

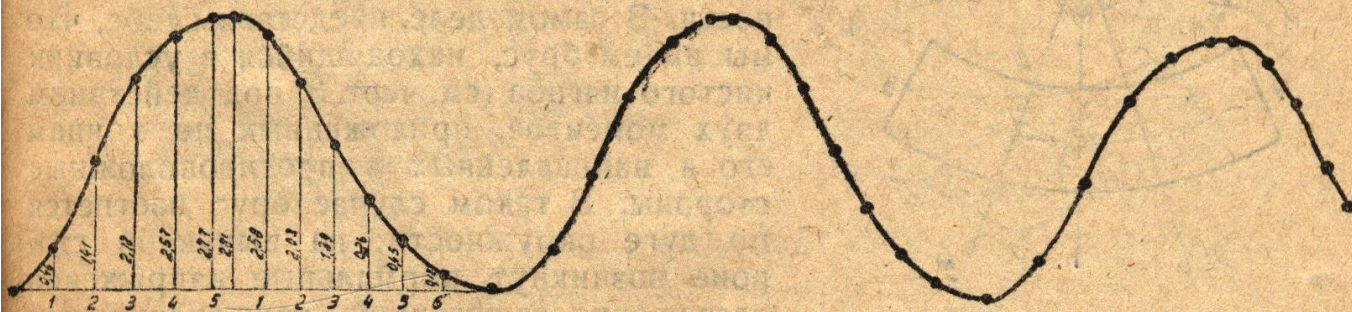
Проф. КСАНДРОВ Д. Н.

## Напряжения второго порядка при изгибе

При возникновении разнообразных явлений, которые наблюдаются в самых разнородных областях человеческих знаний, появление одних факторов, характеризующих данное явление, влечет за собой другие факторы более мелкого порядка, которые обычно остаются незамеченными, вследствие разительной их малости по сравнению с первыми.

Однако, эти факторы „2-го порядка“ не всегда сохраняют одно и то же количественное соотношение к величинам факторов 1-го порядка.

При некоторых условиях, благоприятных для развития факторов 2-го порядка, они, увеличиваясь, начинают расти и одновременно с этим приобретают все большее и большее влияние на характер явления. Это влияние становится заметным настолько, что оставить их без внимания означало бы отказ от понимания самого явления, и концепция его в этих условиях оказалась бы недопустимо грубым примитивом; расчеты, постро-



Черт. 1.

енные по такой примитивной концепции, приводят к настолько значительным погрешностям, что практически совершенно обесцениваются.

Это происходит в момент, когда исследуемые факторы, разившись, перерастают свой класс и достигают величины одинакового разряда с факторами 1-го порядка.

Такой процесс нарастания обыкновенно происходит вследствие накопления этих малых величин на значительном объеме, где они, складываясь, дают заметную по величине результирующую в отношении к факторам 1-го порядка.

В качестве примера рассмотрим процесс распространения морских волн. Если произвести разрез плоскостью, перпендикулярной к горизонтальной, образующей волны, то для наблюдателя картина представится в виде волнообразной кривой, изображенной на чертеже (1).

Однако, эту картину дает только первое поверхностное наблюдение; при более тщательном рассмотрении оказывается, что помимо этих волн 1-го порядка, существуют также волны 2-го порядка, которые настолько



малы по сравнению с первыми, что, обычно, не улавливаются поверхностным наблюдением.

Более тонкий наблюдатель видит картину более сложную; эта сложность заключается в том, что кривая, которая дана на чертеже (1), в свою очередь, состоит из волнистых кривых более высокого порядка. На чертеже (2) дано изображение этой волнистой кривой.

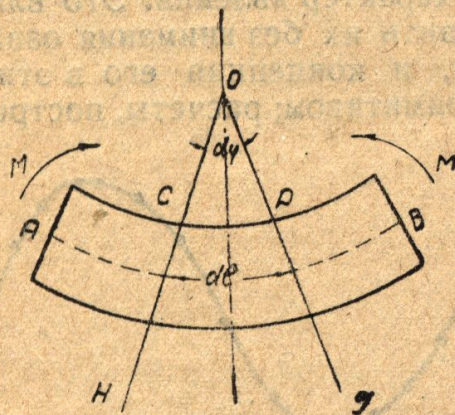
В действительности величина „вторичных волн“ еще меньше по сравнению с „первичными“, чем это изображено на чертеже (2) для того, чтобы оттенить самое явление.



Черт. 2.

(Интересно здесь отметить, что „вторичные волны“ были не только замечены, но и отчетливо переданы знаменитым русским художником Айвазовским в картине „Волна“).

Что касается иллюстрации процесса накапливания величин 2-го порядка и перерастания их результирующей в величину 1-го порядка, то с этой целью будет дано несколько примеров после вывода уравнений величины



Черт. 3

2-го порядка. Теория изгиба принимает, что нормальные напряжения между продольными волокнами не возникают, а между тем это не соответствует действительности. В самом деле, представим себе, что мы имеем брус, находящийся в условиях чистого изгиба (см. черт. 3) под действием двух моментов, приложенных по концам его и направленных в противоположные стороны. В таком случае брус изогнется по дуге окружности; на выпуклой стороне возникнут нормальные напряжения растяжения, на вогнутой—напряжения сжатия, направленные вдоль волокон. Поперечно-срезающие силы в рассматриваемом случае отсутствуют, а потому нет и тангенциальных напряжений.

Из этого бруса выделим элемент двумя плоскостями, проведенными через центр  $O$  нейтрального слоя дуги  $AB$ . Допустим, что эти плоскости  $OH$  и  $OG$  нормальны к нейтральному слою  $AB$  и образуют элементарный угол  $d\varphi$ ; длина элемента, измеренная по нейтральному слою, пусть будет— $dl$ . Этот элемент представлен на отдельном чертеже (4) в увеличенном масштабе.

Выделим элементарное волокно  $KL$  на переменном расстоянии  $y$  от нейтрального слоя толщиной  $dy$ ; в таком случае элементарное растягивающее усилие, действующее по его концам, определится выражением:  $\sigma dF$ , где  $\sigma$ —нормальное напряжение на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, определяемое известной формулой:

$$\sigma = \frac{My}{J_z} \dots \dots \dots (1)$$

$dF$ —площадь нормального сечения волокна  $KL$ . Переносим элементарные усилия  $\sigma dF$  по их направлениям в точку пересечения и геометрически их



складывая, найдем их равнодействующую— $dR$ , направленную к нейтральному слою. Это схематически представлено на черт. 5.

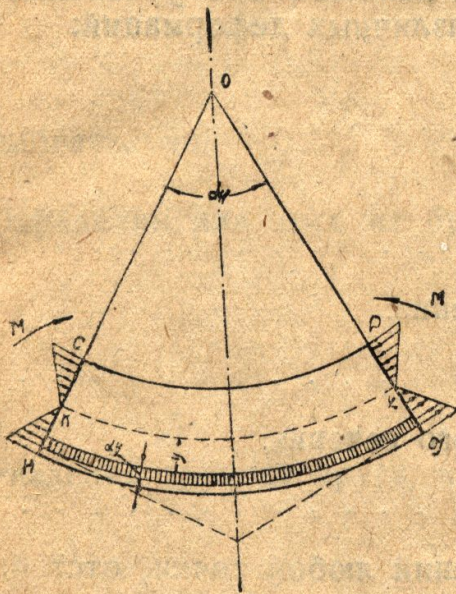
Рассмотрим  $\Delta npq$ , стороны этого треугольника соответственно равны усилиям:  $np = dR$ ,  $nq = \sigma dF$  и  $pq = \sigma dF$  его углы:  $\angle pqn = d\varphi$  вследствие перпендикулярности сторон, а углы  $\angle qpn = \angle pnq = \frac{\pi}{2} - \frac{d\varphi}{2}$  (так как  $\Delta pqn$ —равнобедренный). Применяя теорему синусов, получим:

$$\frac{dR}{\sin d\varphi} = \frac{\sigma dF}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\varphi}{2}\right)} = \frac{\sigma dF}{\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)} \dots \dots \dots (2)$$

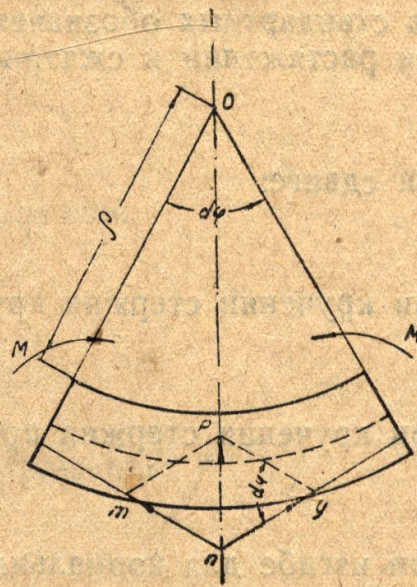
Вследствие малости угла  $d\varphi$  заменяем  $\sin d\varphi$  его аргументом  $d\varphi$ .

По малости аргумента принимаем приближенно  $\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 1$ . Подставляя эти значения в выражение (2), найдем:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\sigma dF}{1}$$



Черт. 4



Черт. 5

Откуда получаем:

$$dR = \sigma dF d\varphi \dots \dots \dots (3)$$

Из этого выражения видно, что  $dR$  является величиною 2-го порядка малости, т. к. зависит от произведения  $dF \cdot d\varphi$ .

При выводе мы рассматриваем только малые деформации (в пределах упругости), и потому возникновение  $dR$  обуславливается обязательно деформацией изгиба и по мере уменьшения его—уменьшается и  $dR$ , и в тот момент, когда  $d\varphi$  обращается в нуль, одновременно с этим обращается в нуль и  $dR$ , т. к. волокна будут испытывать (при наличии нормальных напряжений) только растяжение или сжатие.

Подставляя

$$\sigma = \frac{My}{J_z}, \quad d\varphi = \frac{dl}{\rho},$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z},$$



получим:

$$dR = \sigma dF d\varphi = \frac{My}{J_z} \frac{dF dl M}{E J_z} = \frac{M^2 y dF dl}{F J_z^2} \dots \dots \dots (4)$$

„Напряжение“<sup>1</sup> в любой точке, отстоящей на произвольном расстоянии „у“ от нейтрального слоя, определится, как предел отношения:

$$\frac{dR}{dF} = \frac{M^2 y dl}{E J_z^2} \dots \dots \dots (5)$$

Подставляя  $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z}$ , преобразуем найденное выражение в следующее:

$$\frac{dR}{dF} = \frac{\sigma^2 dl}{y E} \dots \dots \dots (6)$$

Как видно из обоих полученных выражений (5) и (6), напряжение зависит от модуля упругости  $E$  материала. С этим обстоятельством приходится встречаться впервые в теории прочности вообще и в частности в теории изгиба. Все напряжения 1-го порядка зависят только от внешних сил и от размеров бруса, но не зависят от свойств материала, из которого изготовлен брус. В самом деле, напишем все уравнения прочности в стандартных обозначениях для различных деформаций:

При растяжении и сжатии:

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \dots \dots \dots (a)$$

При сдвиге:

$$\tau = \frac{P}{F} \dots \dots \dots (b)$$

При кручении стержня круглого сечения:

$$\tau = \frac{M_t r}{J_p} \dots \dots \dots (c)$$

При кручении стержня прямоугольного сечения:

$$\tau = \frac{M_t}{abc^2} \dots \dots \dots (d)$$

При изгибе для нормальных напряжений любой точки, отстоящей от нейтрального слоя на произвольном расстоянии,  $y$ :

$$\sigma = \frac{My}{J_z} \dots \dots \dots (e)$$

для тангенциальных напряжений при изгибе:

$$\tau = \frac{Q S_y}{b J_z} \dots \dots \dots (f)$$

Из обзора всех уравнений прочности от (a) до (f) убеждаемся в справедливости сказанного.

Исключение из этого представляют напряжения, возникающие при ударе которые (см. §§ 65, 68 „Сопrotивление материалов“ Тимошенко) тоже зависят от модуля упругости  $E$ .

Чтобы выяснить причину, почему напряжения 2-го порядка зависят от модуля упругости материала, обратимся к формуле (3), которую предварительно разделим на  $dF$  и возьмем предел отношения  $\frac{dR}{dF}$ :

$$\frac{dR}{dF} = \sigma d\varphi \dots \dots \dots (7)$$

<sup>1</sup> Кавычки поставлены с целью оттенить своеобразие этого термина. Под „напряжением“ разумеется давление, вызываемое волокном, отнесенное к его поперечному сечению. Это несколько отличается от обычного содержания этого термина.



$\sigma$ , как уже это выяснено, не зависит от модуля упругости рассматриваемого материала; что же касается  $d\varphi$ , то эта величина существенным образом зависит от свойств материала:

$$d\varphi = \frac{dl}{\rho} = \frac{Mdl}{EJ_z}$$

Из последнего выражения видно, что чем меньше модуль упругости  $E$ , тем больше деформация  $d\varphi$ , т. е. если мы одинаковыми моментами изгибаем два бруса одинакового сечения, но изготовленных из разных материалов, то брус с большим модулем упругости будет меньше деформироваться (меньшее  $d\varphi$ ) и, следовательно, в нем возникнут меньшие напряжения 2-го порядка, так как нормальные напряжения 1-го порядка у обоих брусков будут равные.

Возьмем для примера два бруса: один из стали, другой из дерева с одинаковыми поперечными сечениями, а, следовательно, с равными моментами инерции  $J_{zc} = J_{zg} = J_z$  и равными моментами сопротивления, в таком случае нормальные напряжения для обоих брусков найдутся по выражениям:

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{J_{zc}}$$

и

$$\sigma_g = \frac{M \cdot y}{J_{zg}};$$

и следовательно:

$$\sigma_c = \sigma_g.$$

Определим для этих же брусков деформации:

$$d\varphi_c = \frac{Mdl}{E_c J_z}$$

и

$$d\varphi_g = \frac{Mdl}{E_g J_z}$$

Разделив друг на друга, найдем их отношение:

$$\frac{d\varphi_c}{d\varphi_g} = \frac{E_g}{E_c}.$$

Принимая  $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , а  $E_g = 10^5 \text{ кг/см}^2$ , найдем

$$\frac{d\varphi_c}{d\varphi_g} = \frac{1}{20}.$$

Отсюда следует, что напряжения 2-го порядка—для стального бруса также в 20 раз меньше, чем для бруса, изготовленного из дерева. Это вполне понятно, так как последний брус под действием равных моментов изогнется сильнее, а, следовательно, (см. черт. 5),  $\sigma dF$ , образуя больший угол в  $\Delta rqn$ , дадут большую результирующую  $dR$ . Здесь заметим, что вообще напряжения 2-го порядка, возникающие вследствие деформаций, обязательно зависят от свойств материалов и они тем меньше, чем жестче материал.

Рассматривая выражение (5) видим, что оно изменяется по сечению в зависимости от „ $y$ “ по закону прямой;  $\frac{dR}{dF}$  достигает своего наиболь-

шего значения при  $y = \frac{h}{2}$ :

$$\left(\frac{dR}{dF}\right)_{\max} = \frac{M^2 h d l}{2 E J_z^2} \dots \dots \dots (8)$$

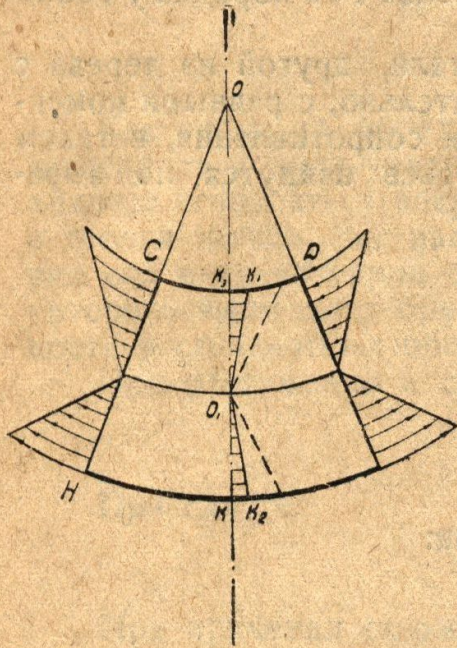


На нейтральном слое напряжение переходит через нулевое значение:

$$\left. \left( \frac{dR}{dF} \right) \right|_{y=0} = 0$$

Закон распределения напряжений 2-го порядка представляется аналогично распределению нормальных напряжений 1-го порядка, т. е. по треугольнику. На чертеже (6-ом) представлена картина распределения нормальных  $\sigma$  и напряжений 2-го порядка.

В графике распределения напряжений 2-го порядка стрелки не поставлены, т. к. он дает их только количественное изображение; что же касается их направления, то в области растянутой и сжатой они направлены к нейтральному слою. Здесь следует отметить, что на чертеже (6) напряжения 2-го порядка изображены в грубо преувеличенном виде по сравнению с  $\sigma$ , т. к. если их изобразить в одном масштабе, то прямая  $OK_2$  слилась бы с прямой  $OK$  и  $OK_1$  слилась бы с  $OK_3$ , настолько малы эти напряжения по сравнению с нормальными, как это мы увидим из дальнейшего изложения.



Черт. 6

Рассматривая выражение (6), мы убеждаемся в полной тождественности распределения напряжений с тем, которое мы нарисовали на основании (5-й) формулы, хотя последнюю гораздо проще анализировать, чем (6-ую). В самом деле, из последнего выражения видно, что с увеличением  $\sigma$  „напряжение“ растет, т. к. хотя в знаменателе „у“ тоже растет, но растет пропорционально 1-й степени, а числитель растет пропорционально второй степени  $\sigma$ , т. е. быстрее. При уменьшении „у“ до нуля, знаменатель стремится

к нулю опять пропорционально 1-й степени, а числитель опять быстрее уменьшается и потому выражение стремится к нулю. Для удобства анализа одну  $\sigma$  заменим выражением через момент „у“ и  $J_z$  сократим на „у“ и после этого все наши заключения очевидны:

$$\frac{dR}{dF} = \frac{\sigma dl M_y}{y E J_z} = \frac{\sigma M dl}{E J_z} \dots \dots \dots (9)$$

Теперь ясно, что  $\frac{dR}{dF}$  изменяется по закону  $\sigma$ , так как остальные множители по сечению сохраняют постоянное значение.

Как мы только что выяснили, каждое продольное волокно испытывает определенное давление, которое оно передает смежным волокнам, расположенным ближе к нейтральному слою. Очевидно, что давление по направлению к нейтральному слою, передаваясь от слоев более удаленных на слои, ближе расположенные к нему, постепенно нарастает и достигает своего наибольшего значения на нейтральном слое, где это результирующее давление уравнивается ему равным, противоположно направленным со стороны слоев, расположенных по другую сторону от нейтрального слоя.

Выясним закон распределения результирующих давлений (а не „напряжений“, что нами уже сделано) по любому сечению. С этой целью определим  $R_y$ , т. е. то давление, которое испытывает слой, расположенный на расстоянии „у“ от нейтрального слоя, от всех слоев, удаленных на большее расстояние.



Чтобы определить это давление, необходимо  $dR$  проинтегрировать в пределах от  $\frac{h}{2}$  до произвольного расстояния „ $y$ “:

$$R_y = \int_y^{\frac{h}{2}} dR = \int_y^{\frac{h}{2}} \frac{M^2 y dl dF}{E J_z^2}$$

Все постоянные для рассматриваемого сечения выносим за знак интеграла:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{E J_z^2} \int_y^{\frac{h}{2}} y dF$$

В последнем выражении  $\int_y^{\frac{h}{2}} y dF$  является статическим моментом части площади сечения, удаленной на расстояние „ $y$ “ от нейтрального слоя. Это выражение обозначим через  $S_y = \int_y^{\frac{h}{2}} y dF$ . В таком случае равнодействующее давление получит новую форму выражения:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{E J_z^2} S_y \dots \dots \dots (10)$$

Очевидно, что  $S_y$  зависит от размеров и фасона поперечного сечения рассматриваемого бруса.

Допустим, что брус—прямоугольного сечения. Для такого сечения статический момент получает известное выражение:

$$S_y = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Подставляя это значение  $S_y$  в соотношение (10), получим равнодействующее давление для бруса прямоугольного сечения:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{E J_z^2} \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \dots \dots \dots (11)$$

Из последнего выражения видно, что результирующее давление по сечению, в зависимости от изменения  $y$ , меняется по параболическому закону.

При  $y = \frac{h}{2}$ ,  $R_y = 0$ ; при  $y = 0$ ,  $R_y$  достигает своего максимального значения, которое обозначим  $R_0$  (т. е. то  $R_y$ , которое соответствует нулевому значению  $y$ ):

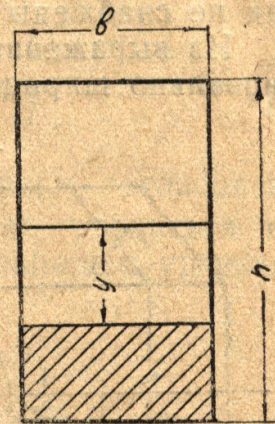
$$R_0 = \frac{M^2 dl}{E J_z^2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4}$$

Произведя замену  $J_z = \frac{bh^3}{12}$ , получим по сокращении преобразованное выражение для  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{M^2 dl}{E J_z} \frac{bh^2}{8} \frac{12}{bh^3} = \frac{3}{2} \frac{M^2 dl}{E J_z h} \dots \dots \dots (12)$$

Полученную зависимость мы можем выразить через наибольшее нормальное напряжение, введя его по уравнению:

$$\sigma_{max} = \frac{Mh}{2J_z}$$



Черт. 7



Отсюда определим

$$M = \frac{2J_z \sigma_{max}}{h}$$

Это значение изгибающего момента подставим в выражение (12):

$$R_0 = \frac{3}{2} \frac{4J_z^2 \sigma_{max}^2 dl}{h^2 EJ_z h} = \frac{6J_z \sigma_{max}^2 dl}{h^3 E}$$

Подставляя значение момента инерции, получим следующее выражение:

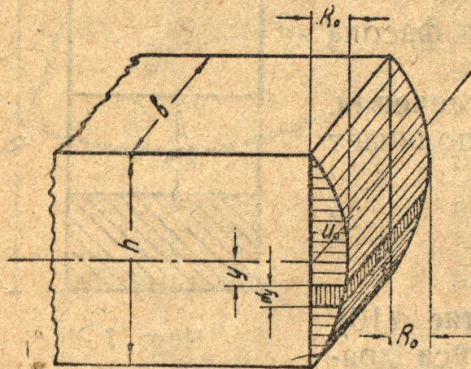
$$R_0 = \frac{6 b h^3 \sigma_{max}^2 dl}{12 h^3 E} = b \left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right) dl \quad \dots \dots \dots (13)$$

На чертеже (8) представлен закон параболического изменения  $R_y$ .

Ординаты параболы дают величину  $R_y$ , но не направление, поэтому они не снабжены стрелками.

Из выражения (13) видно, что наибольшее давление прямо пропорционально ширине бруса— $b$ , длине элемента— $dl$  и удельно-объемной ра-

боте потенциальной энергии— $\left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right)$ .



Черт. 8

Таким образом наибольшее давление  $R_0$  зависит от удельно-объемной работы, различно для разных материалов; это давление больше для материалов, у которых модуль упругости меньше, т. к. при одних и тех же внешних силах эти материалы испытывают большие деформации, что, как уже было выяснено выше, повышает величину „напряжений“ 2-го порядка, а, следовательно, и величину равнодействующего давления.

Определим объем параболического сегмента, который мы обозначим на чертеже 8-м через  $U_0$ . В выражении  $U_0$  множитель  $R_0$  представляет наибольшее значение  $R_y$ , при вычислении которого было принято во внимание—элементарная площадка  $dF = bdy$ ; поэтому выражение параболы уже умножено на  $b$  и, следовательно,  $U_0$  являются объемом параболического сегмента.

$$U_0 = \frac{2}{3} R_0 h = \frac{2}{3} h \frac{3}{2} \frac{M^2 dl}{EJ_z h} = \frac{M^2 dl}{EJ_z} \quad \dots \dots \dots (14)$$

Последнее соотношение получено путем подстановки значения  $R_0$  на основании выражения (12). Воспользовавшись формулой кривизны  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}$  и соотношением  $d\varphi = \frac{dl}{\rho} = \frac{M dl}{EJ_z}$ , преобразуем выражение (14) для  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{M dl}{\rho} = M d\varphi \quad \dots \dots \dots (14a)$$

Оказывается, что объем параболического сегмента, который характеризует закон изменения равнодействующего давления  $R_y$  (при всевозмож-



ных значениях  $y$  в пределах от  $y = \frac{h}{2}$  до  $y = 0$  и далее  $y = \frac{h}{2}$ , равняется элементарной работе изгиба, произведенной постоянным моментом  $M$  (т. е. момент в процессе работы не изменяется статически от нуля и до  $M$ , а сохраняет постоянное значение  $M$ ). Это вполне понятно, так как, определяя объем параболического сегмента, мы суммировали элементарные объемы (один такой объем показан на чертеже 8 (заштрихованный) величиною  $R_y dy$ ; каждый такой элементарный объем представляет элементарную работу силы  $R_y$  на пути  $dy$ , и потому объем параболического сегмента, как сумма элементарных объемов, дает работу изгиба:

$$U_o = Md\varphi \dots \dots \dots (14a).$$

Воспользовавшись этой зависимостью, найдем новое выражение максимального давления из соотношения:

$$U_o = \frac{2}{3} R_o h = Md\varphi$$

Из последнего определяем  $R_o$ :

$$R_o = \frac{3}{2} \frac{M}{h} d\varphi \dots \dots \dots (15)$$

Конечно, найденное выражение  $R_o$  находится в полном согласовании с его же выражением по зависимости (12), в чем легко убедиться простым сопоставлением этих выражений. В самом деле, напишем уравнение (12) и преобразуем его в (15):

$$\begin{aligned} R_o &= \frac{3}{2} \frac{M^2 dl}{EI_z h} = \frac{3}{2} \frac{M}{h} \left( \frac{M}{EI_z} \right) dl = \frac{3}{2} \frac{M}{h} \frac{dl}{\rho} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{M}{h} d\varphi \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

Выведенное здесь результирующее давление, направленное к нейтральному слою  $R_o$ , возникает в брус с элементарною длиною  $dl = \rho d\varphi$ .

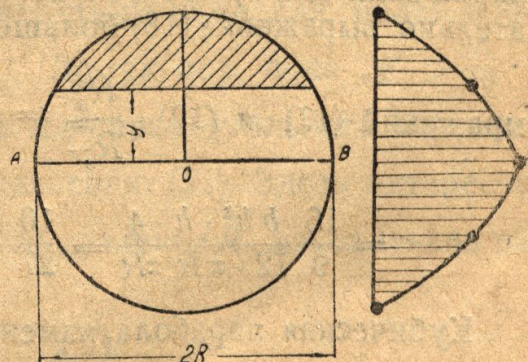
Очевидно, что  $R_o$  растет с увеличением длины элемента прямо пропорционально  $dl$ , как это следует из выражения (12).

### Брус круглого сечения

Допустим, что мы имеем брус круглого сечения, и постараемся определить равнодействующее давление для этого случая (черт. 9).

Статический момент заштрихованной площадки относительно нейтральной оси определяется по известному выражению:

$$S_y = \frac{2}{3} \left( R^2 - y^2 \right)^{3/2}.$$



Черт. 9.

Подстановка этого значения  $S_y$  в общее выражение (10) дает результирующее давление для бруса круглого сечения

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EI_z^2} \frac{2}{3} \left( R^2 - y^2 \right)^{3/2} \dots \dots \dots (16)$$



Отсюда видно, что результирующее давление при изменении  $y$  меняется по закону кубической параболы. При  $y=R$ ,  $R_y=0$ ; при  $y=0$ ,  $R_y$  достигает своего наибольшего значения:

$$R_o = \frac{2}{3} \frac{M^2 dl}{EI_z^2} R^3.$$

Подставляя значение  $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$ , получим новое выражение, аналогичное (12).

$$R_o = \frac{2}{3} \frac{M^2 dl 4R^3}{EI_z \pi R^4} = \frac{8}{3} \frac{M^2 dl}{EI_z \pi R} \dots \dots \dots (17)$$

Определяя момент из уравнения прочности, найдем для него зависимость:

$$M = \frac{2I_z \sigma_{max}}{h} = \frac{2I_z \sigma_{max}}{2R} = \frac{I_z \sigma_{max}}{R}$$

Подставляя это значение в (17), получим:

$$R_o = \frac{8}{3} \frac{I_z^2 \sigma_{max}^2 dl}{R^2 E I_z \pi R} = \frac{8}{3} \frac{I_z \sigma_{max}^2 dl}{E \pi R^3}.$$

Заменяя  $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$ , найдем окончательно:

$$R_o = \frac{8}{3} \frac{\pi R^4 \sigma_{max}^2 dl}{4 E \pi R^3} = \frac{2}{3} \frac{R \sigma_{max}^2 dl}{E} \text{ или:}$$

$$R_o = \frac{2}{3} 2R \left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right) dl \dots \dots \dots (18).$$

Сравнивая найденное выражение с (13), которое дает результирующее давление для прямоугольного сечения, видим, что для круглого сечения, для которого  $b = 2R$ , результирующее давление составляет только  $\frac{2}{3}$  от прямоугольного (в данном случае квадратного с размерами:  $b = 2R$  и  $h = 2R$ ). Однако, это не так: в действительности наибольшие нормальные напряжения для прямоугольного сечения меньше, чем для круглого; окончательно выражение (18) больше (13). В этом легко убедиться сравнением

$$\begin{aligned} \text{выражений (17) и (12)} \quad \frac{R_o^o}{R_o^{\square}} &= \frac{8 M^2 dl}{3 E I_z^o \pi R} : \frac{3 M^2 dl}{2 E I_z^{\square} h} = \frac{8 \cdot 2 I_z^{\square} \cdot h}{3 \cdot 3 I_z^o \pi R} = \\ &= \frac{16}{9} \frac{b h^3 \cdot h \cdot 4}{12 \cdot \pi R^4 \pi R} = \frac{16}{27} \frac{2R \cdot 8R^3 \cdot 2R}{\pi^2 R^5} = \frac{16 \cdot 32}{27 \cdot 10} = \frac{256^1}{135} \end{aligned}$$

Кубическая парабола изменений  $R_y$  представлена на чертеже (9).

1) Это вполне понятно; дело в том, что  $\sigma_{max}^o$  больше  $\sigma_{max}^{\square}$ . Отношение  $\frac{\sigma_{max}^o}{\sigma_{max}^{\square}} =$

$\frac{4M h^3}{\pi R^3 6M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8R^3}{\pi \cdot R^2} = \frac{16}{3\pi}$ . Вследствие этого обстоятельства деформация бруса круглого сечения также больше деформации бруса квадратного сечения, в связи с этим растут „напряжения 2-го порядка“ и обусловленные ими результирующие давления  $R_o$ .



Интенсивность давления на единицу длины определится выражением:

$$q = \frac{R_0}{dl} = \frac{8}{3} \frac{M^2}{EI_z \pi R} \quad \dots \quad (19)$$

или через квадрат нормальных напряжений из (18):

$$q = \frac{2}{3} (2R) \left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right), \quad \dots \quad (20)$$

т. е. интенсивность давления на единицу длины балки равна двум третям произведения из ширины бруса на удельно-объемную потенциальную энергию.

### Брус двутаврового сечения

Допустим, что мы имеем брус двутаврового сечения с размерами, данными на чертеже. Статический момент заштрихованной площадки определится согласно чертежа (10) следующим выражением:

$$S_y = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left( \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1}{2} - y \right) \left( \frac{h_1}{2} + y \right)$$

После простых преобразований, получим:

$$S_y = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y^2 \right)$$

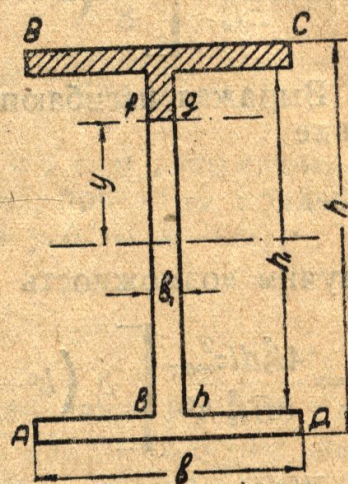
Подстановка этого значения статического момента заштрихованной площади в выражение (10) дает величину результирующего давления для двутаврового бруса:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EI_z^2} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right] \quad \dots \quad (22)$$

Закон изменения равнодействующей давления опять параболический, но этот закон уже более сложен, чем выведенный нами для более простых сечений (прямоугольного и круглого). До тех пор, пока  $y > \frac{h_1}{2}$ , закон изменения  $R_y$  сохраняется тот же, что для прямоугольного сечения, когда же  $y < \frac{h_1}{2}$ ,  $R_y$  изменяется уже по уравнению (22). Здесь интересно отметить, что вся величина результирующего давления  $R_y$ , накопленная на горизонтальной полке:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EI_z^2} \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2)$$

(Это выражение получено из (22) путем подстановки  $y_1 = \frac{h_1}{2}$ ), передается вертикальной полкой  $b f g h$ ; кроме того, на последней возникают допониительные давления, которые учитывает второй член выражения (22).



Черт. 10



Вообще говоря, при тонких вертикальных стенках величины, определяемые вторым членом, малы, так как все выражение умножается на половину  $b_1$  очень малой величины и, следовательно, этим членом в большинстве случаев для практических целей можно пренебречь. В таком случае, вертикальная стенка работает под действием двух равных и обратно направленных сил:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EI_z^2} \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2), \text{ при которых возможно}$$

ее выпучивание. Величина результирующего давления, приходящаяся на единицу длины вертикальной стенки, должна ограничиваться величиной ее (единицы длины) критической силы. Максимальное значение  $R_y$  получится из (22) подстановкой  $y=0$ :

$$R_o = \frac{M^2 dl}{EI_z^2} \left[ \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{b_1 h_1^2}{8} \right] = \frac{M^2 dl}{8EI_z^2} \left[ b (h^2 - h_1^2) + b_1 h_1^2 \right] \quad (23).$$

Выражая изгибающий момент через наибольшее нормальное напряжение

$$M = \frac{2I_z \sigma_{max}}{h},$$

получим возможность написать соотношение  $R_o$  и  $\sigma_{max}$ :

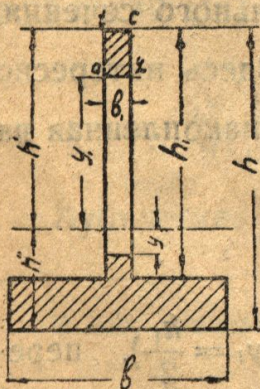
$$R_o = \frac{4I_z^2 dl \sigma_{max}^2}{8EI_z^2 h^2} \left[ b (h^2 - h_1^2) + b_1 h_1^2 \right] = \frac{\sigma_{max}^2 dl}{2Eh^2} \left[ b (h^2 - h_1^2) + b_1 h_1^2 \right] \quad (23^I).$$

Желая придать форму аналогичную (13), вынесем  $b_1$  общим множителем и почленно разделим на  $h^2$  выражение, заключенное в скобки:

$$R_o = b_1 \left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right) dl \left\{ \frac{b}{b_1} \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \right] + \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \right\} \dots \dots (23^{II}).$$

Легко видеть, что количество, заключенное в скобках, выражается в отвлеченных единицах и является коэффициентом, который оценивает форму поперечного сечения.

Для двутаврового сечения этот коэффициент больше единицы, т. к.  $b > b_1$  и  $h_1 < h$ , для прямоугольного сечения он равен единице. Это следует из сравнения выражений (13) и (23<sup>II</sup>). Сравнивая (13) с (18) убеждаемся, что этот коэффициент для круглого сечения равен  $\frac{2}{3}$ .



Черт. 11

### Брус однатаврового сечения

Рассмотрим брус однатаврового сечения с размерами, показанными на чертеже (11).

Расстояние нижнего волокна от нейтральной оси  $h''$  — определится выражением:

$$h'' = \frac{b (h - h_1) \frac{h - h_1}{2} + b_1 h_1 \left[ \frac{h_1}{2} + (h - h_1) \right]}{b (h - h_1) + b_1 h_1} = \frac{b (h - h_1)^2 + b_1 h_1 (2h - h_1)}{2 [b (h - h_1) + b_1 h_1]}.$$



Статический момент заштрихованной площади получим по формуле:

$$S_y = b(h-h_1) \left[ h'' - \frac{h-h_1}{2} \right] + b_1 [h'' - (h-h_1) - y] \frac{h'' - (h-h_1) + y}{2} =$$

$$= b(h-h_1) \left( h'' - \frac{h-h_1}{2} \right) + \frac{b_1}{2} \left\{ [h'' - (h-h_1)]^2 - y^2 \right\}$$

Подстановка найденного выражения в (10) дает:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left\{ b(h-h_1) \left( h'' - \frac{h-h_1}{2} \right) + \frac{b_1}{2} \left\{ [h'' - (h-h_1)]^2 - y^2 \right\} \right\} \dots (24).$$

Из последнего соотношения видно, что результирующее давление изменяется по поперечному сечению по параболическому закону; на нейтральном слое (при  $y = 0$ )  $R_y$  достигает своего наибольшего значения:

$$R_o = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left\{ b(h-h_1) \left( h'' - \frac{h-h_1}{2} \right) + \frac{b_1}{2} [h'' - (h-h_1)]^2 \right\} \dots (25).$$

Наименьшее значение  $R_y$  получается, конечно, при  $y = h''$ , это значение  $R_y = 0$ ; в этом можно убедиться подстановкой  $y = h''$ ; при этом придется воспользоваться выражением [оно получается при  $y > h'' - (h-h_1)$ ]:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b}{2} (h'' - y)^2$$

Если определять значение результирующего давления  $R_y$  для площадки, расположенной выше нейтральной оси (*a t C L*), то получим зависимость, аналогичную той, какую мы получили для прямоугольного сечения:

$$R_{y_1} = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} b_1 (h' - y_1) \left( \frac{h' + y_1}{2} \right) = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b_1}{2} (h'^2 - y_1^2)$$

Это результирующее давление достигает наибольшего значения при  $y_1 = 0$ :

$$R_{o1} = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b_1}{2} h'^2 \dots \dots \dots (25^1).$$

Само собою разумеется, что  $R_o = R_{o1}$ , т. к. статические моменты площадей, расположенных по разные стороны от оси, проходящей через центр тяжести сечения, конечно, равны, а, следовательно, равны и

$$R_o = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} S_o = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} S_{o1} = R_{o1}$$

Это же соотношение следует также из условий равновесия: оба результирующие давления должны уравновесить друг друга, в противном случае выделенный элемент балки длиной  $dl$  не будет находиться в состоянии покоя.

### Балки с асимметричными сечениями

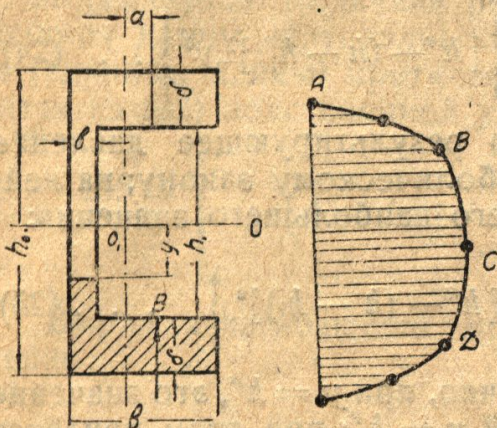
В рассматриваемом случае равнодействующие давления создают дополнительные пары, которые или уравновешивают друг друга, как это имеет место при корытообразном сечении, или уравновешиваются дополнительными реактивными моментами, которые возникают в этом случае (допустим при угловом сечении).



## Балка корытного сечения

Допустим, что мы имеем брус, сечение которого показано на чертеже; там же даны его размеры (черт. 12.)

Очевидно, что равнодействующее давление на нейтральной оси, действующее сверху и снизу, приложено не посередине толщины  $b_1$  вертикальной стенки, а где-то вправо от нее. Чтобы определить ее точку приложения, поступим следующим образом: разобьем площадь сечения на 3 части, как это пунктиром показано на чертеже. Равнодействующие давлений горизонтальных полок, приложенные посередине их ширины „ $b_1$ “ в точках А и В, создают моменты с плечем „ $a$ “.



Черт. 12

Равнодействующее давление верхней полки создает момент  $Ra$ , вращающий по направлению вращения часовой стрелки, а равнодействующее давление нижней полки создает момент той же величины, но направленный в противоположную сторону. Если бы мы захотели определить моменты, действующие по концам вертикальной стенки, то для этого достаточно  $R$  умножить на плечо  $\frac{b}{2} - \frac{b_1}{2} = \frac{1}{2}(b - b_1)$ ;

под действием этих двух моментов вертикальная стенка находится в состоянии чистого изгиба при одновременном действии продольно-сжимающих сил. Как известно, такой случай является „исключительным“ и к нему не приложим закон независимости действия сил; этот случай нагрузки известен в литературе под названием „жато-изогнутый брус“ (Проф. Ксандров Д. Н., „Теория упругости“, выпуск II, издание ХАИ, 1934 г.).

Рассматриваемый случай гораздо опаснее, чем изолированное действие сил, вызывающих продольный изгиб.

Займемся определением величины равнодействующего давления  $R_y$  площади сечения, расположенного дальше „ $y$ “ от нейтральной оси. Статический момент заштрихованной на чертеже площадки определится выражением:

$$S_y = b\delta \left( \frac{h}{2} - \frac{\delta}{2} \right) + b_1 \left( \frac{h}{2} - \delta - y \right) \left( \frac{\frac{h}{2} - \delta - y}{2} + y \right) = \\ = \frac{b\delta}{2} (h - \delta) + \frac{b_1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} - \delta \right)^2 - y^2 \right]$$

Подставляя найденное значение  $S_y$  в уравнение (10), найдем результирующее давление для балки корытного сечения:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left\{ \frac{b\delta}{2} (h - b) + \frac{b_1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} - \delta \right)^2 - y^2 \right] \right\} \dots \dots \dots (26).$$

Из этого выражения видно, что результирующее давление изменяется по закону квадратной параболы, что наибольшее значение получается при  $y = 0$ :

$$R_o = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left[ \frac{b\delta}{2} (h - b) + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h}{2} - \delta \right)^2 \right]$$

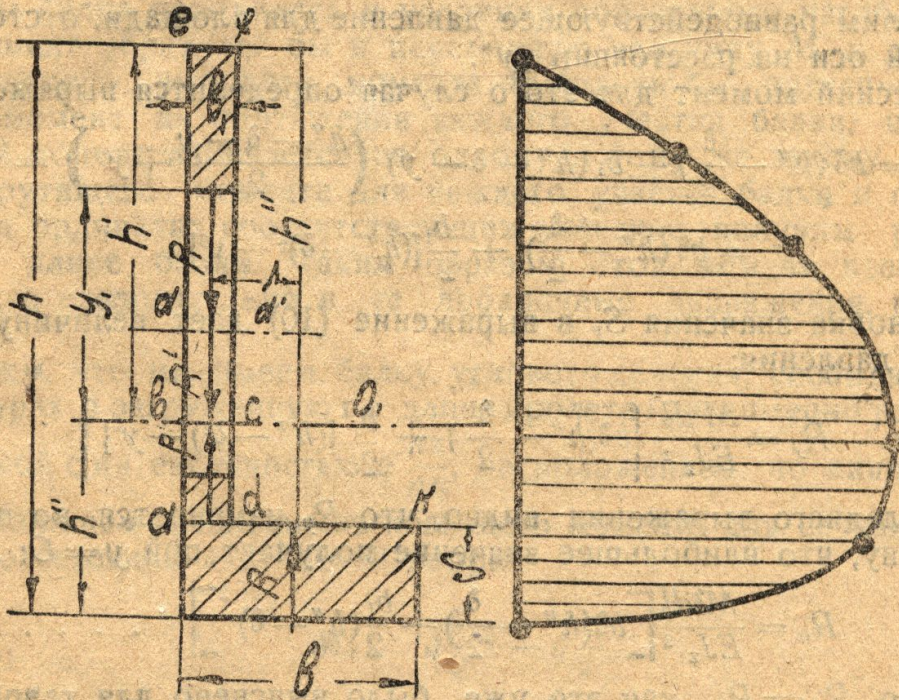
Если „ $y$ “ приобретает значение большее  $\frac{h_1}{2}$ , то  $R_y$  изменяется по закону параболы, соответствующей прямоугольному сечению.



На чер. (12) графически представлен закон изменения  $R_y$  по сечению. Кривая состоит из двух парабол. Сначала (при уменьшении „у“ от  $\frac{h}{2}$  до  $\frac{h_1}{2}$ ) кривая резко изменяется по ветвям  $AB$   $ED$ ; в это время результирующее давление  $R_y$  быстро накапливается по всей ширине и толщине горизонтальной полки; затем (когда „у“ продолжает уменьшаться от  $\frac{h}{2}$  до 0) процесс накопления резко замедляется, т. к. накопление напряжений 2-го порядка резко замедляется, вследствие значительного уменьшения толщины вертикальной полки по сравнению с размером „b“ горизонтальной полки и вследствие падения нормальных напряжений с приближением к нейтральному слою.

### Балка углового сечения

Допустим, что имеем балку углового сечения, показанного на чертеже (13), где также даны его размеры.



Черт. 13.

В рассматриваемом случае равнодействующее давление горизонтальной полки создает момент, который стремится вращать против часовой стрелки относительно ц. т. сечения.

Часть вертикальной стенки  $abcd$ , расположенной ниже нейтральной оси  $OO_1$ , создает давление  $R^1$ , которое уравнивается давлением части вертикальной стенки  $ba^1d^1c$ , расположенной выше нейтральной оси. Эти обе равные части вертикальной стенки, симметрично расположенные относительно нейтральной оси, создают равные и обратно направленные давления  $R^1$ , которые находятся в равновесии.

Часть площади вертикальной стенки  $a^1efd^1$  создает давление  $R$ , которое равно давлению горизонтальной полки, параллельно ей и направлено в противоположную сторону. Эти два давления образуют пару с моментом  $M = Rl$ . Этот момент скручивает балку вокруг продольной оси и уравнивается опорными моментами.



Определим закон распределения равнодействующего давления по площади углового сечения. Если мы выделим часть площади вертикальной стенки, отстоящей на расстоянии „у“ выше нейтральной оси, то

$$S_y = \frac{b_1}{2} (h'^2 - y_1^2)$$

и, следовательно, равнодействующее давление определится по формуле для прямоугольного сечения:

$$R_{y1} = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b_1}{2} (h'^2 - y_1^2) \dots \dots \dots (27)$$

Из последнего выражения видно, что равнодействующее давление изменяется по параболическому закону, что при  $y_1 = h'$   $R_{y1} = 0$  и что при  $y_1 = 0$  равнодействующее давление достигает своего наибольшего значения:

$$R_{o1} = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b_1}{2} h'^2 \dots \dots \dots (28)$$

Определим равнодействующее давление для площади, отстоящей ниже нейтральной оси на расстоянии „у“.

Статический момент для этого случая определится выражением:

$$\begin{aligned} S_y &= b\delta \left( h'' - \frac{\delta}{2} \right) + b_1 (h'' - \delta - y) \left( \frac{h'' - \delta - y}{2} + y \right) = \\ &= b\delta \left( h'' - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{b_1}{2} [(h'' - \delta)^2 - y^2] \end{aligned}$$

Подстановка значения  $S_y$  в выражение (10) дает величину равнодействующего давления:

$$R_y = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left\{ b\delta \left( h'' - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{b_1}{2} [(h'' - \delta)^2 - y^2] \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Из последнего выражения видно, что  $R_y$  изменяется по параболическому закону, что наибольшее значение получает при  $y = 0$ :

$$R_o = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \left[ b\delta \left( h'' - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{b_1}{2} (h'' - \delta)^2 \right] \dots \dots \dots (30)$$

Конечно,  $R_{o1} = R_o$ , как это уже было выяснено для таврового сечения. Графический закон распределения равнодействующего давления  $R_y$  по поперечному угловому сечению представлен на чертеже (13). Из графика видно, что  $R_y$  быстро растет на горизонтальной полке, затем рост замедляется, достигает  $R_o$  на нейтральной оси и после этого начинается замедленное падение на вертикальной стенке. Интересно определить скручивающий момент, возникающий на длине элемента балки  $dl$ :

$$\Delta M_t = R\lambda$$

С этой целью определим равнодействующее давление горизонтальной стенки:

$$R = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} b\delta \left( h'' - \frac{\delta}{2} \right) = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b}{2} \delta (2h'' - \delta) \dots \dots \dots (31)$$

Эта равнодействующая проходит посредине ширины полки „b“ и, следовательно:

$$\lambda = \frac{b}{2} - \frac{b_1}{2} = \frac{1}{2} (b - b_1) \dots \dots \dots (32)$$



На основании этого крутящий момент получит новую форму:

$$\Delta M_t = \frac{M^2 dl}{EJ_z^2} \frac{b}{2} \delta (2h'' - \delta) \left( \frac{b - b_1}{2} \right)$$

или

$$\Delta M_t = \frac{M^2 dl}{4EJ_z^2} b \delta (2h'' - \delta) (b - b_1) \dots \dots \dots (33)$$

На единицу длины приходится момент:

$$M_t^0 = \frac{\Delta M_t}{dl} = \frac{M^2}{4EJ_z^2} b \delta (b - b_1) (2h'' - \delta) \dots \dots \dots (34)$$

Мы рассматривали балку, работавшую в условии чистого изгиба, и потому  $M$  сохранял постоянное значение и, следовательно, на каждый пог. см. балки приходился постоянный момент  $M_t^0$ ; желая получить суммарный крутящий момент, достаточно  $M_t^0$  умножить на длину балки  $l$ :

$$M_t = M_t^0 l = \frac{M^2 l}{4EJ_z^2} b \delta (b - b_1) (2h'' - \delta) \dots \dots \dots (35)$$

Если бы балка находилась в условиях поперечного изгиба, то изгибающий момент обратился бы в переменную величину  $M_x$  и для определения суммарного крутящего момента пришлось бы интегрировать элементарный момент на протяжении каждого участка балки, на котором изгибающий момент изменяется по одному и тому же закону. Определив величину крутящего момента для каждого участка балки и отложив их величины на ординатах соответствующих участков, получим распределение  $M_t$  по длине балки. Таким образом этот момент всегда можно определить, а следовательно и те добавочные напряжения, которые он вызывает.

Допустим, что мы имеем балку углового сечения, свободно лежащую на двух опорах и нагруженную по длине пролета  $l$  равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q \frac{кг}{см}$ , расположенной по линии центров кручения. Напишем уравнение изгибающего момента для сечения, находящегося на расстоянии  $x$  от левой опоры.

$$M_x = q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2}$$

Это значение  $M_x$  подставляем в уравнение элементарного крутящего момента:

$$\Delta M_t = \frac{M_x^2 dl}{4EJ_z^2} \delta b (b - b_1) (2h'' - \delta)$$

Приближенно принимаем  $dl \approx dx$  и интегрируем в пределах от  $l$  до 0:

$$M_t = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{4EJ_z^2} \delta b (b - b_1) (2h'' - \delta) = \frac{\delta b (b - b_1) (2h'' - \delta)}{4EJ_z^2} \int_0^l \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\delta b (b - b_1) (2h'' - \delta)}{4EJ_z^2} \int_0^l \left[ \left( \frac{ql}{2} \right)^2 x^2 + \left( \frac{qx^2}{2} \right)^2 - \frac{2q^2 l x^3}{4} \right] dx \dots \dots \dots (36)$$

Для упрощения выражения вводим обозначение:

$$K = \frac{\delta b (b - b_1) (2h'' - \delta)}{4EJ_z^2} \dots \dots \dots (37)$$



В таком случае после интегриации получили:

$$M_t = K \frac{q^2 l^5}{120} \dots \dots \dots (38)$$

Желая проверить наименование единиц  $M_t$ , подставим в выражение крутящего момента названия всех величин.

Такая подстановка приводит после сокращений к кг-см.

Интересно выяснить, по какому закону крутящий момент распределяется по длине пролета балки.

Из выражения элементарного момента легко усмотреть, что он изменяется прямо пропорционально квадрату изгибающего момента, действующего в рассматриваемом сечении.

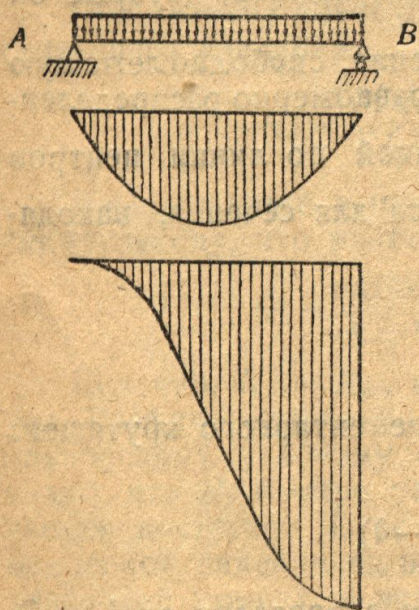
Следовательно, чтобы получить изменение элементарного крутящего момента по длине пролета, достаточно ординаты эпюры изгибающего момента возвести в квадрат и по ним, как по ординатам построить новую кривую, которая и будет представлять графически закон изменения элементарного крутящего момента.

Чтобы выяснить закон распределения  $M_t$  по длине пролета, достаточно провести интегриацию в пределах от  $x$  и до 0. В самом деле, произведем такую операцию:

$$M_t = K \int_0^x \left[ \left( \frac{ql}{2} \right)^2 x^2 + \left( \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{q^2 l x^3}{2} \right] dx =$$

$$K \left[ \left( \frac{ql}{2} \right)^2 \frac{x^3}{3} + \left( \frac{q}{2} \right)^2 \frac{x^5}{5} - \frac{q^2 l}{2} \frac{x^4}{4} \right] = K \frac{q^2}{3 \cdot 5 \cdot 8} \left[ 10 l^2 x^3 + 6 x^5 - 15 l x^4 \right] \dots (39)$$

На чертеже (14) представлено графически изменение  $M_t$  на нижнем графике; выше него расположена эпюра моментов.



Черт. 14

При построении эпюры  $M_t$  предположено, что нагрузка приложена по „оси центров кручения“ и потому никакого добавочного момента не дает; кроме того при построении эпюр крутящего момента от результирующих давлений напряжений 2-го порядка не показаны опорные моменты кручения. Эти условия приняты во внимание при построении всех последующих эпюр  $M_t$ .

Начиная от опоры, изгибающий момент растет от нуля по закону параболы; в связи с этим крутящий момент нарастает сначала медленно (кривая имеет на опоре горизонтальную касательную), затем изгибающий момент увеличиваясь, в середине пролета достигает своего максимума; в соответствии с этим кривая крутящего момента тоже начинает резко увеличивать ординаты и в тот момент, когда изгибающий момент начинает уменьшаться, у кривой  $M_t$  начинает уменьшаться прирост ординат, кривая переходит через точку перегиба

и у второй опоры резко замедляется увеличение ординат и кривая касается горизонтали.

Чтобы убедиться в изложенном, достаточно взять производную от  $M_t$  по  $x$ , приравнять ее нулю и найти то значение  $x^a$ , при котором  $M_t$  достигает максимума.

$$\frac{dM_t}{dx} = K \frac{q^2}{120} (30 l^2 x^2 + 30 x^4 - 60 l x^3) \dots \dots \dots (40)$$



Приравнивание полученного выражения к нулю и сокращение на  $K \frac{q^2}{120}$  и выведение общим множителем  $30x^2$  приводит к уравнению:

$$30x^2(l^2 + x^2 - 2lx) = 0$$

Отсюда, или  $x=0$ , или сумма, заключенная в скобках, равна нулю; в последнем случае получаем:

$$l^2 + x^2 - 2lx = 0 ; x^2 - 2lx + l^2 = 0$$

Откуда:  $x = l \pm \sqrt{l^2 - l^2} = l \dots \dots \dots (41)$   
 т. е.  $M_t$  при  $x=0$  достигает минимума, а при  $x=l$ , достигает максимума; это значение нами уже было найдено:

$$Mt_{max} = K \frac{q^2 l^5}{120} \dots \dots \dots (42)$$

Чтобы определить точку перегиба, достаточно найти вторую производную, приравнять ее нулю, и из этого уравнения определить  $x$ .

$$\frac{d^2 M_t}{dx^2} = K \frac{q^2}{120} (60l^2 x + 120x^2 - 180lx^2)$$

Приравнивая вторую производную к нулю, по сокращении на  $K \frac{q^2}{120} \cdot 60$ , придем к следующему уравнению:

$$x(l^2 + 2x^2 - 3lx) = 0$$

В последнем выражении или  $x=0$ , или множитель, заключенный в скобки, равен нулю:

$$l^2 + 2x^2 - 3lx = 0 ; x^2 - \frac{3l}{2}x + \frac{l^2}{2} = 0$$

Откуда:

$$x = \frac{3}{4}l \pm \sqrt{\frac{9}{16}l^2 - \frac{l^2}{2}} ; x = \frac{3}{4}l \pm \frac{l}{4} ;$$

$$x_1 = l ; x_2 = \frac{l}{2} \dots \dots \dots (43)$$

Нас не интересуют опорные точки ( $x=0$  и  $x=l$ ), т. к. продолжение в обе стороны кривой вне пролета физического смысла не имеет (по условию балка имеет длину  $l$ ) и потому  $x_2 = \frac{l}{2}$  служит подтверждением того, что посередине пролета действительно имеется точка перегиба.

**Балка, нагруженная сосредоточенной силой**

Допустим, что балка углового сечения нагружена сосредоточенной силой, приложенной в середине пролета, как это показано на чертеже (15). Из эпюры моментов видно, что балку следует разбить на две части: левую I и правую II; для левой:  $M_I = \frac{P}{2} x_1$

для правой:  $M_{II} = \frac{Px_2}{2} - P \left( x_2 - \frac{l}{2} \right) = \frac{P}{2} (l - x_2)$

В этих выражениях изгибающего момента  $x_1$  изменяется от  $\frac{l}{2}$  до 0, а  $x_2$  от  $l$  до  $\frac{l}{2}$ .



Величина  $M_{tmax}$  определится из выражения:

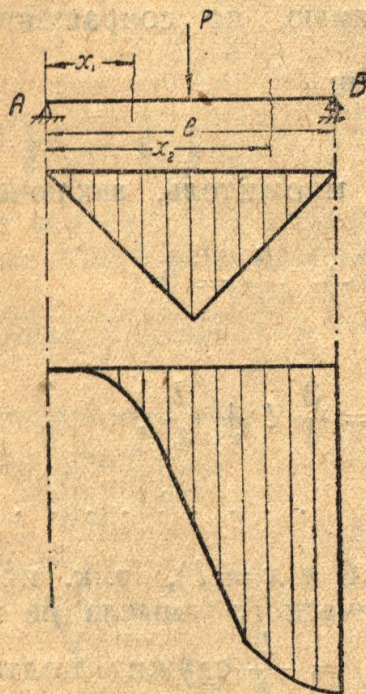
$$M_{tI max} = \int_0^{l/2} \frac{M_I^2 dx_1}{4EJ_z} \delta b (b - b_1) (2h'' - \delta) =$$

$$= \frac{\delta b}{4EJ_z^2} (b - b_1) (2h'' - \delta) \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2} x_1\right)^2 dx_1 = K \frac{P^2 x_1^3}{4 \cdot 3} \Big|_0^{l/2} = K \frac{P^2}{4 \cdot 3 \cdot 8} l^3 =$$

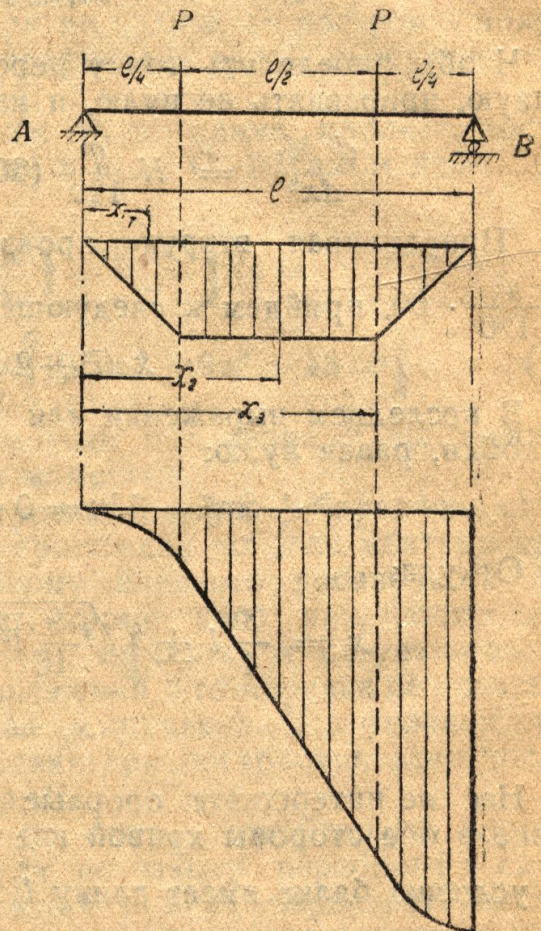
$$= K \frac{P^2 l^3}{9 \cdot 6} \dots \dots \dots (44)$$

Желая определить закон изменения  $M_t$  в зависимости от  $x_1$ , возьмем неопределенный интеграл; в таком случае необходимо добавить произвольную постоянную:

$$M_{tI} = K \frac{P^2 x_1^3}{4 \cdot 3} + C_1 \dots \dots \dots (45)$$



Черт. 15



Черт. 16

Значение  $C$  определится из начальных условий: при  $x_1 = 0$   $M_t$  тоже равно нулю

$$0 = K \frac{P^2 \cdot 0^3}{12} + C_1 ; C_1 = 0$$

Итак: 
$$M_{tI} = K \frac{P x_1^3}{12} \dots \dots \dots (46)$$

Для правой части найдем  $M_{tII}$ , подставив  $M_{tII} = \frac{P}{2} (l - x_2)$ :

$$M_{tII} = K \int \frac{P^2}{4} (l - x_2)^2 dx_2 = -K \frac{P^2}{12} (l - x_2)^3 + C_2 \dots \dots \dots (47)$$

Значение  $C$  определится из того условия, что при  $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$   $M_{tI} = M_{tII}$ :



$$-K \frac{P^2}{12} \left( l - \frac{l}{2} \right)^3 + C_2 = K \frac{P^2 l^3}{12 \cdot 8}; \quad -K \frac{P^2 l^3}{12 \cdot 8} + C_2 = K \frac{P^2 l^3}{12 \cdot 8};$$

$$C_2 = K \frac{P^2 l^3}{6 \cdot 8} = K \frac{P^2 l^3}{48} \dots \dots \dots (48)$$

Подставляя найденное значение  $C_2$  в уравнение  $M_{III}$ , найдем:

$$M_{III} = -K \frac{P^2}{12} (l - x_2)^3 + K \frac{P^2 l^3}{48} = K \frac{P^2}{48} \left[ l^3 - 4(l - x_2)^3 \right] \dots \dots \dots (49)$$

На чертеже (15) представлен графический закон изменения  $M_t$ . Начиная от левой опоры  $A$ ,  $M_t$  увеличивается от нуля (кривая обращена вогнутостью вверх); при  $x_1 = \frac{l}{2}$  кривая  $M_t$  имеет точку перегиба и при дальнейшем росте  $x_2$  кривая образует выпуклость, обращенную вниз. Чтобы найти минимум и максимум значения  $M_t$ , достаточно взять частные производные от  $M_{II}$  и  $M_{III}$  и приравнять их нулю. Это приводит к ответам:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = l$ , т. е. на левой опоре имеем  $M_{II}$  мин., а на правой  $M_{III}$  макс. и потому касательные к кривой  $M_t$ , проведенные под опорами, горизонтальны.

**Балка, нагруженная сосредоточенными силами**

Чтобы показать, как определить  $M_t$  для сосредоточенных сил, разберем случай, когда балка нагружена двумя сосредоточенными силами (черт. 16).

Допустим, что балка имеет угловое сечение и что силы расположены согласно чертежа. Из эпюры изгибающих моментов видно, что балку следует разбить на 3 части: I, II и III и для каждой в отдельности находим  $M_t$ , производя интегрирования в пределах, соответствующих данной части. Для I, II и III частей находим:

$$M_I = Px_1; \quad M_{II} = Px_2 - P \left( x_2 - \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl}{4} = Const \text{ (чистый изгиб)}$$

$$M_{III} = Px_3 - P \left[ x_3 - \frac{l}{4} \right] - P \left[ x_3 - \frac{3}{4} l \right] = P \left[ l - x_3 \right]$$

В этих выражениях  $x_1$  меняется в пределах от 0 до  $\frac{l}{4}$ ,  $x_2$  от  $\frac{l}{4}$  до  $\frac{3}{4} l$  и  $x_3$  от  $\frac{3}{4} l$  до  $l$ .

Определяем закон изменения  $M_{II}$ , для I части:

$$M_{II} = \int \frac{M^2_I dx_1}{4EJ_2^2} \delta b (b - b_1) (2h'' - \delta) = \frac{\delta b (b - b_1) (2h'' - \delta)}{4EJ_2^2} \int P^2 x_1^2 dx_1 =$$

$$= K \frac{P^2 x_1^3}{3} + C_1 \dots \dots \dots (50)$$

Значение произвольной постоянной  $C_1$  определится из того условия что на опоре  $A$   $M_{II} = 0$ ; подставляя  $x_1 = 0$ , найдем  $C_1 = 0$ . Таким образом уравнение кривой  $M_{II}$  для первой части балки получает вид:

$$M_{II} = K \frac{P^2 x_1^3}{3} \dots \dots \dots (51)$$

Эта кривая — парабола 3-го порядка.

Для определения закона изменения на пролете второй части, подставляем в выражение крутящего момента значение  $M_{II} = \frac{Pl}{4}$ :

$$M_{III} = K \int \left( \frac{Pl}{4} \right)^2 dx_2 = K \frac{P^2 l^2}{16} x_2 + C_2 \dots \dots \dots (52)$$



$C_2$  определится из тех соображений, что при  $x_1 = x_2 = \frac{l}{4}$   $M_{tI} = M_{tII}$

Подставляя  $x_1 = \frac{l}{4}$  в выражение  $M_{tI}$ , найдем:

$$M_{tI} = K \frac{P^2 l^3}{3 \cdot 64} = K \frac{P^2 l^3}{192} \dots \dots \dots (53)$$

Найденную величину приравниваем  $M_{tII}$ , подставляя  $x_3 = \frac{l}{4}$ :

$$K \frac{P^2 l^3}{192} = K \frac{P^2 l^3}{16 \cdot 4} + C_2; C_2 = K \frac{P^2 l^3}{192} (1-3) = -K \frac{P^2 l^3}{96} \dots \dots \dots (54)$$

Подставляя значение  $C_2$  в выражение  $M_{tII}$ , найдем его уравнение для второго участка балки:

$$M_{tII} = K \frac{P^2 l^2}{16} x_2 - K \frac{P^2 l^3}{96} = K \frac{P^2 l^2}{96} (6x_2 - l) \dots \dots \dots (55)$$

По этому выражению строим эпюру  $M_{tII}$ .

Для определения  $M_{tIII}$  в его выражение подставляем значение

$$M_{III} = Px_3 - P(x_3 - \frac{l}{4}) - P(x_3 - \frac{3}{4}l) = P(l - x_3)$$

$$M_{tIII} = K \int P^2 (l - x_3)^2 dx_3 = -K \frac{P^2 (l - x_3)^3}{3} + C_3 \dots \dots \dots (56)$$

$C_3$  определяем по предыдущему:

$$M_{tII} \Big|_{x_2 = \frac{3}{4}l} = K \frac{P^2 l^2}{96} \left( 6 \cdot \frac{3}{4}l - l \right) = K \frac{P^2 l^3}{96} \cdot \frac{7}{2};$$

$$M_{tIII} \Big|_{x_3 = \frac{3}{4}l} = -K \frac{P^2 l^3}{3 \cdot 64} + C_3;$$

откуда:

$$C_3 = K \frac{P^2 l^3}{96} \cdot \frac{7}{2} + K \frac{P^2 l^3}{3 \cdot 64} = K \frac{P^2 l^3}{24} \dots \dots \dots (57)$$

Подставляя значение  $C_3$ , найдем выражение для крутящего момента на 3-м участке балки:

$$M_{tIII} = -KP^2 (l - x_3)^3 + K \frac{P^2 l^3}{24} = K \frac{P^2}{24} [l^3 - 8(l - x_3)^3] \dots \dots \dots (58)$$

На чертеже (16) представлен график изменения по длине пролета всей балки. Здесь мы ограничимся только разбором приведенных случаев нагрузки, но очевидно, что метод построения остается один и тот же для всех нагрузок.

### Центр кручения

Разобранные случаи нагрузки асимметричных профилей приводят нас к заключению, что помимо изгибающих моментов, обязательно возникают и крутящие моменты, изменяющиеся по длине балки. Из этого следует, что если бы даже внешняя нагрузка была распределена по линии „центров кручения“, то и в этом случае не могло произойти „простого изгиба“, т. к. явление кручения вызывалось бы  $M_t$ , который не исчезает при приложении внешних сил в „центре кручения“, но обусловлен только возникновением напряжений 2-го порядка; последние, складываясь, приводятся к двум равнодействующим, образующим пару с моментом  $M_t$ . Допустим, что на основании этих соображений, найден в каком-либо сечении новый „центр кручения“, учитывающий и этот крутящий момент, но так как  $M_t$  меняется по длине балки, то это означает, что „новый центр кручения“



также перемещался бы по отношению к профилю сечения и, следовательно, геометрическое место точек этих „центров кручения“ представило бы плоскую кривую, плоскость которой параллельна нейтральному слою.

Допустим, что мы имеем консоль углового сечения, для которого экспериментальным путем определен „центр кручения“ путем перемещения в плоскости сечения на конце консоли внешней нагрузки. Если удалось добиться „простого изгиба“, (при этом все точки сечения имеют один и тот же прогиб; это обстоятельство устанавливается посредством измерения прогибов горизонтальной полки конечного сечения), то это означает, что точка приложения экспериментально выбрана так, что внешние силы создают крутящий момент  $M_t$ , но скручивающий брус в противоположную сторону и, следовательно, точка приложения внешних сил в данном случае является „новым центром кручения“, однако это не обуславливает уравнивания крутящих моментов по всей длине консоли во всех сечениях. В самом деле, внешние силы на конце консоли имеют определенное плечо, которое создало  $M_t$  и, следовательно, это плечо и этот момент сохраняется по всей длине консоли, а крутящий момент, возникающий вследствие напряжений 2-го порядка, меняется по длине консоли и потому в любом сечении будет действовать пара с моментом, равным разности между моментом, который действует на конце консоли, и тем его значением, которое действует в рассматриваемом сечении.

Эти рассуждения приводят к выводу, что для того, чтобы осуществить простой изгиб, необходимо „центр кручения“ перемещать в плоскости, параллельной нейтральному слою, в соответствии с переменными значениями  $M_t$  и, следовательно, геометрическое место точек „новых центров кручения“ образует плоскую кривую. Если же не принять во внимание  $M_t$ , то геометрическое место точек „центров кручения“ представляет прямую, параллельную оси бруса.

(§ 41 „Сопrotivления материалов“, С. П. Тимошенко).

### Определение удельного давления на погонный метр

Желая исключить влияние длины бруса на наши выводы, введем в рассмотрение интенсивность давления на пог. м, которую обозначим через  $q$ . В таком случае достаточно взять отношение результирующего максимального давления к элементу длины.

$$q = \frac{R_0}{dl} = \frac{3}{2} \frac{M^2}{EJ_z h} \dots \dots \dots (59)$$

Последнее выражение получено из (12) путем деления его на элементарную длину.

Сделанный здесь вывод дан для бруса, находящегося в условиях чистого изгиба, но его легко распространить и на случай поперечного изгиба. При поперечном изгибе момент изменяется по длине бруса и потому мы его будем обозначать  $M_x$ . В этом случае интенсивность давления на погонный метр также становится переменным и мы его тоже будем снабжать индексом  $x$ :

$$q_x = \frac{3}{2} \frac{M_x^2}{EJ_z h} \dots \dots \dots (60)$$

Это соотношение дает возможность определить интенсивность давления в любом сечении, отстоящем на расстоянии  $x$  от начала координат (обычно предполагается, что начало совпадает с одной из опор балки, если она покоится на опорах).

При переменном сечении момент инерции и высота сечения также становятся переменными по длине балки и для этого случая необходимо их снабдить также индексными индексами:



$$q_x = \frac{3}{2} \frac{M_x^2}{E J_z^2 h_x} \quad (61)$$

Конечно, давление на погонный метр— $q_x$  можно выразить, также через напряжение, с этой целью заменим изгибающий момент по уравнению прочности, выражением:

$$M = \frac{2 J_z \sigma_{max}^2}{h}$$

После подстановки в выражение (59) получим:

$$q = \frac{3}{2} \frac{4 J_z^2 \sigma_{max}^2}{h^2 E J_z^2 h} = \frac{6 J_z \sigma_{max}^2}{h^3 E}$$

В последнее соотношение подставляя значение  $J_z = \frac{bh^3}{12}$  по сокращении на  $h^3$ , найдем:

$$q = b \left( \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \right) \quad (60)$$

*Т. е. интенсивность давления на единицу длины прямо пропорциональна ширине балки и удельно-объемной потенциальной энергии.*

Это опять совершенно новая зависимость. Выходит, что удельно-погонное давление изменяется при увеличении или уменьшении напряжения— $\sigma_{max}$  и для каждого материала, при равных размерах (поперечных и пролетных) и равных внешних силах, давления  $q$  не равны. Аналогичное явление уже было выяснено выше, когда выводили величину напряжения 2-го порядка. Само собою ясно, что чем больше изогнется брус при одних и тех же внешних силах (а это будет для бруса из материала с наименьшим модулем упругости), тем большее возникает напряжение 2-го порядка, тем большее результирующее давление  $R_0$ , а, следовательно, большая интенсивность давления— $q$ .

Проверка размерности обеих частей выражения (60) показывает правильность структуры его. В самом деле,  $q$ , как удельное давление на единицу длины, выражается в  $кг/см$ . Следовательно, правая часть соотношения (60) должна иметь то же наименование единиц. Производя подстановку наименований, получим:

$$q \frac{кг}{см} = \frac{b (см) \sigma_{max}^2 \left( \frac{кг}{см} \right)^2}{2E \frac{кг}{см^2}} = \frac{b \sigma_{max}^2}{2E} \frac{кг}{см}$$

Желая составить представление о величине  $q$  по отношению к нормальным напряжениям, определим значение удельного давления для различных величин нормальных напряжений  $\sigma_{max}$ . Допустим имеем стальной брус и ищем значение  $q$  при  $\sigma_{max} = 1000 \text{ кг/см}^2$  и  $E = 2.10^6 \text{ кг/см}^2$ .

$$q = \frac{b}{2} \frac{1000^2}{2.10^6} = \frac{b}{4} \text{ кг/см} = \frac{b}{4} \cdot 100 \text{ кг/м} = 25 b \text{ кг/м.}$$

Отсюда приходим к заключению, что если материал балки достиг наибольшего нормального напряжения  $\sigma_{max} = 1000 \text{ кг/см}^2$ , то каждый пог. м балки, шириною в 1 см (при  $b = 1 \text{ см}$ ) испытывает радиальное давление, направленное к нейтральному слою и равное  $25 \text{ кг/м}$ , т. е.  $0,25 \text{ кг/см}$ , или

$$0,025\% \sigma_{max}.$$



Отсюда следует, что этой величиной в обычных условиях, которые встречаются в практике расчета сооружений, конструкций и машин, по сравнению с  $\sigma_{max}$  следует пренебречь, как величиной высшего порядка малости.

Из выражения (60) видно, что удельное давление на единицу длины растет прямо пропорционально квадрату напряжения  $\sigma_{max}$  поэтому возникает вопрос не получит ли заметного увеличения  $q$  при возможном росте  $\sigma_{max}$ ?

Для выяснения этого вопроса составим таблицу, которая дает абсолютную величину и процентную величину  $q$  по отношению к  $\sigma_{max}$ .

Данные таблицы сведены в графике (17). По оси абсцисс отложены абсолютные величины  $\sigma_{max}$ . По левой стороне отложены ординаты значения  $q$ , а по правой величина  $q$ , выраженная в процентах  $\sigma_{max}$ . Как это

видно из выражения (60) и черт. (17), величина  $q$  изменяется по параболическому закону кривую ОАВ; что же касается величины, выраженной в процентах  $\sigma_{max}$ , то она изменяется по закону прямой, так как при вычислении приходится относить к сотой доли  $\sigma_{max}$  и потому эта величина изменяется пропорционально первой степени и на графике представлена прямой ОС. Из рассмотрения таблицы и графика видно, что при росте  $\sigma_{max}$  от  $1000 \text{ кг/см}^2$  до  $10000 \text{ кг/см}^2$   $q$  изменяется от  $0,25 \text{ кг/см}$  до  $25 \text{ кг/см}$ , а процентное отношение растет от  $0,025\% \sigma_{max}$  до  $0,25\% \sigma_{max}$ .

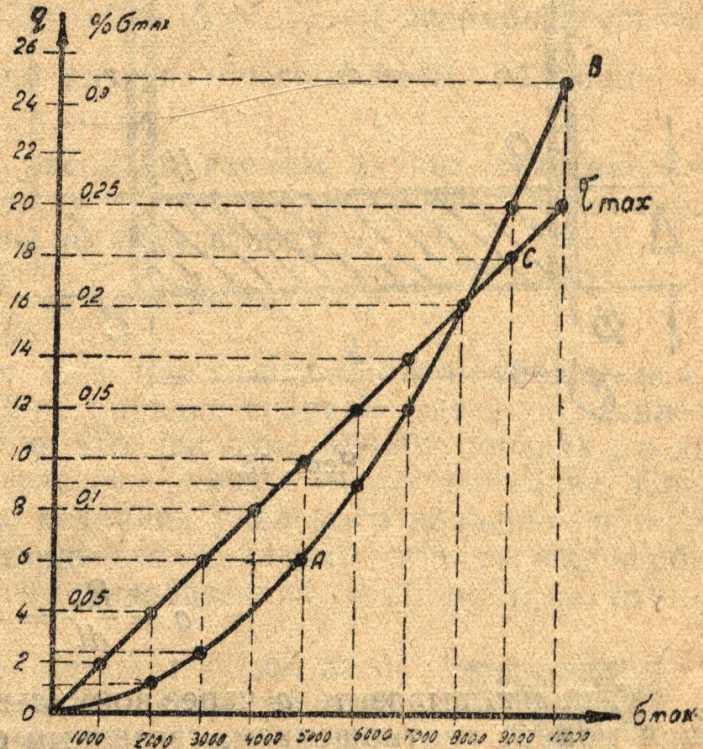
Отсюда ясно, что величиной  $q$  при каких угодно напряжениях, допустимых в технике, следует пренебречь, как величиной высшего порядка малости.

Однако, отсюда нельзя сделать вывода, что напряжениями 2-го порядка всегда можно пренебрегать, так как можно указать случаи, когда с этими величинами необходимо считаться и пренебрежение к этим напряжениям не только создают неправильную концепцию самого явления, но и приводят к совершенно неправильным числовым расчетам, что обесценивает всю проделанную работу по вычислениям.

Эти случаи возникают в технике тогда, когда напряжения 2-го порядка накапливаются на значительном объеме материала, а передаются к нейтральному слою тонкостенными элементами. В этом случае напряжения 2-го порядка, накопленные на значительном объеме материала, могут создать настолько значительное результирующее давление, что оно может оказаться опасным для тонкостенного элемента в отношении устойчивости при продольном изгибе.

В рассматриваемом случае результирующее давление достигает одного

$\sigma_{max}$	%	$q$
1000	0,025	0,25
2000	0,05	1,0
3000	0,075	2,25
4000	0,100	4
5000	0,125	6,25
6000	0,15	9
7000	0,175	12,25
8000	0,2	16
9000	0,225	20,25
10000	0,25	25

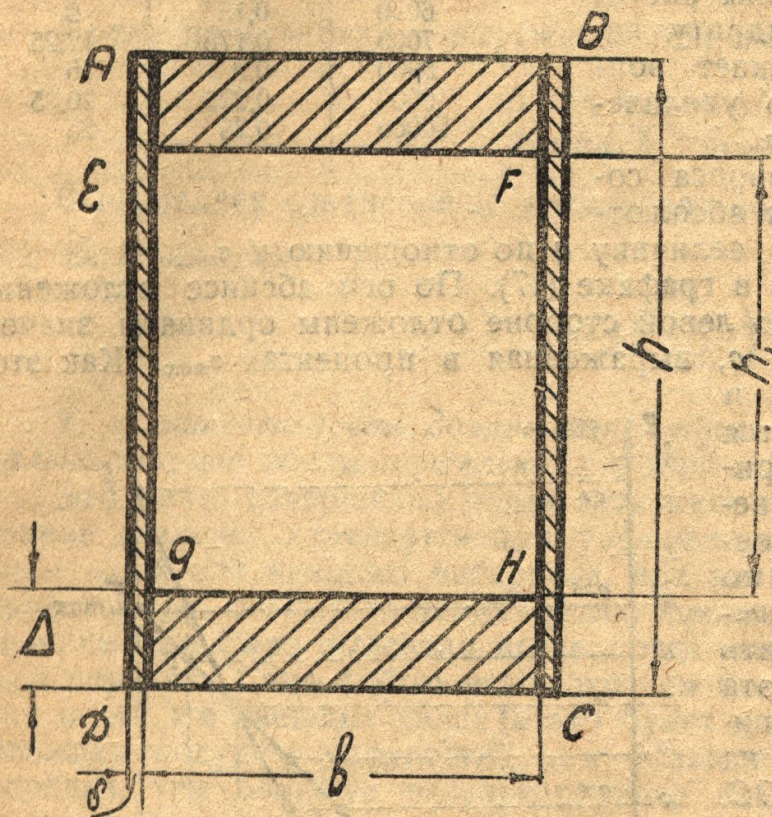


Черт. 17



порядка с критической силой тонкостенных элементов и играет заметную роль в вопросе устойчивости тонкостенных вертикальных стенок.

В качестве примера приведем лонжерон коробчатого поперечного сечения, показанный на чертеже (18) в поперечном разрезе. В этом случае, напряжения 2-го порядка, возникающие на горизонтальных полках  $ABFE$  и  $DGHC$ , создают результирующие давления, направленные к нейтральному слою; эти давления воспринимаются тонкостенными вертикальными элементами  $EG$  и  $FH$ , для которых результирующие давления, возникающие на горизонтальных полках  $ABFE$  и  $DGHC$ , представляют величины одного порядка с критической силой, а, следовательно, здесь нельзя оставить их без внимания, т. к. создается угроза потери устойчивости тонких вертикальных стенок, что может вызвать разрушение всего лонжерона.



Черт. 18.

Допустим, что мы имеем сечение со следующими размерами:  $h = 36$  см,  $h_1 = 28$  см,  $b = 25$  см,  $\delta = 0,2$  см и  $\Delta = 4$  см.

Величина удельного погонного давления определится по выражению (10) путем деления  $R_y$  на  $dl$ :

Величина удельного погонного давления определится по выражению (10) путем деления  $R_y$  на  $dl$ :

$$q = \frac{R_y}{dl} = \frac{M^2 S_y}{EI_z^2} \dots \dots \dots (61)$$

С целью выразить  $q$  через нормальные напряжения, заменим изгибающий момент соотношением, связанным с  $\sigma_{max}$ :

$$M = \frac{2I_z \sigma_{max}}{h}$$

Подстановка этого выражения  $M$  в (61) дает:

$$q = \frac{4\sigma_{max}^2 I_z^2 S_y}{h^2 E I_z^2} = \frac{4\sigma_{max}^2 S_y}{h^2 E} \dots \dots \dots (62)$$

Определим значения статического момента  $S_y$  по размерам поперечного сечения

$$S_y = \Delta \cdot b \frac{h + h_1}{4} = 4 \cdot 25 \frac{36 + 28}{4} = 25 \cdot 64 \text{ см}^3 \dots \dots \dots (63)$$

Принимая  $\sigma_{max} = 100$  кг/см<sup>2</sup> и  $E = 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, найдем числовое значение для удельного давления на единицу длины:

$$q = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 64}{36 \cdot 36 \cdot 10^6} = \frac{40}{81} \text{ кг/см.}$$



Выделим один погонный сантиметр длины вертикальной стенки и определим для него критическую силу:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}$$

Вертикальная стенка крепится на гвоздях и клее и, если она хорошо выполнена, то можно приближенно считать  $\mu = (0,5-0,7)$ , так как клей настолько прочно схватывает, что стенка ломается по целому месту, и  $\mu$  приближается к тому значению, которое соответствует жесткой заделке, т. е.  $\mu = 0,5$ .

Полагая, что лонжерон представляет из себя балку, свободно лежащую на двух опорах и что вертикальная стенка вместе с нижней горизонтальной полкой закреплена, а верхняя горизонтальная полка, свободна; в таком случае для  $\mu$  получаем значение 0,7, которое в квадрате можно положить 0,5. Подставляя числовые данные в выражение критической силы, найдем:

$$P_{кр} = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 0,2^3}{0,5 \cdot 28^2 \cdot 12} \text{ кг}$$

При подстановке принято:  $\pi^2 = 10$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $J_z = \frac{1,0 \cdot 2^3}{12}$ . После соответствующих преобразований и сокращений для критической силы, получим:

$$P_{кр} = 1,70 \text{ кг}$$

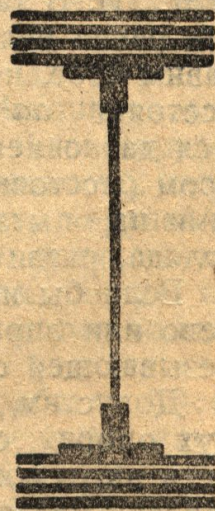
Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае давление на единицу длины распределяется между двумя вертикальными стенками, найдем погонное удельное давление на одну стенку:

$$q_1 = \frac{q}{2} = \frac{40}{81 \cdot 2} = 0,247 \text{ кг/см.}$$

Эта величина составляет около 15%  $P_{кр}$ . Таким образом убеждаемся, что в данном случае, напряжения 2-го порядка создали удельное давление, которое достигает 15%  $P_{кр}$ . т. е. это давление одного порядка с ней и, следовательно, необходимо при расчете принять ее во внимание. При росте нормальных напряжений  $\sigma_{max}$ , величина удельного давления растет по параболической зависимости, которая для металлического стержня изображена на чертеже (17) кривую  $q$ , а, следовательно, и процентное отношение продолжает расти.

Изложенное обстоятельство приобретает особо важное значение в процессе всего явления, если принять во внимание, что поперечно срезающая сила в рассматриваемой конструкции также вызывает явление продольного изгиба и потому, в действительности, тонкая вертикальная стенка находится под одновременным комплексом систем сил (поперечно срезающая и погонно-удельное давление от напряжений 2-го порядка), вызывающих одну и ту же деформацию продольного изгиба. Очевидно, что такое накопление напряжений 2-го порядка и, вследствие этого, перерастание погонно-удельного давления з 2-го порядка в 1-й, возникает во всех тех случаях, когда накопление напряжений происходит на широких и толстых горизонтальных полках, а передача—тонкими вертикальными стенками.

Из этого следует, что аналогичные явления возникают в двутавровых клепаных балках, в коробкообразных и других конструкциях. На чертежах (19) и (20) представлены упомянутые сечения клепаных балок. Однако, здесь следует отметить, что чем тонкостенные элементы тоньше по отношению к толстым горизонтальным



Черт. 19.



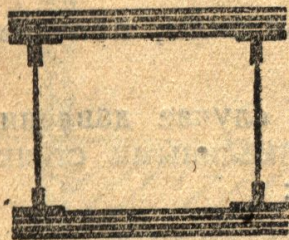
полкам, тем эффект действия напряжений 2-го порядка более разительный; при более-менее толстых вертикальных стенках удельное давление резко падает и в таком случае с ним можно не считаться.

### Экспериментальная проверка

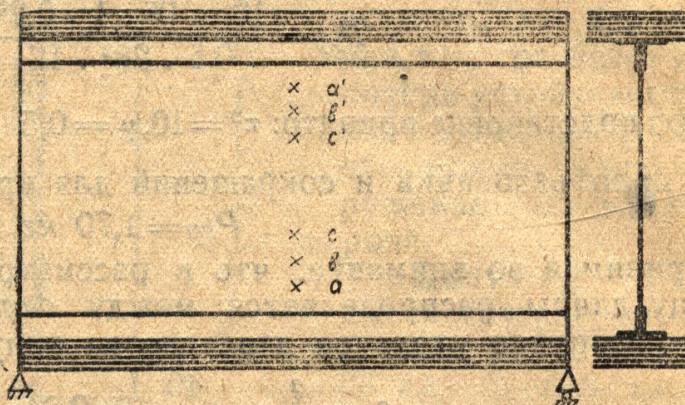
Заканчивая теоретическое изложение настоящей темы, ставим вопрос: а имеется ли возможность экспериментально проверить и на опыте убедиться в правильности этой теории?

Несмотря на разительную малость напряжений 2-го порядка, на поставленный вопрос, думается, следует ответить положительно.

Главное затруднение заключается в том, чтобы освободить наблюдения от напряжений 1-го порядка, которые, значительно превышая по величине наблюдаемые напряжения, могут совершенно исказить картину явления.



Черт. 20



Черт. 21

Допустим, что мы имеем специально сконструированную для этих целей двутавровую балку, у которой толщина горизонтальных листов по сравнению с толщиной вертикальных стенок, велика; кроме того, высота вертикальной стенки настолько велика, что возникает опасность при действии внешних сил потери ее устойчивости.

В качестве нагрузки балки примем равномерно распределенную (черт. 21). В таком случае поперечно срезающая сила посередине пролета равна нулю и, следовательно, здесь ее влияние уничтожается. Представим себе, что мы при помощи экстензометров при нагрузке, измеряя расстояния  $aa^1$ ,  $bb^1$  и  $cc^1$ , определим некоторые усилия. Эти усилия и являются давлением, только измеренным не на нейтральном слое, а на некотором расстоянии  $u$  от него. Сравнение расчетных величин с полученными из опыта, даст возможность проверить правильность теоретического взгляда, развитого в настоящей работе.

Если бы измерения производились не посередине пролета, а несколько влево или вправо, то тогда пришлось бы учесть действие и поперечно срезающей силы.

Допустим, что имеем двутавровую балку А. В., свободно лежащую на двух опорах, с равномерно распределенной нагрузкой. Пусть интенсивность нагрузки на единицу длины —  $q_0$ . На чертеже (14) схематически представлена балка. Поперечно срезающая сила определится из выражения:

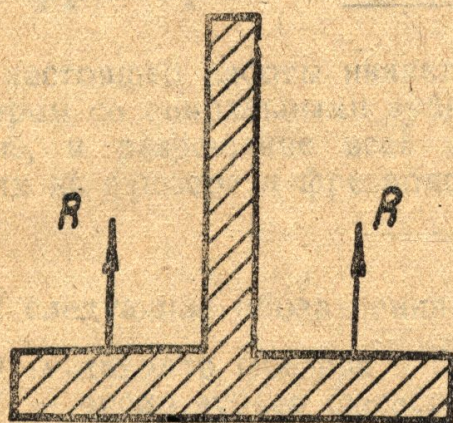
$$Q_x = \frac{q_0 l}{2} - q_0 x \dots \dots \dots (64)$$

Эта сила при данном значении  $x = a$ , получает определенное числовое значение, которое в рассматриваемом сечении выдерживает вертикальная полка двутавровой балки. Этот же элемент балки испытывает дав-

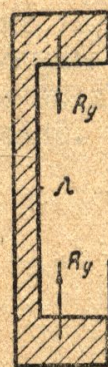


ление вследствие действия напряжений 2-го порядка. Т. е. вертикальная стенка должна испытывать одновременное комплексное действие этих систем сил и так как они могут быть одного порядка, то результаты наблюдений является возможным сравнить с теоретическими величинами. Если балку нагрузить сплошной симметричной нагрузкой, изменяющейся по любому закону, то посредине пролета во всех этих случаях нагрузки поперечно-срезающая сила проходит через нулевое значение и, следовательно, в этом сечении наблюдения освобождаются от поперечно-срезающих сил и т. о. экспериментируется только результирующее давление от напряжений 2-го порядка.

Очень интересно поставить экспериментальную проверку существования  $M_t$ , который впервые выведен в настоящей работе, а равно и его закон изменения по длине балки. Для доказательства его существования—



Черт. 22



Черт. 22

возможна постановка следующих опытов: изготовить балку углового сечения из податливого материала, напр., из резины и при ее загрузке произвести необходимые измерения прогибов в разных точках горизонтальной полки, чтобы установить деформацию кручения.

Следует также изготовить консоль углового сечения и загрузить на конце в „центре кручения“; тогда по длине консоли, путем измерения, возможно обнаружить деформацию кручения.

Резиновая балка, работающая на поперечный изгиб, одноставрового сечения должна испытать одновременно деформацию изгиба горизонтальной полки под действием результирующих напряжений 2-го порядка (чертеж 22). Резиновая балка швеллерного сечения, работая на изгиб, одновременно испытывает действие двух равных пар, изгибающих вертикальную полку с моментом  $M = R_y l$ ; при этом вертикальная стенка находится в сложном напряженном состоянии, испытывая вертикальную нагрузку от поперечно-срезающей силы и  $M$ , приложенным по концам вертикальной стенки (чертежи 22 и 23).

Конечно, опытная проверка, как и во всякой научной работе, имеет громадное значение, создавая надежную базу для изложенного здесь взгляда на концепцию явления, а, следовательно, и для всех зависимостей, выведенных в настоящей работе и даст возможность воспользоваться ими для практических нужд техники.

Уже на основании изложенного видно, что опытная проверка представляет большие трудности, которые ни в какой мере не свойственны самим тонким экспериментальным исследованиям, посвященным явлениям 1-го порядка. Нужно иметь в виду, что напряжения 2-го порядка являются только „невольными спутниками“ направлений 1-го порядка, кото-



рые, вызывая их к жизни, затеяют своей непомерной величиной, затрудняя возможность уловить признаки их существования. Для экспериментального исследования необходимы разнообразные опытные установки, изготовленные из различных материалов. Из них наиболее пригодными являются те, которые обладают в пределах упругости наибольшими деформациями (резина, гутаперча). Применение их предоставит возможность значительно увеличить наблюдаемые деформации в целях повышения точности испытаний. Требуется разработать не только новые уточненные приемы испытаний, но и новую методику экспериментирования. Преодоление всех этих трудностей, затрата средств, времени и энергии, будем надеяться, окупятся результатами работ, т. к. они откроют не только новые области знаний, но и дадут возможность использовать их для практических потребностей техники.

