Студ. ПИРОТТИ, Л. Н.

Уравнение волокна винтовой цилиндрической пружины или уравнение винтовой линии, навитой на винтовую цилиндрическую поверхность

Волокна металлической проволоки имеют продольное расположение. Возьмем отрезок проволоки с цилиндрической поверхностью радиуса $\rho = \frac{d}{2}$ (рис. 1). Рассечем ее вертикальной плоскостью *bbdd* и горизонтальной—*aacc* так, чтобы эти плоскости проходили через ось 00. Возьмем поперечные сечения перпендикулярными к осевой линии. Назовем их „нормальными сечениями".

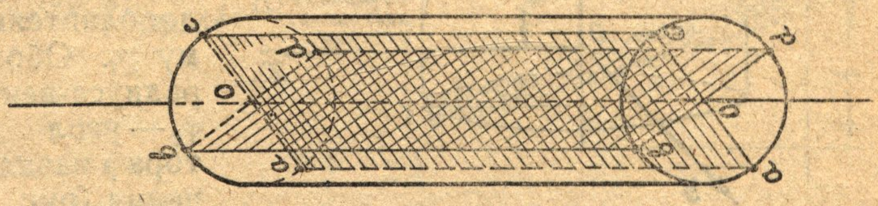

Рис. 1

Возьмем цилиндрическую поверхность Q радиуса R_0 (рис. 2) и навьем на нее проволоку, сохраняя постоянным шаг навивки ее осевой линии *00*. Тогда проволока представится правильной винтовой цилиндрической пружиной, ось которой (проволоки) *00* в трехосной прямоугольной системе координат есть винтовая линия радиуса R, с шагом t и углом подъема β (рис. 4). Назовем поверхность тела этой винтовой цилиндрической пружины винтовой цилиндрической поверхностью. Будем считать, что нормальные сечения *abcd* (рис. 1) сохранили в пружине форму окружности и нормальны к винтовой осевой линии.

При навивании проволоки, в силу целого ряда причин, хотя бы по нашему заданию, можно горизонтальные линии *ac* нормальных сечений проволоки (рис. 1) сохранить горизонтальными и в пружине, но можно навивать и с некоторым закручиванием одного нормального сечения по отношению к другому. Примем это закручивание пропорциональным длине осевой линии. В таком случае, любое волокно, кроме центрального *00*, не будет уже правильной винтовой линией в указанной на рис. 2 координатной системе xyz, подобно осевой линии *00*. Теперь каждое волокно, например поверхностное, оказывается навитым ввиде винтовой линии на винтовую цилиндрическую поверхность радиуса ρ, где ρ может принимать значения в пределах от 0 до $\frac{d}{2}$, причем $\rho = \frac{d}{2}$ соответствует поверхностным волокнам.

Нашей задачей и является представление любого волокна тела пружины уравнением в прямоугольной трехосной системе координат, т. е., иначе говоря, необходимо вывести уравнение винтовой линии, полученной при навивании линии на винтовую цилиндрическую поверхность радиуса ρ. К этой задаче мы и приступим.

Выделим на винтовой цилиндрической поверхности радиуса ρ (рис. 2) одно волокно. Это волокно на рисунке обозначено линией. Один виток винтовой осевой линии пружины назовем большим витком, а один виток волокна на винтовой цилиндрической поверхности — малым витком. Заметим, что плоскость P нормального сечения, нормального, как указывалось выше, к винтовой осевой линии, составляет с осью Z угол, равный углу β под'ема винтовой осевой линии.

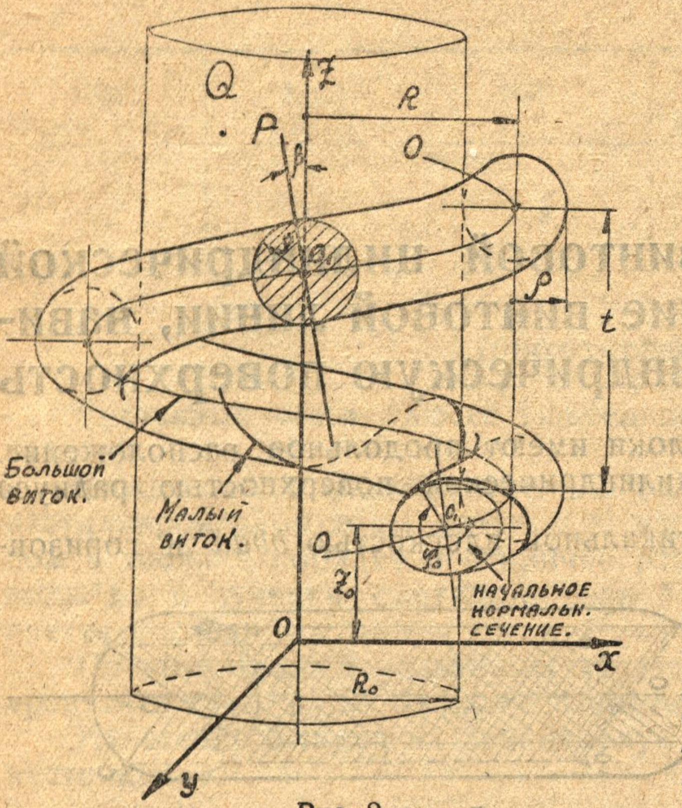

Рис. 2

Обратимся теперь к рис. 3. Представим нормальное сечение плоскостью L (рис. 3a) в двух видах (рис. 3b и 3c). Точка C нормального сечения (рис. 3a) принадлежит волокну. Эта точка C на рис. 3b обозначена через C', а на рис. 3c — через C''. Радиус-вектор точки C' и будет ρ. Возьмем (рис. 3b) дополнительную двухосную систему $\xi\eta$. Обозначим угол поворота радиуса-вектора ρ через $\varphi_0 + \varphi$, где φ_0 — угол поворота радиуса-вектора ρ начального нормального сечения (рис. 2). Выше указывалось, что относительное закручивание нормальных сечений принято пропорциональным длине осевой линии проволоки; иначе говоря, два любых нормальных сечения, находящихся на расстоянии единицы длины осевой линии, закручиваются на один и тот же относительный угол. Но ведь

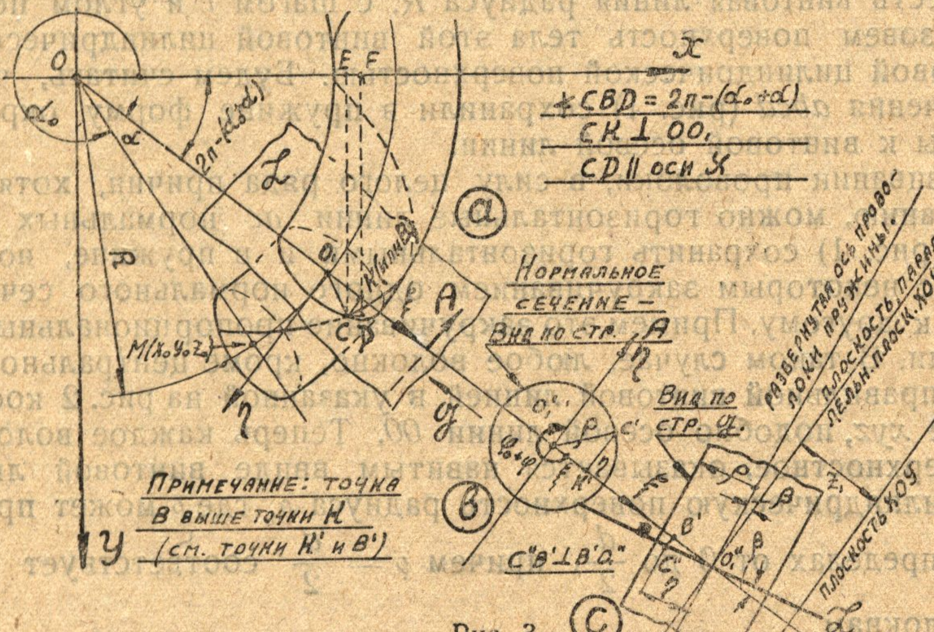

Рис. 3

вместе с пропорциональным поворотом последующего нормального сечения перемещается с окружностью нормального сечения и точка C, принадлежащая волокну и являющаяся текущей точкой волокна. Следовательно, поворот радиуса-вектора ρ точки C' (рис. 3b) также пропорционален длине осевой линии.

Радиус-вектор R точки O_1 (рис. 3a) винтовой осевой линии повернут на угол $\alpha_0 + \alpha$, где α_0 — угол поворота радиуса-вектора R начального нормального сечения. Из уравнения винтовой линии известно, что приращение угла α пропорционально длине винтовой линии.

Итак приращение угла φ поворота радиуса-вектора ρ пропорционально длине винтовой осевой линии, или пропорционально приращению угла α поворота радиуса-вектора R. Математически это представится так:

$$\varphi = k\alpha,$$

где k — коэфициент пропорциональности. На основании этой пропорциональности можно написать:
приращение φ соответствует приращению α,
приращение φ_1 соответствует приращению 2π.

Отсюда

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{2\pi}\alpha$$

Если n — число малых витков, приходящееся на один большой виток $\left(\text{длина большого витка (рис. 4) } \frac{2\pi R}{\cos\beta}\right)$, то

$$\varphi_1 = 2\pi n$$

Окончательно

$$\varphi = \frac{2\pi n}{2\pi}\alpha = n\alpha; \quad \boxed{\varphi = n\alpha}$$

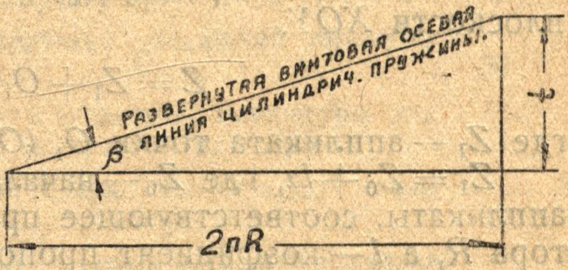

Рис. 4

Из рис. 3b координаты точки C' будут:

$$\xi = \rho\cos[2\pi - (\varphi_0 + \varphi)] = \rho\cos(\varphi_0 + \varphi); \quad \boxed{\xi = \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)}$$

$$\eta = \rho\sin[2\pi - (\varphi_0 + \varphi)] = -\rho\sin(\varphi_0 + \varphi); \quad \boxed{\eta = -\rho\sin(\varphi_0 + n\alpha)}$$

Из рисунков 3a, 3b, 3c определим координаты точки C.

1. Абсцисса X

$X = OE = OF - EF$

$$OF = (OO_1 + O_1k)\cos(\alpha_0 + \alpha)$$

$$O_1k = O_1'k^1 = \xi$$

$$OF = (R + \xi)\cos(\alpha_0 + \alpha)$$

$$OF = [R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\cos(\alpha_0 + \alpha)$$

$EF = CD = -BC\sin(\alpha_0 + \alpha)$, где BC — проекция ординаты η на плоскость, проходящую через центр O_1, и параллельную плоскости XOY. Таким образом,

$$BC = B'C'' = C''O_1''\sin\beta = \eta\sin\beta = -\rho\sin(\varphi_0 + n\alpha)\sin\beta$$

$$EF = \rho\sin\beta\cdot\sin(\varphi_0 + n\alpha)\cdot(\sin(\alpha_0 + \alpha)$$

$$\boxed{X = [R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\cos(\alpha_0 + \alpha) - \rho\sin\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)\sin(\alpha_0 + \alpha)}$$

2. Ордината Y

$$Y = CE = FB + BD$$

$$FB = -(OO_1 + O_1k)\sin(\alpha_0 + \alpha)$$

$$OO_1 + O_1k = [R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]$$

$$FB = -[R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\sin(\alpha_0 + \alpha)$$

$$BD = BC \cdot \cos(\alpha_0 + n\alpha)$$

$$BC = -\rho\sin(\varphi_0 + n\alpha)\sin\beta$$

$$БD = -\rho\sin(\varphi_0 + n\alpha)\sin\beta\cos(\alpha_0 + \alpha)$$

$$\boxed{Y = -[R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\sin(\alpha_0 + \alpha) - \rho\sin\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)\cdot\cos(\alpha_0 + \alpha)}$$

3. Аппликата Z

Аппликата Z представляет собою на рис. 3с расстояние точки B' от плоскости XOY.

$$Z = Z_1 + O_1''C''\cos\beta = Z_1 + \eta\cos\beta$$

где Z_1 — аппликата точки O_1 (O_1''), принадлежащей осевой линии (рис. 3с).

$Z_1 = Z_0 + l\alpha$, где Z_0 — начальная аппликата (рис. 2) и $l\alpha$ — приращение аппликаты, соответствующее приращению угла α поворота радиуса-вектора R, а l — коэфициент пропорциональности, зависящий от шага t (согласно уравнения винтовой линии вообще). Для определения коэфициента l положим $Z_0 = 0$. Тогда $Z_1 = l\alpha$ и $l = \frac{Z_1}{\alpha}$. Если радиус-вектор R опишет угол 2π, то приращение Z_1 будет равно шагу t. Следовательно, $l = \frac{t}{2\pi}$. Но $t = 2\pi R\,\mathrm{tg}\,\beta$ (рис. 4).

Тогда

$$l = \frac{2\pi R\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\pi} = R\,\mathrm{tg}\,\beta; \qquad l = R\,\mathrm{tg}\,\beta$$

Окончательно

$$Z_1 = Z_0 + R\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\alpha$$

и

$$\boxed{Z = Z_0 + R\cdot\mathrm{tg}\,\beta\cdot\alpha - \rho\cos\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)}$$

Итак, искомое уравнение может быть представлено в виде системы трех уравнений в функции от α:

$$x = f_1(\alpha)$$

$$y = f_2(\alpha)$$

$$z = f_3(\alpha),$$

а именно:

$$x = [R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\cos(\alpha_0 + \alpha) - \rho\sin\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)\sin(\alpha_0 + \alpha)$$

$$y = -[R + \rho\cos(\varphi_0 + n\alpha)]\cdot\sin(\alpha_0 + \alpha) - \rho\sin\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)\cos(\alpha_0 + \alpha)$$

$$z = Z_0 + R\cdot\mathrm{tg}\,\beta\cdot\alpha - \rho\cos\beta\sin(\varphi_0 + n\alpha)$$