УДК 629.7.01 В. Г. Сухоребрый, М. И. Никифорова

Оценка влияния корреляции случайных параметров на вероятность потери устойчивости ракеты-носителя

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Постановка проблемы

Как показали результаты исследований, проведенных в работе [1], корреляция параметров функции случайного аргумента оказывает существенное влияние на значение вероятности потери работоспособности. При проектировании летательных аппаратов (ЛА) очень важно оценить степень надежности проектируемого объекта с наибольшей точностью, т.е. с учетом корреляционных связей параметров. В настоящей статье приводятся результаты исследований по проектной оценке вероятности устойчивости ракет-носителей (РН) с учетом корреляции параметров.

Объект и цель исследования

Движение статически неустойчивой упругой РН в канале рыскания, устойчивость которой обеспечивается с помощью автомата стабилизации (АС), можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi} = a_{\phi\phi}\phi + a_{\phi\delta}\delta;\\
&\ddot{z} = a_{z\phi}\phi + a_{z\delta}\delta;\\
&\ddot{q} = a_{q\delta}\delta + a_{qq}q;\\
&\phi_y = a_{\delta q}q;\\
&\phi_g = \phi + \phi_y;\\
&T_2\ddot{\delta} + T_1\dot{\delta} + \delta = K_{\phi}\phi_g + K_{\dot{\phi}}\dot{\phi}_g - K_{\dot{Z}}\dot{z},
\end{aligned} \qquad (1)$$

где ϕ - отклонение угла рыскания ракеты как твердого тела от программного значения; z - отклонение центра масс от программного значения; δ - угол отклонения управляющих органов; q - координата, характеризующая поперечные упругие колебания корпуса ракеты в месте установки датчика угла рыскания; ϕ_y - дополнительный угол рыскания, возникающий за счет упругого изгиба корпуса ракеты; ϕ_g - угол рыскания, измеряемый датчиком угла; a_{ij} - коэффициенты; T_1, T_2 - постоянные времени АС; K_{ϕ} - коэффициент усиления по каналу рыскания, $K_{\dot{\phi}} = T_d K_{\phi}$; T_d - постоянная времени дифференцирования; $K_{\dot{Z}}$ - коэффициент усиления по скорости отклонения центра масс. Параметры a_{ij}, T_1, T_2, K_{ϕ}, $K_{\dot{\phi}}$, T_d имеют существенные случайные разбросы. Кроме того, коэффициенты a_{ij} коррелированы.

В качестве условий работоспособности принимаются условия устойчивости системы (1) [2]:

$$\frac{(K_{\phi}|a_{Z\delta}| + |a_{Z\phi}|)K_{\dot{Z}} + a_{\phi\phi}K_{\phi}(T_d - T_1)}{|a_{\phi\delta}|K_{\phi}^2(T_d - T_1)} < 1, \tag{2}$$

$$\frac{|a_{\phi\delta}|T_2 T_d^2 K_{\phi}}{(T_d - T_1 + a_{\phi\phi}T_d T_2)T_1} < 1, \tag{3}$$

$$\frac{a_{q\delta}a_{\delta q}K_{\phi}T_d^2 T_2}{(|a_{qq}|T_2 T_d - T_d + T_1)T_1} < 1. \tag{4}$$

Целями данного исследования являются:

- сравнение двух методов определения статистических характеристик коэффициентов a_{ij};
- определение корреляционной матрицы коэффициентов a_{ij};
- определение влияния корреляции коэффициентов a_{ij} при расчете вероятности потери устойчивости.

Методика исследования и основные результаты

Эксперимент включает в себя следующие этапы:

1. Определение статистических характеристик коэффициентов a_{ij} двумя методами.
2. Определение корреляционной матрицы коэффициентов a_{ij}.
3. Определение вероятности потери устойчивости ракеты по условию (2) для 70-й секунды полета первой ступени РН «Циклон-3» [2] путем статистического моделирования с учетом и без учета корреляции.

Номинальные значения коэффициентов, взятые для времени полета t=70 с., представлены в табл. 1.

Таблица 1

a_{zz}^0	$a_{z\psi}^0$	$a_{z\delta}^0$	$a_{\psi z}^0$	$a_{\psi\psi}^0$	$a_{\psi\delta}^0$
-0,0169	-36,09	-1,441	0,0027	1,8113	-0,295

Определение статистических характеристик коэффициентов

Для определения статистических характеристик коэффициентов a_{ij} используются два метода:

1. С помощью линейной теории определения разбросов этих коэффициентов. В этом случае:

- закон распределения всех коэффициентов – нормальный;
- математическим ожиданием каждого коэффициента m_{ij} является значение этого коэффициента при нулевых разбросах, а следовательно, его номинальное значение;
- среднеквадратичное отклонение σ_{ij} для каждого коэффициента a_{ij} находим по формуле

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{3}, \tag{5}$$

где Δ_{ij} - разброс коэффициента a_{ij}

Коэффициенты a_{ij} являются функциями, выражающими закон изменения параметров ракеты, например, коэффициент

$$a_{z\psi} = -\frac{P + CqS}{m}$$

Случайные разбросы параметров для определения коэффициентов a_{ij} представлены в табл. 2. Эта информация предоставлена научно-производственным предприятием «Хартрон-Аркос». Величина разброса для каждого параметра в табл. 2 соответствует 3σ, σ – среднеквадратичное отклонение.

Таблица 2

Наименование параметра	**Обозначение параметра**	**Величина разброса, %**
Масса	m	±5
Момент инерции	J	±15
Координата x_α	x_α	±1,25
Центр давления	x_c	±5
Плотность атмосферы	ρ	±15
Градиент подъемной силы	C	±20
Тяга	P	±10
Тяга рулевого двигателя	R	±10

Разбросы коэффициентов a_{ij} определем по формуле

$$\Delta_{ij} = \sqrt{\sum \Delta_k^2}, \text{ k=1..n}, \tag{6}$$

где Δ_k – отклонения величины коэффициента a_{ij} от его номинального значения при отклонении к-го параметра на величину 3σ; n - количество параметров для определения коэффициента a_{ij}, имеющих случайные разбросы. Отклонения

$$\Delta_k = a_{ij}(\delta_k) - a_{ij}^0,$$

где a_{ij}^0 - номинальное значение коэффициента; $a_{ij}(\delta_k)$ - значение коэффициента с разбросом.

Например, разброс коэффициента $a_{z\delta}$ такой:

$\Delta_{z\delta} = \sqrt{\Delta_R^2 + \Delta_m^2}$;

$\Delta_R = a_{z\delta}(\delta_R) - a_{z\delta}^0 = a_{z\delta} \cdot (1 + \Delta R) - a_{z\delta}^0$;

$\Delta_m = a_{z\delta}(\delta_m) - a_{z\delta}^0 = a_{z\delta} \cdot (1 + \Delta m) - a_{z\delta}^0$;

ΔR, Δm - отклонения параметров R и m;

Δ_R = -1,441 $\cdot (1 + 0{,}1) + 1{,}441 = -0.1441$;

Δ_m = -1,441 $\cdot (1 + 0{,}05) + 1{,}441 = 0.06862$;

$\Delta_{z\delta} = \sqrt{(-0.1441)^2 + (0.06862)^2} \approx 0.1596$.

Аналогично определяются разбросы остальных коэффициентов.

2. С использованием статистического моделирования.

В этом случае коэффициенты a_{ij} удобно представить в следующем виде [3]:

$$a_{z\psi} = -\frac{P + CqS}{m} = a_{z\psi}^0 \cdot \delta a_{z\psi} = \left(-\frac{P}{m}\right)^0 \cdot \frac{(1+\Delta P)}{(1+\Delta m)} + \left(-\frac{CqS}{m}\right)^0 \cdot \frac{(1+\Delta C)(1+\Delta q)}{(1+\Delta m)};$$

$$a_{z\delta} = -\frac{n \cdot R}{m} = a_{z\delta}^0 \cdot \frac{(1+\Delta R)}{(1+\Delta m)};$$

$$a_{\psi\psi} = -\frac{CqS(x_\alpha - x_c)}{J} = a_{\psi\psi}^0 \cdot \frac{(1+\Delta C)(1+\Delta q)(1+\delta x)}{(1+\Delta J)} \quad (\delta x = x_\alpha - x_c);$$

$$a_{\psi\delta} = -\frac{nR(1 - x_c)}{J} = a_{\psi\delta}^0 \cdot \frac{(1+\Delta R)(1+\Delta x_c)}{(1+\Delta J)},$$

где C - градиент подъемной силы; q - скоростной напор; S - площадь поперечного сечения; m - масса; V - продольная скорость; Δpar_k - отклонение параметра par_k; $a_{z\delta}^0$, $a_{\psi\psi}^0$ и $a_{\psi\delta}^0$ - номинальные значения коэффициентов $a_{z\delta}$, $a_{\psi\psi}$ и $a_{\psi\delta}$; $(*)^0$ – номинальное значение величины в скобках.

Отклонение $\Delta\delta x$ рассчитываем с учетом формулы (6):

$$\Delta\delta x = \sqrt{\Delta x_\alpha^2 + \Delta x_c^2} = 5{,}2\ (\%).$$

Значение отклонения Δq находим из формулы расчета скоростного напора: $q = \frac{\rho V^2}{2}$. С учетом формулы (6) получим

$$\Delta q = \sqrt{\Delta\rho^2 + \Delta V^2} = 18{,}7\ (\%)$$

Аналогичным образом определяем ΔV:

$$V = \frac{P}{m}, \quad \Delta V = \sqrt{\Delta P^2 + \Delta m^2} = 11{,}2\ (\%).$$

После представления коэффициентов a_{ij} вышеизложенным способом, проведено статистическое моделирование объемом N=100000. По полученному статистическому материалу определены основные статистические характеристики коэффициентов a_{ij} [3]:

- математическое ожидание $m_{ij}^{c} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_{ij}}{N}$;
- дисперсия $D_{ij}^{c} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (a_{ij} - m_{ij}^{c})^2}{N}$;
- среднеквадратичное отклонение $\sigma_{ij}^{c} = \sqrt{D_{ij}^{c}}$.

Для определения дисперсии допускаем смещенную оценку, принимая во внимание то, что объем моделирования достаточно большой.

Значения статистических характеристик коэффициентов a_{ij}, полученные с применением двух вышеперечисленных методов, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Параметр	a_{zz}^{0}	$a_{z\psi}^{0}$	$a_{z\delta}^{0}$	$a_{\psi z}^{0}$	$a_{\psi\psi}^{0}$	$a_{\psi\delta}^{0}$
m_{ij}	-0,0169	-36,09	-1,441	0,0027	1,8113	-0,295
m_{ij}^{c}	-0,0168	-36,067	-1,4411	0,00271	1,8196	-0,29569
D_{ij}	2,77E-06	2,08	0,00283	8,49E-08	0,03451	0,000285
D_{ij}^{c}	2,89E-06	2,1316	0,00288	9,38E-08	0,03725	0,000341
σ_{ij}	0,001665	1,442245	0,053201	0,000291	0,185769	0,016893
σ_{ij}^{c}	0,001712	1,46211	0,053685	0,000306	0,093232	0,018467

Определение корреляционной матрицы коэффициентов a_{ij}

По результатам статистического моделирования построена корреляционная матрица для коэффициентов a_{ij}. Коэффициенты корреляции двух величин определяем по следующей формуле [3]:

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где N – размерность x и y; m_x- математическое ожидание величины x; m_y- математическое ожидание величины y; σ_x и σ_y - соответственно среднеквадратичные отклонения величин x и y.

Проведено четыре эксперимента, по которым определена «средняя» нормированная корреляционная матрица для коэффициентов a_{ij}, представленная в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициент	$a_{z\psi}$	$a_{z\delta}$	$a_{\psi\psi}$	$a_{\psi\delta}$
$a_{z\psi}$	1	0,20666	-0,597888	0,0215309
$a_{z\delta}$	0,20666	1	-0,019833	0,484474
$a_{\psi\psi}$	-0,597888	-0,019833	1	-0,430369
$a_{\psi\delta}$	0,0215309	0,484474	-0,430369	1

Определение вероятности потери устойчивости

Определение вероятности потери устойчивости РН по условию (2) состоит из следующих шагов:

1. Определение вероятности потери устойчивости с помощью статистического моделирования без учета корреляции.

Случайные разбросы параметров для условия (2), не указанных в табл. 2, представлены в табл. 5.

Таблица 5

Обозначение параметра	**Величина**	**Размерность**	**Разброс %**
K_{ϕ}	14	-	30
$K_{\dot{z}}$	0,009	рад.м$^{-1}$	50
T_d	0,5	с	20
T_1	0,1108	с	40
$a_{z\delta}$	-1,441	мс$^{-2}$	20
$a_{z\psi}$	-36,09	мс$^{-2}$	10
$a_{\psi\psi}$	1,8113	с$^{-2}$	50
$a_{\psi\delta}$	-0,295	с$^{-2}$	20

Схема моделирования без учета корреляции приведена на рис. 1. На этом рисунке функциями случайного аргумента (ФСА) являются коэффициенты a_{ij} .

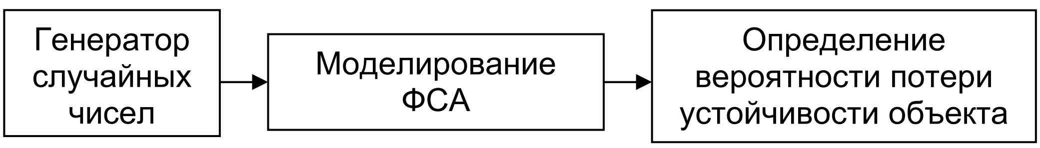

Рис. 1

2. Определение вероятности потери устойчивости с помощью статистического моделирования с учетом корреляции [1].

В условии (2) корреляцией связаны коэффициенты a_{ij} , поэтому в нормированной корреляционной матрице для этого условия ненулевыми элементами являются коэффициенты корреляции a_{ij}. Нормированная корреляционная матрица коэффициентов a_{ij} представлена в табл. 4.

Схема моделирования с учетом корреляции приведена на рис. 2. На этом и следующем рисунках функцией случайного аргумента (ФСА) является критериальная функция (КФ).

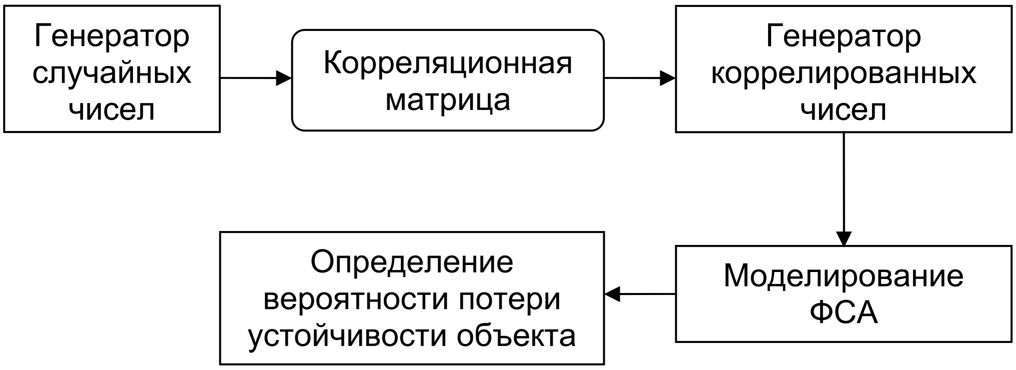

Рис. 2

3. Определение вероятности потери устойчивости с помощью статистического моделирования с предварительным моделированием значений коэффициентов a_{ij} и подстановкой этих значений в условие (2).

Такой способ даст наиболее точный результат. Схема моделирования для этого способа представлена на рис. 3.

Для всех трех шагов определения вероятности потери устойчивости РН по условию (2) проведено статистическое моделирование исследуемой КФ объемом N=50000000 и вычислена вероятность потери работоспособности исследуемого

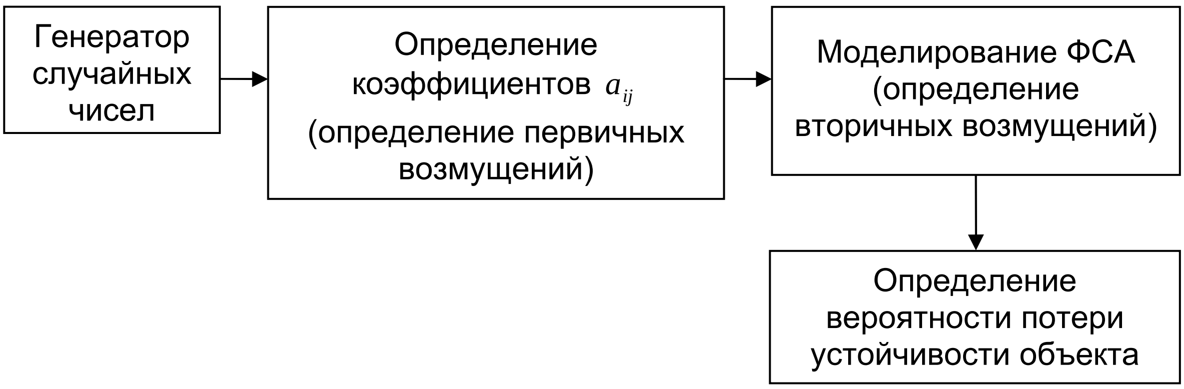

Рис. 3

объекта Q^* по формуле $Q^* = \frac{N_\Lambda}{N}$, где N - объем статистического моделирования; N_Λ - число реализаций КФ, превысивших в процессе статистического моделирования границу устойчивости [4].

Средние значения реализаций КФ, превысивших границу работоспособности N_Λ и вероятности потери устойчивости исследуемого объекта Q^*, полученные на третьем этапе эксперимента, представлены в табл. 6.

Таблица 6

Способ моделирования	**Среднее значение** N_Λ	**Среднее значение** Q^*
с генерацией коэффициентов a_{ij}	59	1,18E-06
без учета корреляции	115,5	2,31E-06
с учетом корреляции	99,5	1,99E-06

Выводы

1. Полученные методом статистического моделирования статистические характеристики коэффициентов a_{ij} хорошо совпадают с расчетными значениями, следовательно, линейная теория определения разбросов коэффициентов a_{ij} приемлема для получения результатов с достаточной для инженерных целей точностью.
2. Результаты исследований показали, что расчет вероятности потери устойчивости без учета корреляционных связей коэффициентов a_{ij} дает оценку «в запас».
3. Значение вероятности потери устойчивости РН, полученное с предварительным моделированием первичных возмущений, дает наиболее точный результат по сравнению с результатом, полученным при прямом расчете вторичных возмущений. Учет корреляции параметров КФ позволяет получить значение вероятности потери устойчивости системы, более близкое к точному результату.

Список литературы

1. Сухоребрый В.Г., Никифорова М.И. Оценка влияния корреляции на хвосты распределений функций случайных аргументов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Х.: НАКУ «ХАИ». – 2005. – Вып. 29 . - С. 92 - 97.
2. Игдалов И.М., Кучма Л.Д., Поляков Н.В., Шептун Ю.Д. Ракета как объект управления: Учебник /Под ред. акад. С.Н. Конюхова. – Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.
3. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976. – 319 с.
4. Сухоребрый В. Г. Вероятностные методы проектирования технических объектов. – Х: ХАИ, 1990. – 103 с.