышающих 2 пикселя (в этом случае совмещение мы считали верным). Для всех отношений сигнал/шум вероятность правильного совмещения была больше 0,9.

В первом эксперименте субпиксельные сдвиги (по осям X и Y) были равны 0 (т. е. координатная сетка ЭИ полностью совпадала с координатной сеткой ТИ):  $\Delta x = \Delta y = 0$ . На рис. 3,а показаны графики RMSE, CRLB и BB в зависимости от отношения сигнал/шум. Учитывая аналогичность результатов вдоль осей X и Y, здесь и далее показаны результаты только вдоль оси X. Для большей наглядности на рис. 3,б показаны те же графики только в логарифмическом масштабе (и по вертикальной и по горизонтальной осям).

зонтальной осям). Границы CRLB и BB на графике сливаются и не различимы (на самом деле значения BB на доли превосходят значения CRLB). RMSE (результаты моделирования) лежат даже ниже, чем предельные теоретические границы. Но нужно помнить, что это не точные CRLB и BB границы, а их оценки, рассчитанные с помощью формул численного дифференцирования. В целом границы достаточно точно описывают точность совмещения. Вид графиков может немного отличаться для разных реализаций ФБД-поля.

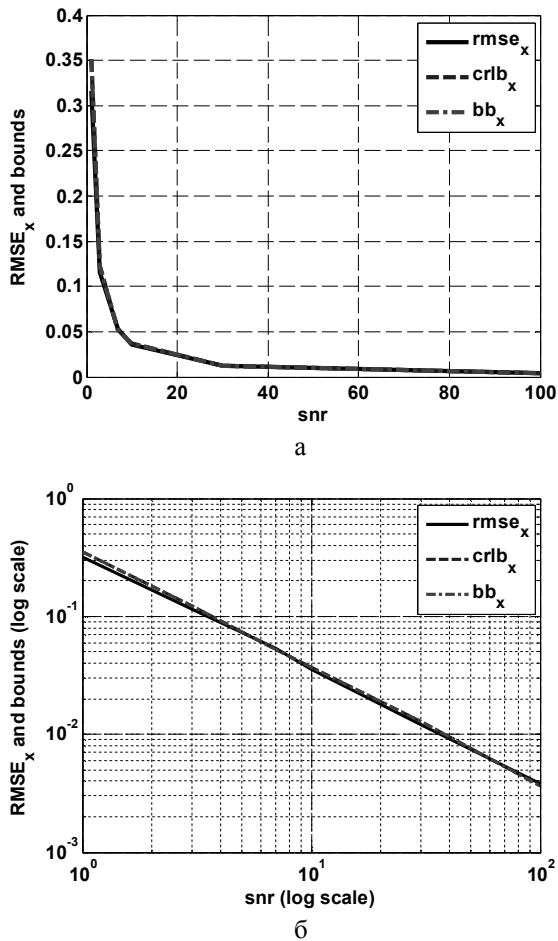


Рис. 3. RMSE, CRLB и BB вдоль оси X,  $H=0,7$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0$ : в обычном (а) и логарифмическом (б) масштабах

А что будет, если истинные субпиксельные сдвиги  $\Delta x, \Delta y$  не будут равны 0? Ранее упоминалось, что мы используем интерполяцию, чтобы получить непрерывное ЭИ (функцию  $f$ ). На самом деле, имеет значение, насколько точно мы можем это сделать, использует ли алгоритм субпиксельного совмещения истинную модель восстановления непрерывного ЭИ. Если мы смоделируем незашумленное ТИ, имеющее субпиксельный сдвиг, опять же с помощью бикубической интерполяции, то по-

лучим результат, похожий на изображенный на рис. 3. Но в реальных ситуациях мы не можем абсолютно точно восстановить  $f$ .

Чтобы промоделировать ошибки восстановления непрерывной функции  $f$  реализации ФБД поля моделировались следующим образом (аналогично [1]). Пространственный сдвиг ТИ и ЭИ моделировался по следующему алгоритму.

1. Моделирование методом Фурье реализации поля фрактального броуновского движения (ФБД) размером  $M \cdot n$ , где  $n$  – натуральное число больше единицы.

2. Выборка элементов ЭИ на квадратной сетке с шагом  $n$ .

3. Выборка элементов ТИ на аналогичной сетке, сдвинутой относительно сетки ЭИ на  $h_x$  и  $h_y$  пикселей соответственно по горизонтальной и вертикальной осям. Таким образом достигался пространственный сдвиг между ТИ и ЭИ в  $h_x/n$  и  $h_y/n$  пикселей соответственно по горизонтальной и вертикальной осям.

Результат показан на рис. 4. Видим, что теперь RMSE не стремится к нулю при  $snr \rightarrow \infty$ . Границы CRLB и BB достаточно близки и плохо описывают реальную точность при высоком отношении сигнал/шум.

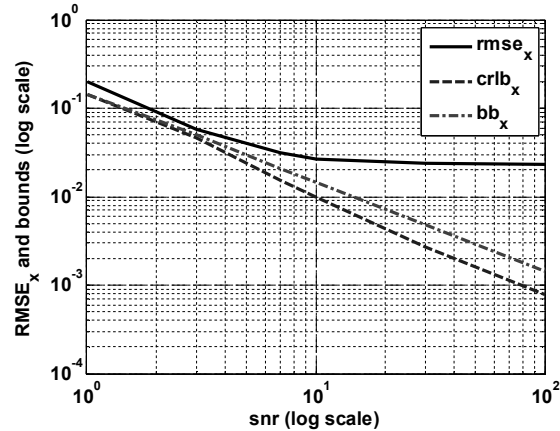


Рис. 4. RMSE, CRLB и BB вдоль оси X,  $H=0,7$ ,  $\Delta x = 0,25$ ,  $\Delta y = 0$ , в логарифмическом масштабе

Аналогичные эксперименты были проведены и для реальных изображений. С помощью программы Sasplanet [9], было загружено изображение (карта Бостона) из Google карт (рис. 5,а). Далее из этого изображения вырезались небольшие фрагменты (размером  $15 \times 15$  - в качестве ЭИ), для которых проводились эксперименты как для ФБД-изображений. Субпиксельный сдвиг ТИ моделировался с помощью фазового сдвига в спектральной области [10]. Изображение после этого обрезалось до размера  $9 \times 9$ , поэтому эффект периодичности (который воз-

никает при таком способе моделирования субпиксельного сдвига) не имел значения.

Пример одного из таких изображений показан на рис. 5,б. Графики RMSE, CRLB и ВВ для этого фрагмента изображены на рис. 6 ( $\Delta x = \Delta y = 0$ ) и рис. 7 ( $\Delta x = 0,25, \Delta y = 0$ ). Как мы видим, здесь сохраняются те же закономерности, что и для ФБД-изображений.



а



б

Рис. 5. Карта Бостона (а) и пример фрагмента карты Бостона, размер  $9 \times 9$  (б)

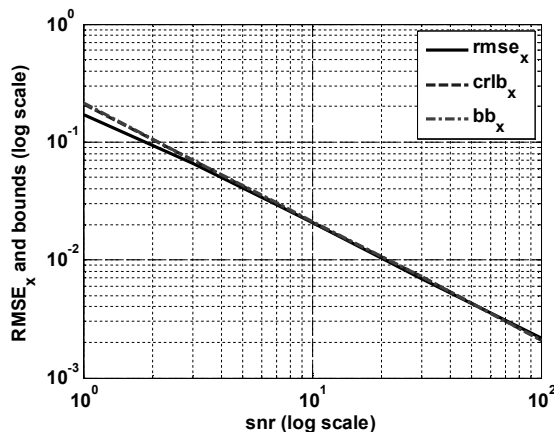


Рис. 6. RMSE, CRLB и ВВ вдоль оси X, фрагмент карты Бостона,  $\Delta x = \Delta y = 0$ , в логарифмическом масштабе

### Заключение

По проведенным экспериментам можно сделать следующие выводы.

1. Граница ВВ всегда немного выше (ее значения больше) по сравнению с CRLB. Что соответствует теоретическим представлениям, т. к. ВВ более точная (“плотная”) граница по сравнению с CRLB.

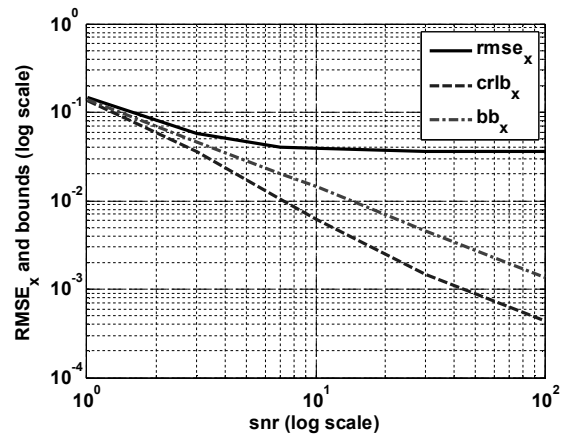


Рис. 7. RMSE, CRLB и ВВ вдоль оси X, фрагмент карты Бостона,  $\Delta x = 0,25, \Delta y = 0$ , в логарифмическом масштабе

2. В реальной ситуации, когда мы не можем точно восстановить непрерывную функцию  $f$ , границы ВВ и CRLB хорошо описывают точность реального совмещения при низких отношениях сигнал/шум. Однако в случае высоких отношений с/ш использование этих границ (в традиционной постановке, без учета ошибок восстановления функции  $f$ ) дает чересчур оптимистичную оценку.

Представляет интерес получение границ точности с учетом невозможности точного восстановления  $f$ . Например, такая попытка предпринята в работе [6].

### Литература

1. Душена, В. А. Сравнительный анализ субпиксельных алгоритмов при совмещении изображений [Текст] / В. А. Душена, М. Л. Усс // *Радиоэлектронні і комп'ютерні системи*. – 2011. – № 4. – С. 41–51.
2. Усс, М. Л. Поиск в пространстве параметров положения и ориентации летательного аппарата в задачах корреляционно-экстремальной навигации [Текст] / М. Л. Усс, В. А. Комяк // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2009. – № 8. – С. 30–43.
3. Robinson, D. Fundamental performance limits in image registration [Text] / D. Robinson, P. Milanfar // *IEEE Trans. Image Process.* – 2004. – № 13. – P. 1185–1199.
4. Xu, M. Tighter Performance Bounds on Image Registration [Text] / M. Xu, P. K. Varshney // in *Proc. IEEE Int. Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP 2006)*. – 2006. – P. 777–780.

5. Xu, M. Ziv-Zakai Bounds on Image Registration [Text] / M. Xu, H. Chen, P. K. Varshney // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2009. – Vol. 57, no. 5. – P. 1745-1755.

6. A precise lower bound on image subpixel registration accuracy [Text] / M. L. Uss, B. Vozel, V. A. Dushepa, V. A. Komjak, K. Chehdi // *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* – 2014. – Vol. 52, no. 6. – P. 3333–3345.

7. Porat, B. *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods* [Text] / B. Porat. – Prentice Hall, 1994. – 449 p.

8. Mathews, J. H. *Numerical Methods using Matlab* [Text] / J. H. Mathews, K. D. Fink. – 4th Ed. – Pearson Prentice Hall, 2004. – 696 p.

9. SASGIS. Веб-картографія і навігація [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.sasgis.org/sasplaneta>. – 17.10.2018.

10. Guizar, M. Efficient subpixel image registration by cross-correlation / Examples (File Exchange - MATLAB Central - MathWorks) [Електронний ресурс] / M. Guizar. – Режим доступу: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18401-efficient-subpixel-image-registration-by-cross-correlation>. – 17.10.2018.

*radioelektroniki – Achievements of Modern Radioelectronics*, 2009, no. 8, pp. 30-43. (In Russian).

3. Robinson, D., Milanfar, P. Fundamental performance limits in image registration. *IEEE Trans. Image Process.*, 2004, no. 13, pp. 1185 – 1199. doi: 10.1109/TIP.2004.832923

4. Xu, M., Varshney, P. K. Tighter performance bounds on image registration. In *Proc. IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2006)*, Toulouse, France, May 2006, pp. 777–780. doi: 10.1109/ICASSP.2006.1660458

5. Xu, M., Chen, H., Varshney, P. K. Ziv-Zakai Bounds on Image Registration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, vol. 57, no. 5. pp. 1745 – 1755. doi: 10.1109/TSP.2008.2011822

6. Uss, M. L., Vozel, B., Dushepa, V. A., Komjak, V. A., Chehdi, K. A precise lower bound on image subpixel registration accuracy. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 3333–3345. doi: 10.1109/TGRS.2013.2272559

7. Porat, B. *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*, Prentice Hall, 1994. 449 p.

8. Mathews, J. H., Fink, K. D. *Numerical methods using Matlab*, 4th Ed. Pearson Prentice Hall, 2004. 696 p.

9. SASGIS. Веб-картографія і навігація [SASGIS. Web mapping and navigation]. Available at: <http://www.sasgis.org/sasplaneta> (accessed 17.10.2018).

10. Guizar, M. Efficient subpixel image registration by cross-correlation / Examples (File Exchange - MATLAB Central - MathWorks). Available at: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18401-efficient-subpixel-image-registration-by-cross-correlation> (accessed 17.10.2018).

## References

1. Dushepa, V. A., Uss, M. L. Comparative analysis of subpixel algorithms for image matching. *Radioelektronni i kompyuterni systemy – Radioelectronic and computer systems*, 2011, no. 4, pp. 41–51. (In Russian).

2. Uss, M. L., Komjak, V. A. Search in parameters space for position and orientation of a flight object in correlation-extremal navigation. *Uspekhi sovremennoi*

*Postupila v redakciju 17.10.2018, rasсмотрена na redkollegii 12.12.2018*

## ГРАНИЦІ КРАМЕРА-РАО І БХАТТАЧАРІЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ПОТЕНЦІЙНОЇ ТОЧНОСТІ СУБПІКСЕЛЬНОГО СУМІЩЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

*В. А. Душена*

**Предметом** вивчення в статті є теоретичні нижні границі оцінок параметрів стосовно задачі суміщення зображень. **Метою** є дослідження та порівняльний аналіз границь Крамера-Рао і Бхаттачарія. **Завдання:** сформулювати алгоритми обчислення границь Крамера-Рао і Бхаттачарія для оцінки субпіксельного зсуву двох зображень; за допомогою методу статистичних випробувань порівняти розраховані границі з результатами роботи реального алгоритму суміщення. Використовуваними **методами** є: імітаційне комп'ютерне моделювання; метод статистичних випробувань (Монте-Карло). Метод статистичних випробувань використовувався як для розрахунку теоретичних границь (часткові похідні оцінювалися за допомогою формул чисельного диференціювання), так і для розрахунку точності роботи реального алгоритму. Субпіксельна точність алгоритму суміщення досягалася методом інтерполяції інтенсивності, при цьому задача визначення координат зображення розглядалася як задача оптимізації, яка вирішувалася чисельним методом. Отримані наступні **результати**. Експериментально підтверджується, що при розрахунку нижніх границь точності суміщення в традиційній постановці (коли ми не враховуємо помилки інтерполяції, використаної для досягнення субпіксельної точності) границя Бхаттачарія завжди проходить вище границі Крамера-Рао, що відповідає теоретичним уявленням. Однак, хоча границя Бхаттачарія і дає більш точні оцінки в порівнянні з границею Крамера-Рао, її значення при високих співвідношеннях сигнал/шум все одно є занадто оптимістичними для точності суміщення в реальних ситуаціях. В обчислювальних експериментах використовувалися як штучно змодельовані зображення (на основі моделі фрактального броунівського руху), так і фрагменти реальних супутникових знімків. **Висновки.** Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що дана робота, багато в чому слідуючи виконаним іншими авторами дослідженням, на відміну від них розглядає

функцію максимального правдоподібності, що враховує можливість лінійного перетворення яскравості між двома зображеннями, що є найбільш часто використовуваною на практиці моделлю. Правда, можливість повороту двох зображень в цій статті при цьому не враховується.

**Ключові слова:** суміщення зображень; субпіксельна точність; нормований кореляційний алгоритм; границя Крамера-Рао; границя Бхаттачарія.

## CRAMER-RAO AND BHATTACHARYYA BOUNDS FOR ACCURACY ESTIMATION OF SUB-PIXEL IMAGE CO-REGISTRATION

*V. A. Dushopa*

The subject matter of the article is theoretical lower bounds of parameter estimates applied to the problem of image co-registration. The goal is to study and compare the Cramer-Rao and Bhattacharyya bounds. The tasks to be solved are: to formulate algorithms for calculating the Cramer-Rao and Bhattacharyya bounds for estimating the subpixel shifts of two images; using the Monte Carlo methods to compare the calculated bounds with the results of the real registration algorithm. The methods used are computer simulation; Monte Carlo methods. Monte Carlo experiments were used both for calculating theoretical bounds (partial derivatives were estimated using numerical differentiation formulas) and for calculating the accuracy of the real algorithm. The subpixel accuracy of the registration algorithm was achieved by the intensity interpolation method, in this case, the problem of image coordinates determination was considered as an optimization problem solved by a numerical method. The following results were obtained. It is experimentally confirmed that, when calculating the lower bounds of the registration accuracy in the traditional formulation (when we do not take into account the errors of interpolation used to achieve subpixel accuracy), the Bhattacharyya bound always passes above the Cramer-Rao bound, that corresponds to the theory. However, although the Bhattacharyya bound provides more accurate estimates than the Cramer-Rao bound, its values at high signal-to-noise ratios are still too optimistic for registration accuracy in real situations. Both artificially modeled images (based on the fractal Brownian motion model) and fragments of real satellite images were used in computational experiments. Conclusions. The scientific novelty of the results obtained is that this work, in many respects following the research carried out by other authors, in contrast to them considers the maximum likelihood function taking into account the possibility of linear brightness transformation between two images, which is the most frequently used model in practice. However, the possibility of rotating two images in this article is not taken into account.

**Keywords:** image matching; subpixel accuracy; normalized cross-correlation; Cramer-Rao bound; Bhattacharyya bound.

**Душена Віталій Анатольевич** – ст. преп. каф. аэрокосмических радиоэлектронных систем (№501), Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

**Dushopa Vitaliy Anatol'evich** – Senior Lecturer of Department of Aerospace Radioelectronic Systems, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, e-mail: vitaliy\_dushopa@mail.ru, ORCID Author ID: 0000-0001-6105-3761, Scopus Author ID: 56072031500, ResearcherID: D-7306-2018 <https://scholar.google.com.ua/citations?user=JhGoM3YAAAAJ&hl=ru&oi=ao>