

Проф. КСАНДРОВ Д. Н.

Напряжения 2-го порядка при кручении

Стержень круглого сечения

Элементарная теория кручения круглого стержня предполагает, что сечения остаются круглыми с постоянными диаметрами, что расстояния при небольших деформациях, в пределах упругости материала, сохраняют свою величину, т. е. что волокна не испытывают ни удлинений, ни сжатий, и потому все напряжения сводятся только к тангенциальным от кручения.

В действительности предположение о неизменности расстояний между сечениями приводит к необходимости заключения, что продольные внешние волокна, навиваясь при закручивании на цилиндрический стержень и вследствие этого подвергаясь растяжению (наружные волокна) или сжатию (внутренние волокна), испытывают нормальные напряжения.

Эти напряжения, являясь величинами разительно малыми по сравнению с $\tau_{кр}$, называются напряжениями 2-го порядка при кручении, или „вторичными напряжениями“.

Изучение этих напряжений, открывая „мир разительно малых напряжений“, „микронапряжений“, уточняет грубые, примитивные представления о процессе кручения, которые дает теория сопротивления материалов и создает новую, более точную, концепцию явления кручения. Оно не только уясняет явление, делая его более многогранным и понятным, но и дает возможность сделать ценные для практики выводы, точно определяя все те случаи, когда, по каким-либо причинам, напряжения 2-го порядка начинают играть заметную роль во всем процессе кручения и когда, вследствие этого, ими игнорировать нельзя.

Для определения математических зависимостей этих напряжений выясним величину абсолютного удлинения волокна, совпадающую с образующей ab ; по этому удлинению найдем относительное удлинение, отнеся его к первоначальной длине волокна; по относительному удлинению, умножив на модуль упругости E , найдем нормальное напряжение, которое и является напряжением 2-го порядка при кручении, или „вторичным напряжением“.

Выделим из скручиваемого круглого стержня элемент длиной dx .

Из *фиг. 1* видно, что волокно ab , которое до закручивания совпадало с образующей, заняло положение ab' , когда нижнее сечение повернулось относительно верхнего на элементарный угол $d\varphi$ под действием крутящего момента M . При этом волокно ab удлинилось, т. к. расстояние dx между нижним и верхним основаниями, согласно предположению, делаемому в сопротивлении материалов, не изменилось.

Чтобы определить абсолютное удлинение волокна ab , достаточно найти новую длину его ab' и определить разность $ab' - ab$. Величина ab' определится из прямоугольного $\Delta abb'$, как гипотенуза:

$$ab' = \frac{ab}{\cos \gamma} \quad (1)$$

Разложив в ряд $\cos \gamma$, получим:

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2!} \gamma^2 + \frac{1}{4!} \gamma^4 - \frac{1}{6!} \gamma^6 + \dots \quad (2)$$

Если ограничиться только двумя первыми членами, то получим выражение:

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2} \gamma^2; \quad \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \gamma^2} \quad (3)$$

Полученное соотношение легко преобразовать, произведя деление единицы на знаменатель, и опять ограничившись только двумя первыми членами частного:

$$\frac{1}{\cos \gamma} = 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \quad (4)$$

На основании этого удлиненное волокно определится зависимостью:

$$ab' = ab \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \quad (5)$$

Воспользовавшись соотношением, выводимым в сопротивлении материалов: $\gamma = -\frac{1}{2} d \theta$, преобразуем зависимость (5):

$$ab' = ab \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{2} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Абсолютное удлинение получится, как разность между удлиненной величиной волокна и первоначальной:

$$\Delta \bar{ab} = \bar{ab}' - \bar{ab} = \bar{ab} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta d}{2} \right)^2 \right] - ab = \bar{ab} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\theta d}{2} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Для получения относительного удлинения волокон, расположенных на внешней поверхности стержня, достаточно абсолютное удлинение отнести к первоначальной его длине:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta \bar{ab}}{\bar{ab}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta d}{2} \right)^2 = \frac{\theta^2 d^2}{8} \quad (8)$$

Легко сообразить, что наибольшее относительное удлинение получают волокна, расположенные на внешней поверхности, т. к. γ по мере уменьшения радиуса уменьшается и достигает наименьшего значения на оси, где γ равно нулю. Это следует из соотношения:

$$\gamma_r = r \cdot \theta \quad (9)$$

На основании этого относительное удлинение любого волокна, образующего цилиндрическую поверхность и находящегося на переменном радиусе r от оси, представится зависимостью:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \gamma_r^2 \quad (10)$$

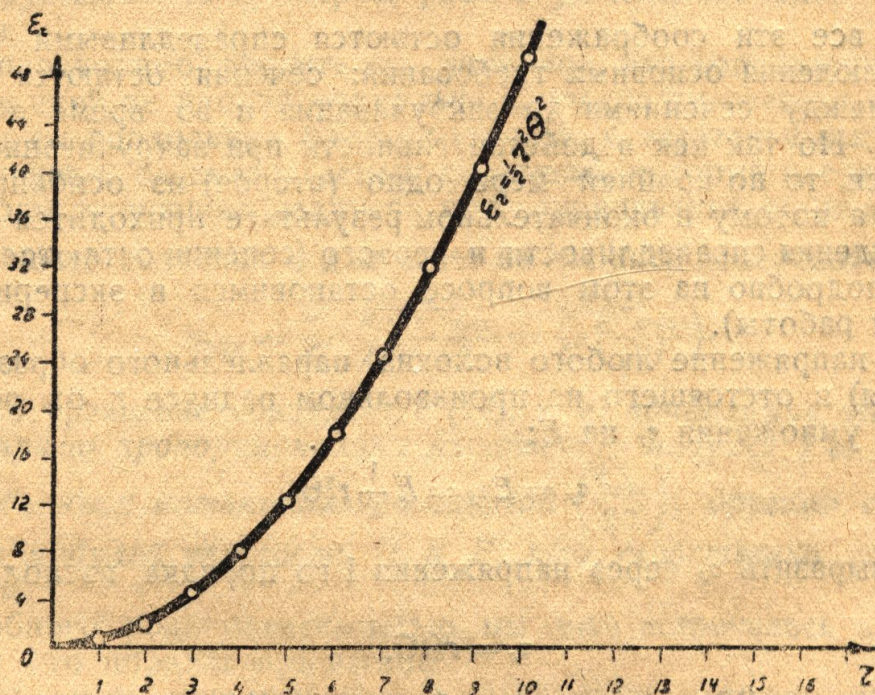
т. е. относительное удлинение волокна, параллельного образующей (до закручивания) и отстоящего на произвольном радиусе r от оси, равно половине квадрата относительного угла сдвига того же волокна.

Уже из соотношения (10) видно, что относительное удлинение является величиной второго порядка малости, т. к. γ_r величина 1-го порядка малости.

Принимая во внимание соотношение (9), получим для соотношения (10) следующую зависимость:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} (r \theta)^2. \quad (10')$$

Наибольшего значения ε_r достигает при $r = \frac{d}{2}$.



Фиг. 2

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} d^2 \theta^2, \quad (10)$$

которое мы уже получили из (8).

Из уравнения (10') видно, что относительное удлинение меняется в зависимости от значения r по закону параболы. Графическое изображение этой параболы представлено на фиг. 2; здесь по оси абсцисс отложены различные значения r , а по оси ординат — различные величины относительного удлинения.

В связи с этим волокна, расположенные на поверхности стержня, удлиняются в наибольшей степени, а по мере уменьшения r до нуля уменьшается и удлинение волокон.

Теперь поставим вопрос, можно ли на основании сделанного вывода и полученных формул для относительного удлинения составить себе представление о деформации плоскости сечения, т. е. остается ли во время закручивания сечение плоским или оно деформируется в параболическую поверхность вращения? На поставленный вопрос ответить возможно исходя из условий вывода.

На первый взгляд кажется, что плоскость сечения, деформируясь, переходит в параболоид вращения, т. к. волокна, параллельные образующим, удлиняются по параболическому закону, но из способа вывода следует, что сечение остается плоским (т. к. это условие было принято,

как основное), а волокна тем больше удлиняются, чем образуют с большим основанием цилиндр (т. е. чем больше переменный радиус — r), потому, что с увеличением r увеличивается длина винтовой линии, навитой на цилиндре, и в тот момент, когда r обращается в нуль, в этот момент винтовая линия обращается в ось цилиндра, а ее длина сравнивается с высотой цилиндра.

Еще одно соображение: этот параболический закон получился при условии, что сечения остаются плоскими и расстояние между ними не меняется, а потому все удлинение расходуется на то, чтобы в закрученном состоянии конец произвольного волокна остался бы в той самой плоскости сечения, в которой он был до закручивания и, следовательно, параболический закон изменения удлинения ни в коем случае не говорит о том, что геометрическое место концов волокон образует параболоид, а не плоскость.

Однако, все эти соображения остаются справедливыми только при условии соблюдения основных требований: сечения остаются плоскими и расстояния между сечениями до закручивания и во время закручивания сохраняются. Но так как в действительности при закручивании стержень укорачивается, то по крайней мере одно (второе) из основных условий нарушается, а потому в окончательном результате приходится отказаться и от утверждения справедливости и первого (сечения остаются плоскими).

(Более подробно на этом вопросе остановимся в экспериментальной части нашей работы).

Отсюда напряжение любого волокна, параллельного образующей (до закручивания) и отстоящего на произвольном радиусе r от оси, определится путем умножения ϵ_r на E :

$$\sigma_r = E\epsilon_r = E \frac{1}{2} r^2 \theta^2. \quad (11)$$

Желая выразить σ_r через напряжения 1-го порядка воспользуемся зависимостью:

$$\tau_r = r\theta G. \quad (12)$$

На основании (12-го) легко преобразуется (11-ое):

$$\sigma_r = \frac{E\tau_r^2}{2G^2}. \quad (13)$$

Наибольшего значения σ_r достигает на внешней поверхности стержня, где τ_r приобретает максимальную величину τ_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{2G^2}. \quad (14)$$

Разделив (13-ое) на (14-ое), получим возможность выразить σ_r через σ_{\max} :

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\tau_r^2}{\tau_{\max}^2}; \quad \sigma_r = \sigma_{\max} \frac{\tau_r^2}{\tau_{\max}^2}. \quad (15)$$

Воспользовавшись выражением (12-ым) и $\tau_{\max} \frac{1}{2} \theta dG$, преобразуем (15-ое):

$$\sigma_r = \sigma_{\max} \left(\frac{2r}{d} \right)^2. \quad (16)$$

Подставляя из (14-го) в (16-ое) значение σ_{\max} , найдем зависимость для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E\tau_{\max}^2}{2G^2} \cdot \frac{4r^2}{d^2} = \frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2}. \quad (17)$$

Полученное выражение показывает, что напряжения 2-го порядка при кручении по сечению круглого бруса распределяются по закону пара-

болоида вращения (переменными являются только σ_r и r). Выражению (17) можно придать другую форму; для этого умножим на два числитель и знаменатель и перепишем его в следующем виде:

$$\sigma_r = \left(\frac{2r}{d}\right)^2 \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right). \quad (17)$$

Теперь можно полученную зависимость формулировать так:

Напряжение второго порядка волокна, отстоящего на произвольном расстоянии от оси r , прямо пропорционально квадрату отношения радиусов $\frac{r}{\frac{d}{2}}$ (рассматриваемого волокна r и наибольшего $\frac{d}{2}$), отношению

модулей упругости 1-го и второго рода и удельно-объемной потенциальной энергии.

Здесь необходимо принять во внимание, что направление „нормальных“ напряжений не вполне нормально к плоскости сечения, а совпадает с направлением продольных волокон (точнее, с касательными к ним в точках пересечения с рассматриваемым сечением), которые навиваются на цилиндры, соответствующих радиусов при закручивании стержня.

Наибольшего значения σ_r достигает на внешней поверхности при $r = \frac{d}{2}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{2^2}{d^2} \left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} = \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right). \quad (18)$$

(конечно, это уравнение совпадает с (14), т. е. *наибольшие вторичные напряжения прямо пропорциональны отношению модулей 1-го и 2-го рода и удельно-объемной потенциальной энергии $\left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right)$; другими словами, они зависят от модулей упругости G и E , что свойственно напряжениям 2-го порядка.*

С подобного рода зависимостью мы уже встречались при изучении напряжений 2-го порядка при изгибе.

Если мы имеем два одинаковых по размерам стержня, но сделанных из различных материалов, то при действии равных, скручивающих моментов, в них возникают равные $\tau_{кр}$, но разные нормальные напряжения. Нормальные напряжения тем больше, чем больше удлинения, а последние зависят от квадрата относительного угла закручивания, согласно (10-й) зависимости, относительный угол закручивания обратно пропорционален модулю при сдвиге, и потому нормальное напряжение зависит от G . Отсюда очевидно, что нормальные напряжения у стержней, изготовленных из разных материалов, различны.

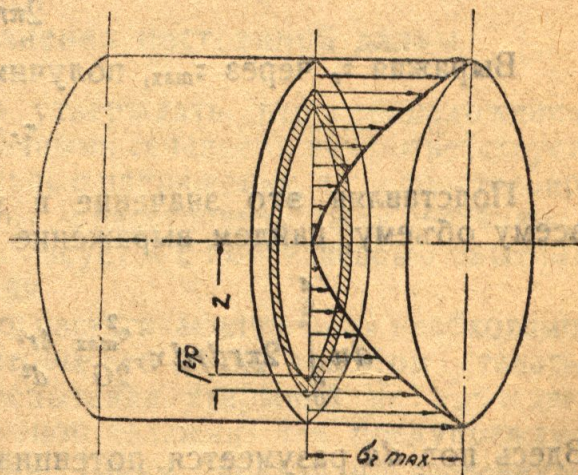
Эти напряжения тем больше, чем меньше G , как это видно из (18-го).

Наименьшего значения σ_r достигает в центре сечения при $r = 0$.

$$\sigma_{\min} = 0.$$

При $r = \frac{d}{4}$, $\sigma_r = \frac{\sigma_{\max}}{4}$ (это видно из 16-й зависимости).

На фиг. 3 представлен закон распределения нормальных напряжений по сечению бруса. На этой фигуре представлено растягивающее действие, которое испытывают волокна, навиваясь на цилиндр меньшего радиуса.



Фиг. 3

Таким образом представлено действие внутренних волокон на волокна, расположенные дальше от оси. Конечно, в свою очередь, наружные волокна, растягиваясь при навивании на внутренние, сжимают их и потому можно было бы представить изменение силы сжатия этих волокон подобным же образом, но уже направление стрелок изменилось бы на обратное.

Объем вторичных напряжений

Определим объем вторичных напряжений, который равен разности цилиндра и параболического сегмента (фиг. 3). Для этого выделим кольцевой элемент величиною:

$$dF = 2\pi r dr.$$

Умножая его на напряжение σ_r , получим элементарное усилие:

$$dF\sigma_r = 2\pi r dr \sigma_r = 2\pi r dr \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2};$$

при составлении последнего выражения использовано соотношение (17-ое).

Интегрируя по всей площади сечения F , найдем полный объем вторичных напряжений:

$$V = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r dr \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} = \frac{4\pi E \tau_{\max}^2 d^4}{d^2 G^2 \cdot 4 \cdot 16} = \frac{1}{2} F \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right),$$

т. е. объем пропорционален площади сечения, отношению модулей упругости 1-го и 2-го рода и удельно-объемной потенциальной энергии.

Желая сопоставить объем вторичных напряжений „ V “ и потенциальную энергию „ U “, определим потенциальную энергию. Элементарный объем стержня длиной dx получим из выражения:

$$2\pi r dr dx.$$

Умножая на удельно-объемную работу, найдем элементарную работу

$$2\pi r dr dx \left(\frac{\tau_r^2}{2G} \right).$$

Выражая τ_r через τ_{\max} , получим:

$$\tau_r = \tau_{\max} \frac{2r}{d}.$$

Подставляя это значение в элементарную работу и интегрируя по всему объему, найдем выражение потенциальной энергии „ U “:

$$du \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r dr dx \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \frac{4r^2}{d^2} = \frac{4\pi dx \tau_{\max}^2 d^4}{G d^2 \cdot 4 \cdot 16} = \frac{1}{2} F dx \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right).$$

Здесь под du разумеется потенциальная энергия элемента объема стержня длиной dx , учитывающая только напряжения первого порядка при кручении. Из последнего выражения определяем U :

$$U = \frac{1}{2} Fl \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right).$$

Обозначив объем стержня через $V_0 = Fl$, преобразуем выражение U :

$$U = \frac{1}{2} V_0 \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right).$$

Из последнего соотношения определим объемно-удельную работу и подставим его в „ V^* “:

$$\frac{\tau_{\max}^2}{2G} = \frac{2U}{V_0}; \quad V = \frac{1}{2} F \frac{E}{G} \frac{2U}{V_0} = \frac{EU}{Gl}.$$

Выразим σ_r по уравнению (17-му) через потенциальную энергию:

$$\sigma_r = \frac{2r^2}{d^2} \frac{E \tau_{\max}^2}{G^2} = \frac{4r^2 E}{d^2 G} \frac{\tau_{\max}^2}{2G} = \frac{8r^2}{d^2} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{U}{V_0}.$$

Воспользовавшись связью U и V , подставим в последнее выражение значение U :

$$U = \frac{GlV}{E}; \quad \sigma_r = \frac{8r^2}{d^2} \frac{E}{G} \frac{GlV}{EV_0} = \frac{8r^2}{d^2} \cdot \frac{lV}{V_0} = \frac{8r^2}{d^2} \frac{V}{F};$$

$$V = \left(\frac{U}{l}\right) \left(\frac{E}{G}\right).$$

Из соотношения между V и U видим, что объем вторичных напряжений равен потенциальной энергии, отнесенной к единице длины бруса, умноженной на отношение модулей упругости 1-го и 2-го рода.

Из последних двух выражений для σ_r следует, что оно сохраняет свой параболический закон изменения вне зависимости от способа выражения через потенциальную энергию „ U “ или через объем вторичных напряжений „ V^* “, т. к. и первая и вторая — величины постоянные.

Подставляя выражение удельно-объемной работы в соотношение (18-ое) найдем:

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{G} \left(\frac{2U}{V_0}\right), \text{ или } \sigma_{\max} = \frac{E}{G} \frac{2GlV}{V_0 E} = \frac{2Vl}{Fl} = \frac{2V}{F}.$$

Получается замечательно простое выражение σ_{\max} : *наибольшее нормальное напряжение равно удвоенному объему нормальных напряжений, отнесенному к площади сечения стержня, т. е. удвоенному среднему напряжению, т. к. $\frac{V}{F}$ = среднему напряжению.*

Закручивание стержня при сохранении постоянной длины

На основании изложенного можно утверждать, что предположение о неизменности расстояния между поперечными сечениями не соответствует действительности, т. к. возникают нормальные напряжения, а следовательно продольные волокна изменяют свою длину и расстояние между сечениями, меняясь, уменьшится. Это заключение согласуется с повседневным опытом: все тела при закручивании укорачиваются.

Можно поставить так задачу: какую растягивающую силу необходимо приложить к скручиваемому стержню, чтобы его длина при этом осталась неизменной? (В машине Амслера для испытания стержней на кручение имеется специальное приспособление (стопор тележки) для предупреждения укорочения стержня при закручивании. Таким образом поставленную задачу возможно экспериментально осуществить на этой машине).

Очевидно, что для этой цели необходимо приложить такую продольно-растягивающую силу, которая способна вызвать нормальное напряжение:

$$\sigma_r = \frac{4r^2}{d^2} \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right). \quad (19)$$

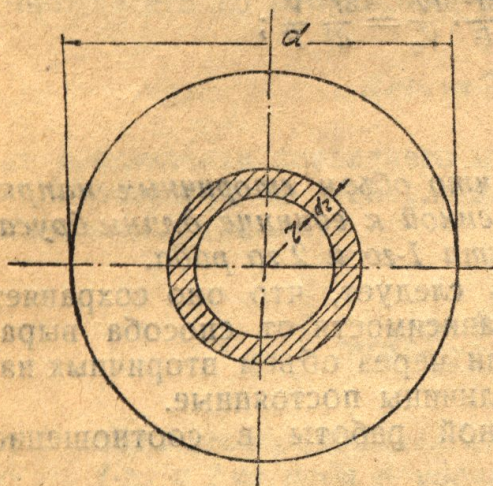
Это выражение получено из (17-го) путем умножения числителя и знаменателя на 2.

Выражение (19-ое) представляет то нормальное напряжение, которое возникает на кольцевом элементе сечения с переменным радиусом r и толщиной — dr .

На фиг. 4 представлен элемент площади $dF = 2\pi r dr$.

Желая уточнить поставленную задачу, заметим, что продольно-растягивающая сила вызывает напряжения, равномерно распределенные по сечению, а кручение стержня вызывает нормальные напряжения 2-го порядка, распределенные по закону параболоида.

Таким образом необходимо, чтобы сумма всех напряжений 2-го порядка была равна продольно-растягивающей силе; при соблюдении этого условия длина сохранит свой первоначальный размер. Точнее это следует формулировать так: для сохранения первоначальной длины необходимо,



Фиг. 4

чтобы сумма продольно-составляющих напряжений 2-го порядка по поперечному сечению равнялась продольно-растягивающей силе. В этой формулировке отнесено то обстоятельство, что напряжения 2-го порядка несколько отклоняются от направления нормали к сечению, совпадая с направлением навитых волокон в месте сечения. Эти направления определяются касательными к навитым волокнам в точках пересечения их поперечным сечением. По малости этих углов отклонения от направления нормали к сечению пренебрегаем ими и приближенно считаем, что напряжения 2-го порядка нормальны к плоскости сечения.

Для определения потребной растягивающей силы — P , выясним элементарное усилие, которое необходимо приложить к кольцевому сечению. С этой целью элементарное кольцевое сечение, определяемое выражением:

$$dF = 2\pi r dr$$

умножим на σ_r :

$$dF\sigma_r = 2\pi r dr \frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} \quad (20)$$

Проинтегрировав это выражение по всей площади сечения стержня, найдем искомую силу:

$$P = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r dr \frac{2r^2}{d^2} E \frac{\tau_{\max}^2}{G^2} = \frac{4\pi E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2 \cdot 4 \cdot 16} d^4 = \frac{1}{2} F \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right) \quad (21)$$

Само собою разумеется, что объем всех элементарных усилий второго порядка V и является их равнодействующей:

$$V = P = \frac{1}{2} F \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right),$$

где F — площадь сечения бруса $= \frac{\pi d^2}{4}$.

Из выражения (21) видно, что растягивающее усилие, которое необходимо приложить к стержню для сохранения его длины при закручивании постоянной, прямо пропорционально площади сечения стержня, отношению модулей упругости 1-го и второго рода и удельно-объемной потенциальной энергии.

Найденное усилие P , распределяясь равномерно по сечению F , вызывает постоянное напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} = \frac{1}{2} \frac{E}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right). \quad (22)$$

Это выражение получено из (21-го) путем деления его на F .

С другой стороны мы можем то же напряжение σ_0 выразить зависимостью, через относительное удлинение, вызываемое этим напряжением:

$$\sigma_0 = E \varepsilon_0. \quad (23)$$

Приравнявая (22-ое) и (23-е), определим ε_0 .

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right). \quad (24)$$

В результате этого удлинения и тех отрицательных удлинений, которые вызывает кручение, стержень останется постоянной длины.

Что касается картины распределения этих сложных напряжений по сечению стержня, то она получится путем суммирования напряжений 2-го порядка $-\sigma_r$ и σ_0 :

$$\sigma = -\sigma_r + \sigma_0. \quad (25)$$

При этом принято во внимание, что σ_0 — растягивающее напряжение, а σ_r — сжимающее. Знаки σ_r и σ_0 приняты на основании следующих соображений. При закручивании круглого стержня внешние волокна, навиваясь на цилиндрический стержень, вытягиваются.

Эти вытянутые волокна, навиваясь на волокна цилиндра, стремятся его укоротить, т. е. сжать в направлении оси. Если рассмотреть волокна, направленные вдоль образующих, но расположенные несколько ближе к оси, чем наружные, то они в свою очередь вытягиваясь от навивки, сжимают волокна, еще ближе расположенные к оси; вместе с тем они сами испытывают сжимающее действие со стороны волокон, далее их расположенных от оси стержня.

На основании этого сжатие внутренних волокон обусловлено действием всех волокон, расположенных по отношению к ним с наружной стороны стержня. К этому сжимающему действию волокон добавляется растягивающее действие усилия P , которое, равномерно распределяясь по сечению стержня, создает растягивающее напряжение σ_0 .

Подставив значение σ_r и σ_0 , получим:

$$\sigma = -\frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} + \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} = -\frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right). \quad (26)$$

Наименьшего значения σ достигает на внешней поверхности стержня:

$$\sigma_{\min} = \sigma \Big|_{r=\frac{d}{2}} = -\frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (27)$$

Наибольшего значения достигает на оси при $r=0$:

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (28)$$

Из (27-го) и (28-го) видно, что абсолютные величины σ_{\max} и σ_{\min} равны:

$$(\sigma_{\max}) = (\sigma_{\min}) = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (29)$$

Сравнение (29-го) с (22-м) показывает:

$$(\sigma_{\max}) = \sigma_{\min} = (\sigma_0). \quad (29)$$

Чтобы получить ненапряженные точек A и A_1 , достаточно выражение σ приравнять нулю:

$$\sigma = -\frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r_0^2}{d^2} - 1 \right) = 0. \quad (30)$$

Под r_0 здесь разумеется радиус окружности с нулевым напряжением („нейтральная окружность“). После сокращений на постоянный множитель перед скобками и перемены знака получим:

$$\frac{8r_0^2}{d^2} - 1 = 0; \quad r_0^2 = \frac{d^2}{8}; \quad (31)$$

$$r_0 = \frac{d}{2\sqrt{2}} = 0,353d.$$

Т. о. средняя часть сечения с наружным радиусом r_0 испытывает напряжение растяжения, которое в центре сечения достигает $\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}$; по мере увеличения радиуса напряжение уменьшается и при $r=r_0$ обращается в 0; при дальнейшем увеличении r , напряжение меняет знак и из растяжения переходит в напряжение сжатия. Это напряжение растёт по абсолютной величине и достигает своего минимума при $r = \frac{d}{2}$.

На основании изложенного видно, что наружное кольцо сечения, заштрихованное на фиг. 5, испытывает напряжения сжатия.

На этом чертеже изображена картина распределения напряжений только от действия смежных волокон, а не от всех навитых волокон, расположенных от оси далее r . Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

На наружном кольце показано сжимающее действие смежных волокон, но расположенных на dr дальше от оси стержня. При $r = \frac{d}{2}$ наружные волокна, конечно, в свою очередь, уже не сжимаются никакими другими волокнами (т. к. их нет) и потому они испытывают только растяжение, навиваясь на смежные волокна.

Условно, чтобы у бесконечно близко расположенных не изображать стрелки, обозначающие сжатие, а у наружных растяжение — направление стрелок сохранено общее — сжатия.

Интересно определить площадь кольца и площадь внутреннего круга с наружным радиусом r_0 и сопоставить их:

$$\pi r_0^2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} F = F_0$$

площадь внутреннего круга; площадь кольца определится из выражения:

$$\pi \left(\frac{d^2}{4} - r_0^2 \right) = \pi \left(\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{8} \right) = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{1}{2} F.$$

Из сопоставления этих двух выражений видно, что „нейтральная окружность“ разделяет сечение стержня на две равновеликие части: внутренний круг и наружное кольцо.

На фиг. 5 показаны две нулевые точки: A и A_1 , которые лежат на окружности радиуса r_0 .

Определим сумму всех растяжений, приложенных по площади внутреннего круга P_0 .

$$P_0 = \int_0^{r_0} 2\pi r dr \frac{2r^2}{d^2} \cdot \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} = \frac{4\pi \cdot E\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \frac{r_0 r^4}{4} = \frac{\pi E\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \frac{d^2}{64} =$$

$$= \frac{\pi d^2 E}{4 \cdot 8G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right) = F \frac{E}{8G} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right) = \frac{P}{4}, \quad (32)$$

т. е. средняя часть стержня растягивается силою P_0 равною только одной четверти P . Отсюда следует, что объем параболоида растягивающих напряжений внутреннего круга с наружным радиусом r_0 также равняется одной четверти P .

Определим сжимающее усилие напряжений, распределенных по наружному кольцу — P'_0 :

$$P'_0 = - \int_{r_0}^{d/2} 2\pi r dr \frac{2r^2 E\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} =$$

$$= - \frac{4\pi E\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \frac{r^4}{4} \Big|_{r_0}^{d/2} =$$

$$= - \frac{\pi E\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \left(\frac{d^4}{16} - \frac{d^4}{64} \right) =$$

$$= - \frac{3d^2 \pi E\tau_{\max}^2}{64 G^2} = - \frac{3}{4} \frac{\pi d^2 E}{4 \cdot 2G} \cdot \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right) = - \frac{3}{4} P, \quad (33)$$

т. е. сжимающее усилие кольца в три раза превосходит растягивающее действие на площадь внутреннего круга.

Чтобы получить объем напряжений (см. фиг. 5), распределенных по кольцевому сечению, необходимо определить сумму растягивающих напряжений той же кольцевой площади P''_0 и алгебраически сложить с P'_0

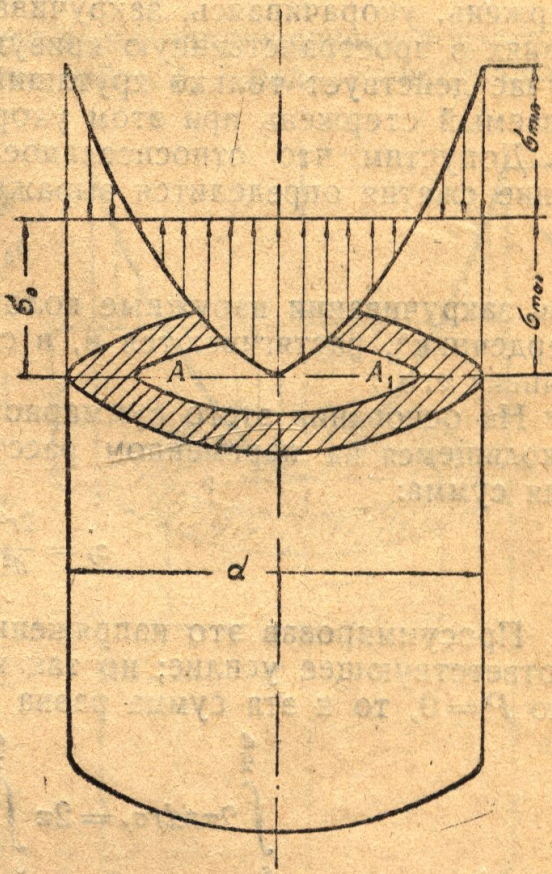
$$P''_0 = \sigma_0 \pi \left(\frac{d^2}{4} - r_0^2 \right) = \sigma_0 \pi \left(\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{8} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 \pi d^2}{4} = \frac{1}{2} P. \quad (34)$$

Складывая алгебраически P'_0 и P''_0 , найдем объем напряжений наружного кольца P^0 :

$$P^0 = P'_0 + P''_0 = - \frac{3}{4} P + \frac{P}{2} = - \frac{P}{4}, \quad (35)$$

т. е. оказывается, что объем напряжений внутреннего круга с наружным радиусом r_0 по абсолютной величине равновелик объему напряжений сжатия, распределенных по наружному кольцу.

Это, конечно, вполне понятно, т. к. если бы такого равенства не существовало, то рассматриваемый стержень вышел бы из условий равновесия.



Фиг. 5

Линия нулевых напряжений

Рассмотрим случай, когда продольно-растягивающая сила P отсутствует (т. е. применительно к испытанию на машине Амслера, когда стопор тележки выключен из действия, и стержень может свободно укорачиваться; при этом тележка с маятником приближается в соответствии с укорочением стержня. Пока закручивание происходит в пределах упругих деформаций, ось испытуемого стержня сохраняет свою прямолинейность; когда же опыт протекает за пределами упругости, тогда весь стержень, укорачиваясь, закручивается, и его ось обращается в этих условиях в пространственную кривую, близкую к винтовой линии); в этом случае действует только крутящий момент — M_t и, следовательно, скручиваемый стержень при этом укорачивается.

Допустим, что относительное укорочение стержня ϵ_0 , тогда напряжение сжатия определится выражением:

$$\sigma_0 = -E\epsilon_0. \quad (36)$$

При закручивании наружные волокна, навиваясь на внутренний стержень „сердечник“, растягиваются и, в свою очередь, сжимают сердечник, укорачивая его.

На основании этого суммарное напряжение в произвольном волокне, находящемся на переменном расстоянии r определится, как алгебраическая сумма:

$$\sigma_r = \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} - E \epsilon_0. \quad (37)$$

Просуммировав это напряжение по всей площади сечения, получим соответствующее усилие; но так как в рассматриваемом случае по условию $P=0$, то и эта сумма равна нулю:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r dr \sigma_r &= 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r dr \left(\frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} - E \epsilon_0 \right) = \\ &= 2\pi E \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2d^2 G^2} \frac{d^4}{16} - \frac{\epsilon_0 d^2}{2 \cdot 4} \right) = \frac{2\pi E d^2}{8} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{4 G^2} - \epsilon_0 \right) = \frac{\pi d^2}{4} E \left(\frac{\tau_{\max}^2}{4 G^2} - \epsilon_0 \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

По сокращении на постоянный множитель перед скобкой $\frac{\pi d^2}{4} E$, получим:

$$\epsilon_0 = \frac{\tau_{\max}^2}{4 G^2}. \quad (39)$$

Подставив найденное значение ϵ_0 в выражение (37-ое), найдем σ_r :

$$\sigma_r = \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} - \frac{E \tau_{\max}^2}{4 G^2} = \frac{E \tau_{\max}^2}{4 G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{E \tau_{\max}^2}{2 G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right), \quad (40)$$

т. е. напряжение в любой точке, отстоящей на произвольном расстоянии r от оси стержня, прямо пропорционально отношению модулей упругости 1-го и второго рода, удельно объемной потенциальной энергии и разности $\frac{8r^2}{d^2} - 1 = 2 \left(\frac{r}{\frac{d}{2}} \right)^2 - 1$ между удвоенным отношением квадрата радиуса рассматриваемой точки к квадрату внешнего радиуса и единицей.

Рассматривая полученное выражение, видим, что σ_r распределяется по закону параболоида, что σ_{\max} возникает на внешней поверхности стержня:

$$\sigma_{\max} = \sigma_r \Big|_{r=d/2} = \frac{E \tau_{\max}^2}{4 G^2} \left(\frac{8d^2}{4d^2} - 1 \right) = \frac{E \tau_{\max}^2}{4 G^2}. \quad (41)$$

Наименьшее напряжение σ_{\min} возникает в центре сечения:

$$\sigma_{\min} = \sigma_r \Big|_{r=0} = -\frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (42)$$

Из сопоставления σ_{\max} и σ_{\min} видим, что их абсолютные величины равны:

$$(\sigma_{\max}) = (\sigma_{\min}) = \left(\frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right). \quad (43)$$

Для определения точек A и A_1 с нулевыми напряжениями достаточно σ_r приравнять нулю и из этого уравнения найти r_0 — радиус „нейтральной окружности“:

$$\sigma_{r_0} = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r_0^2}{d^2} - 1\right) = 0. \quad (44)$$

По сокращению на постоянный множитель перед скобкою получаем

$$r_0^2 = \frac{d^2}{8}; \quad r_0 = \frac{d}{2\sqrt{2}} = 0,353d. \quad (45)$$

Итак, геометрическое место точек нулевых напряжений образует окружность с радиусом $r_0 = 0,353d$, внутренняя часть стержня с диаметром $2r_0 = 0,706d$, испытывая напряжения сжатия, образует сжатый „сердечник“; внешняя часть стержня с кольцевым сечением

$$F_0 = \pi \left(\frac{d^2}{4} - r_0^2\right) = \pi \left(\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{8}\right) = \frac{\pi d^2}{8} = F/2, \quad (46)$$

испытывая напряжение растяжения, образует „внешнюю гильзу“ стержня с кольцевым сечением, численно равным половине сечения всего стержня. Отсюда следует, что площадь „сердечника“ тоже равняется половине всего сечения стержня:

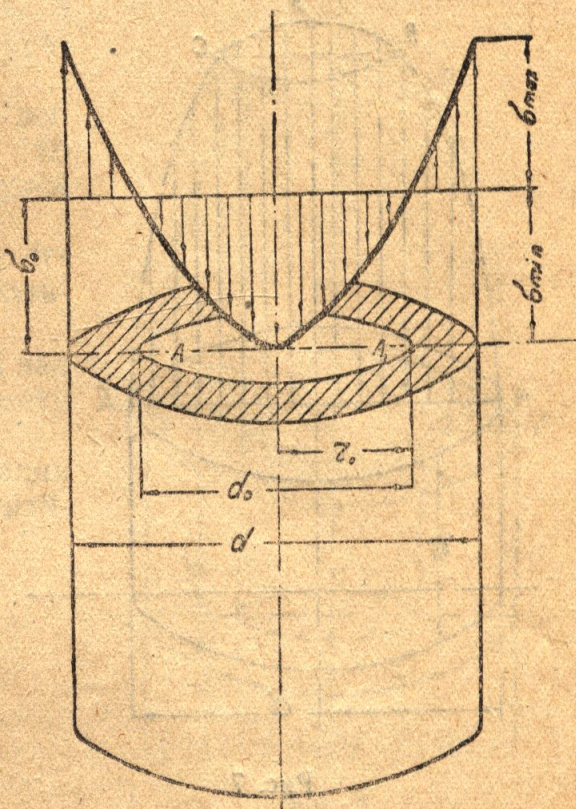
$$F_0 = \pi r_0^2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{1}{2} F. \quad (47)$$

На фиг. 6 изображено распределение напряжений второго порядка; показаны σ_{\max} и σ_{\min} , нулевые точки A и A_1 , которые определяют собою линию нулевых напряжений и, наконец, дана сжатая площадь „сердечника“ (незаштрихованная) и растянутая площадь кольцевого сечения.

Закон изменения усилий сжатия по сечению круглого стержня

Интересно выяснить закон изменения усилий сжатия по поперечному сечению в зависимости от переменного радиуса, величина которого определяет собою положение рассматриваемого волокна.

Чтобы определить усилие сжатия P_r , которое испытывают волокна, отстоящие на расстоянии r от оси бруса, вследствие сжимающего действия навитых волокон, отстоящих от оси на расстоянии более r , достаточно проинтегрировать элементарное сжимающее усилие в пределах от $\frac{d}{2}$ и до r :



Фиг. 6

$$Pr = - \int_r^{d/2} 2\pi r dr \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} = - \frac{4\pi E \tau_{\max}^2 r^4}{d^2 G^2} \Big|_r^{d/2} = - \frac{2\pi E \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right) \left[\frac{d^4}{16} - r^4\right]}{d^2 G} =$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right) \left[1 - \left(\frac{2r}{d}\right)^4\right] = - \frac{1}{2} F \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right) \left[1 - \left(\frac{2r}{d}\right)^4\right], \quad (21')$$

т. е. усилие сжатия цилиндра радиуса r под действием всех остальных волокон, навитых на него, прямо пропорционально площади сечения стержня F , отношению модулей первого и второго рода $\frac{E}{G}$, удельно-объемной работе потенциальной энергии и разности между единицу и четвертой степенью отношения диаметров цилиндра, образуемого рассматриваемыми волокнами (с диаметром — $2r$) и стержня (с диаметром d).

Усилие P_r , как это видно из выражения (21), изменяется по сечению по закону параболоида четвертой степени.

При $r = \frac{d}{2}$, т. е. на наружных волокнах усилие сжатия равно нулю, т. к. никаких волокон на наружную поверхность стержня не навивается и, следовательно, сжимающие усилия отсутствуют.

При $r = 0$ усилие приобретает минимальное значение

$$P_{\min} = - \frac{1}{2} F \left(\frac{E}{G}\right) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G}\right).$$

На фиг. 7 представлен закон изменения P_r ; при значениях, близких к $\frac{d}{2}$, P_r быстро растет (внешние волокна, навиваясь на цилиндры больших диаметров, сильно растягиваются и вызывают значительное сжатие; начиная с $r = \frac{d}{4}$ и до нуля P_r — растет очень медленно; волокна, навиваясь на цилиндры все с меньшими и меньшими диаметрами, мало удлиняются сами и, следовательно, вызывают малые усилия сжатия. Чтобы составить себе представление о величине этой сжимающей силы возьмем числовые данные.

Допустим дано: диаметр вала $d = 20$ см, $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см², $\tau_{\max} = 1000$ кг/см². Требуется определить P_{\min} .

Подставляя данные в выражение $P_{r\min}$, найдем:

$$P_{\min} = - \frac{1}{2} F \frac{E \tau_{\max}^2}{G^2} = - \frac{1}{2} \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot \frac{1000^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^5} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^5} = 245 \text{ кг.}$$

Конечно, это ничтожная сила по сравнению с той, которую может выдержать сечение вала с $d = 20$ см. Однако, здесь следует принять во внимание, что эта сила распределяется по сечению не равномерно, а концентрично и не по всему сечению, а только по площади „сжатого сердечника“.

Это уже более опасное напряженное состояние в смысле возможной опасности потери устойчивости „сжатым сердечником“, если скручиваемый стержень имеет достаточную длину. Допустим, что имеем пустотелый вал, который находится под воздействием скручивающего момента —

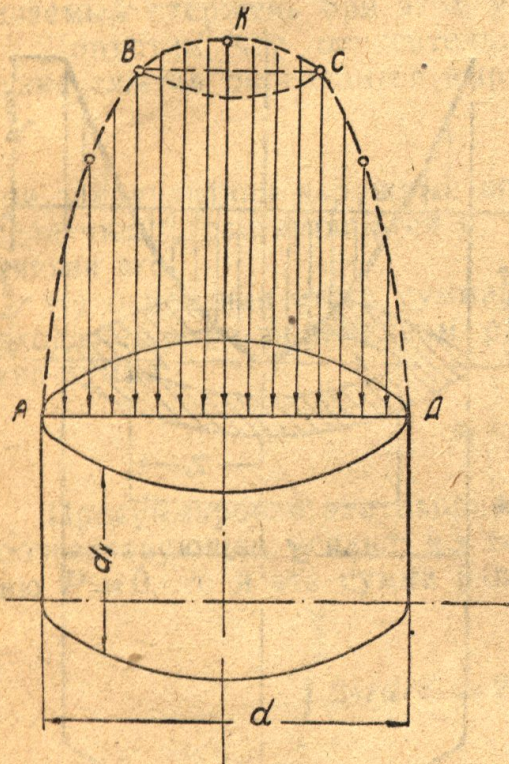


Рис. 7

M_r . Для этого случая мы без труда подсчитаем P_{\min}^0 по формуле (21), подставив вместо r внутренний радиус кольцевого сечения вала, равный $\frac{d_0}{2}$:

$$P_{\min}^0 = -\frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right]. \quad (21)$$

На фиг. 8 дано распределение сжимающего усилия по кольцевому сечению пустотелого вала.

От точек A и D , лежащих на внешней поверхности вала, P_r бурно растет; у точек B и C , лежащих на внутренней поверхности вала, нарастание несколько замедляется; при дальнейшем приближении к оси нарастание P_r прекращается, т. к. больше нет волокон, которые могли бы, навившись, в свою очередь, сжать материал стержня; кривые AB и CD соединяются прямою BC .

Однако, это не означает, что если высверлить в валу „сжатый сердечник“, то будут удалены сжатые волокна и останутся только растянутые.

В этом случае образуется кольцевое сечение растянутых волокон и второе кольцевое сечение сжатых волокон.

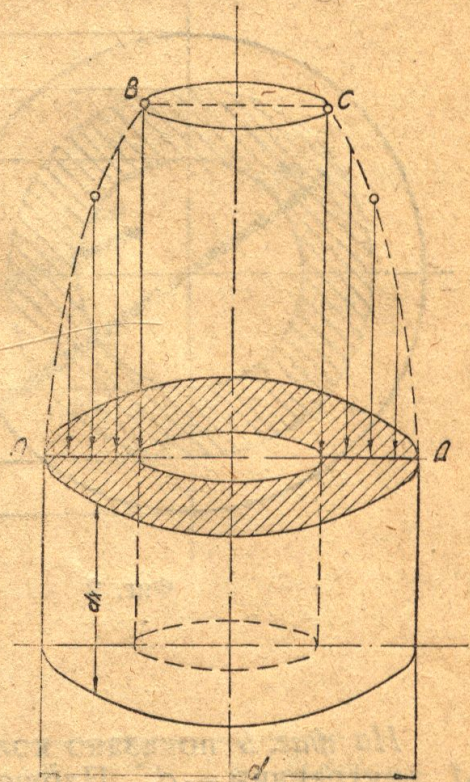
Допустим, что мы имеем пустотелый вал с кольцевым сечением, наружный диаметр которого — d , а внутренний — d_0 .

Проинтегрировав элементарные усилия по всей площади кольцевого сечения, найдем:

$$\int_{d_0/2}^{d/2} 2\pi r dr \varepsilon = 2\pi \int_{d_0/2}^{d/2} r dr \left(\frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 - G^2} - E \varepsilon \right) =$$

$$= 2\pi E \left[\frac{2\tau_{\max}^2 r^4}{d^2 G^2} \frac{1}{4} - \varepsilon \frac{r^2}{2} \right]_{d_0/2}^{d/2} =$$

$$= \frac{2\pi E d^2 - d_0^2}{2} \left[\frac{\tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \left(\frac{d^2 + d_0^2}{4} \right) - \varepsilon_0 \right].$$



Фиг. 8

При подстановке напряжения было использовано выражение (37). Так как по условию внешние продольно сжимающие усилия отсутствуют, то приравняв его нулю, получим:

$$\varepsilon_0 = \frac{\tau_{\max}^2 d^2 + d_0^2}{2G^2} \frac{1}{2d^2}.$$

Эту величину подставляем в выражение (37):

$$\sigma_r = \frac{2r^2 E \tau_{\max}^2}{d^2 - G^2} - \frac{E \tau_{\max}^2 d^2 + d_0^2}{4G^2} \frac{1}{d^2} = \frac{E \tau_{\max}^2}{d^2 G^2} \left[2r^2 - \frac{d^2 + d_0^2}{4} \right].$$

Приравняв σ_r нулю, найдем радиус линии нулевых напряжений:

$$r = \frac{\sqrt{d^2 + d_0^2}}{2\sqrt{2}}. \quad (45)$$

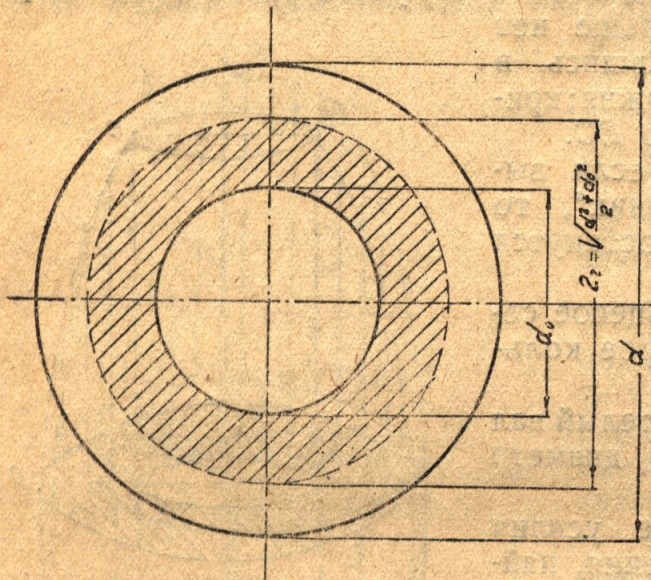
Легко убедиться, что эта линия разделяет сечение на два равновеликих кольца. В самом деле, кольцо сжатого сердечника определится следующим образом:

$$F'_0 = \pi r^2 - \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi}{4} (4r^2 - d_0^2) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d^2 + d_0^2}{2} - d_0^2 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{d^2 - d_0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi \frac{d^2 - d_0^2}{4} = \frac{1}{2} F,$$

где F — площадь сечения пустотелого вала.

Итак, сжатый сердечник имеет сечение, равное $\frac{1}{2} F$, следовательно, сечение растянутых волокон тоже равно $\frac{1}{2} F$.



Фиг. 9

Рассматривая соотношение (45), видим, что по мере увеличения d_0 , одновременно растет и r ; в пределе, когда d_0 стремится к d , кольцевое сечение — к окружности с диаметром d , радиус r стремится в пределе к $0,5 d$; если d , уменьшаясь, приближается к d_0 , то r приближается к $0,5 d_0$; если, наконец, d_0 уменьшается до нуля, а d сохраняет свою величину, то r приобретает уже известную нам величину:

$$r = \frac{d}{2\sqrt{2}}.$$

Конечно, r всегда находится в пределах:

$$\frac{d}{2} \geq r \geq \frac{d_0}{2}.$$

На фиг. 9 показано кольцевое сечение вала с наружным диаметром — d , внутренним — d_0 . Площадь сжатого сердечника заштрихована. Линию нулевых напряжений представляет окружность с радиусом:

$$r = \frac{\sqrt{d^2 + d_0^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Из выражения $\sigma_r = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right)$ видно, что нормальное напряжение 2-го порядка пропорционально квадрату τ_{\max} и, следовательно, при увеличении τ_{\max} одновременно растет и σ_r .

Чтобы составить представление о числовых величинах σ_r и τ_{\max} , дадим ряд значений τ_{\max} и по ним определим соответствующее σ_{\max} , выраженное в процентах τ_{\max} .

Ниже приведена таблица 1, в которой показаны все эти величины для различных значений τ_{\max} .

Если наибольшее тангенциальное напряжение изменяется от 200 кг/см² до 4000 кг/см², (большой предел $\tau_{\max} = 4000$ кг/см² сознательно взят значительно превышающим предел упругости строительной стали с целью подчеркнуть то обстоятельство, что если бы даже продолжить предел действия зависи-

Таблица 1

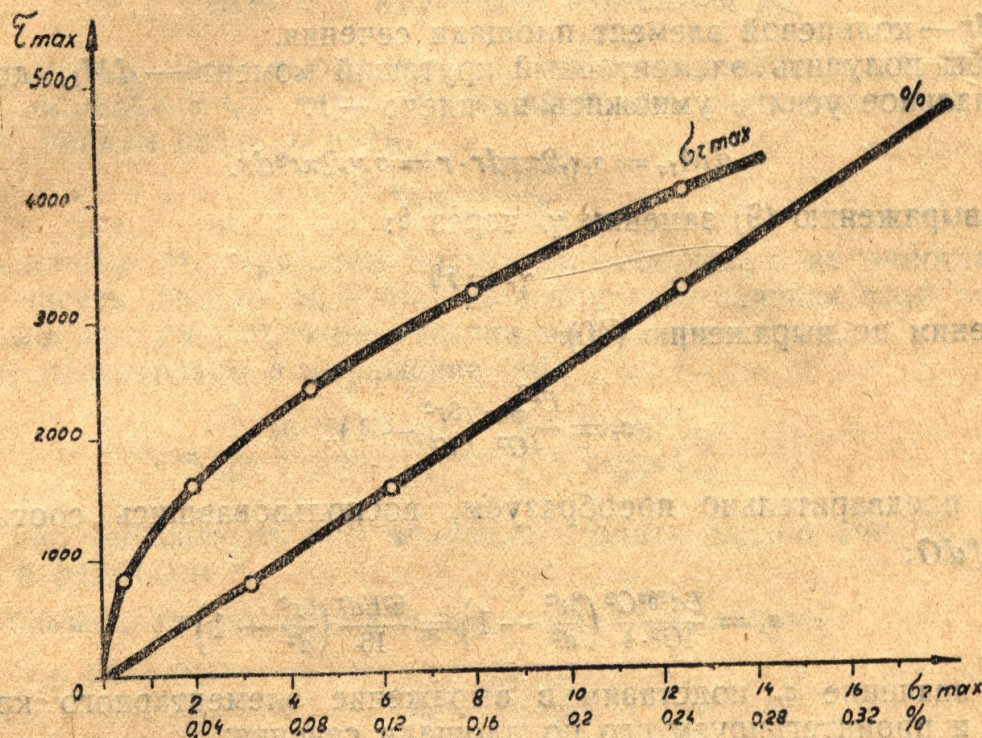
кг/см	кг/см	%
200	0,031	0,015
400	0,125	0,031
600	0,284	0,047
800	0,5	0,0625
1000	0,78	0,078
1200	1,125	0,094
1400	1,53	0,109
1600	2,00	0,125
1800	2,53	0,140
2000	2,125	0,156
2200	2,78	0,172
2400	4,50	0,187
2600	5,28	0,203
2800	6,125	0,218
3000	7,03	0,234
3200	8,00	0,250
3400	9,00	0,264
3600	10,10	0,281
3800	11,28	0,297
4000	12,50	0,312

мости (47) до этого повышенного предела, то и в таком случае σ_r не может приобрести заметного влияния на весь процесс кручения), то в

соответствии с этим σ_{\max} изменяется от 0,031 кг/см² до 12,5 кг/см²; σ_{\max} , выраженное в процентах τ_{\max} в соответствии с этим изменяется от 0,015% до 0,312%.

На фиг. 10 эти зависимости выражены графически. По оси абсцисс отложены величины σ_{\max} и процентное отношение этой величины τ_{\max} ; по оси ординат отложены значения τ_{\max} . Зависимость σ_{\max} от τ_{\max} выражается параболой, что вполне согласуется с уравнением (43-м); процентное выражение σ_{\max} , в зависимости от τ_{\max} , представлено на фиг. 10 прямой, проходящей через начало координат и наклоненной под углом $\text{tg } \alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}}$.

На основании фиг. 10-ой и таблицы 1 видно, что даже при $\tau_{\max} = 4000$ кг/см² σ_{\max} достигает только 0,312%, т. е. практически с напря-



Фиг. 10

жениями 2-го порядка не следует считаться, т. к. они настолько значительно малы по сравнению с напряжениями 1-го порядка, что никакого сколько-нибудь заметного влияния оказать на способность стержня сопротивляться скручиванию не могут.

Однако, складываясь с напряжениями 1-го порядка, напряжения 2-го порядка образуют сложные напряжения, которые несколько больше их (напряжений 1-го порядка); если эти сложные напряжения возникают весьма многократно (как это имеет место при работе клапанной пружины мотора) в наиболее опасных местах, в определенных направлениях, то они могут вызывать сначала усталость материала, а затем даже разрушение его.

Остальные случаи, когда необходимо принять во внимание напряжения 2-го порядка, т. е. когда они начинают оказывать заметное влияние на весь процесс кручения и сказываться на способности стержня прочно сопротивляться внешнему моменту M_b , будут разобраны ниже.

Крутящий момент напряжений второго порядка M_{τ}

Напряжение второго порядка по направлению совпадает с направлением навитого волокна, т. е. в любой точке совпадает с касательной к нему, наклоненной к образующей под переменным углом γ .

В связи с этим напряжения второго порядка, проектируясь на плоскость сечения, перпендикулярную к оси стержня, дают касательные проекции, которые образуют крутящий момент — M_{ts} .

На фиг. 1 направление σ совпадает с ab' ; чтобы спроектировать это напряжение на плоскость сечения, достаточно σ умножить на $\sin \gamma$. На фиг. 1 показан только наибольший угол сдвига. Для произвольного волокна, отстоящего от оси на переменном расстоянии — r , γ изменяется в γ_r по малости угла заменяем $\sin \gamma_r$ его аргументом γ_r :

$$\sigma_r \sin \gamma_r = \sigma_r \gamma_r.$$

Умножая это выражение на элементарную площадку, получим элементарное тангенциальное усилие:

$$\sigma_r \gamma_r dF = \sigma_r \gamma_r 2\pi r dr,$$

где $2\pi r dr$ — кольцевой элемент площади сечения.

Чтобы получить элементарный крутящий момент — dM_{ts} , достаточно тангенциальное усилие умножить на плечо — r :

$$dM_{ts} = \sigma_r \gamma_r 2\pi r dr \cdot r = \sigma_r \gamma_r 2\pi r^2 dr.$$

По выражению (9) заменим γ_r через θ :

$$\gamma_r = r\theta$$

σ_r — заменим по выражению (40):

$$\sigma_r = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right),$$

которое предварительно преобразуем, воспользовавшись соотношением $-\tau = \frac{1}{2} \theta dG$:

$$\sigma_r = \frac{Ed^2\theta^2 G^2}{4G^2 \cdot 4} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) = \frac{\theta^2 Ed^2}{16} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right).$$

Это значение σ_r подставим в выражение элементарного крутящего момента и проинтегрируем его по площади сечения:

$$M_{ts} = \int_0^{d/2} \sigma_r 2\pi r^2 dr \theta = 2\pi \theta \int_0^{d/2} \frac{\theta^2 Ed^2}{16} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) r^3 dr = \frac{\theta^3 E\pi d^4 d^2}{32 \cdot 3 \cdot 16} = \frac{\theta^3 EI_p d^2}{4 \cdot 12}.$$

Если подставить наименование единиц всех множителей, то получим после сокращений кг-см, т. е. размерность M_{ts} правильна.

При выводе крутящего момента мы учли то обстоятельство, что нормальные напряжения сжатого сердечника создают крутящий момент, направленный в противоположную сторону M_{ts} . Если этого не сделать, то получился бы M'_{ts} , превосходящий найденный в четыре раза. Определим $M_{t\tau}$ — крутящий момент, который создают тангенциальные напряжения τ .

Для этого воспользуемся соотношением:

$$\theta = \frac{M_{t\tau}}{GI_p}; M_{t\tau} = \theta GI_p.$$

Складывая $M_{t\tau}$ и M_{ts} , найдем выражение полного крутящего момента.

$$M_t = M_{t\tau} + M_{ts} = I_p G \theta \left[1 + \frac{E}{G} \frac{\theta^2 d^2}{4 \cdot 12} \right].$$

Выходит, что внешний крутящий момент M_t , вызывая тангенциальные и нормальные напряжения, создает два крутящих момента внутренних сил, которые уравновешивают M_t . Возникновение нормальных на-

пряжений, создающих крутящий момент, уменьшает тангенциальные напряжения.

Величина $M_{t\tau}$ оценивается вторым членом выражения, заключенного в скобках; для круглого сечения он очень мал и потому им можно пренебречь.

Если мы желаем по известному внешнему моменту M_t определить θ , то необходимо использовать выведенное соотношение $M_{t\tau}$ и θ ; зная θ , можно определить $\tau_{\max} = \frac{M_{t\tau} d}{2I_p}$ на основании зависимости $\theta = \frac{M_{t\tau}}{GI_p}$; по τ_{\max} определяется σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left[\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right].$$

Связь σ_r с крутящим моментом M_t

Выведенному нами выражению σ_r можно придать и другие формы; например, определив τ_{\max} через крутящий момент M_t и подставив его значение в σ_r , найдем связь σ_r и M_t :

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi d^3}. \quad (48)$$

Здесь мы пишем M_t ; при этом допускаем небольшую неточность (следовало бы писать вместо M_t — $M_{t\tau}$). Для круглого сечения этой погрешностью можно, как уже об этом указано выше, пренебречь.

Далее подставляем в выражение (40):

$$\sigma_r = \frac{E}{4G^2} \frac{16 \cdot 16 \cdot M_t^2}{\pi^2 d^6} \left[\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right] = \frac{64EM_t^2}{\pi^2 G^2 d^6} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right). \quad (49)$$

Конечно, зависимость (49) получилась опять параболической, но уже между σ_r и радиусом r .

Наибольшее напряжение получится также при $r = \frac{d}{2}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{64EM_t^2}{\pi^2 G^2 d^6}, \quad (50)$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{4EM_t^2}{d^2 F^2 G^2}. \quad (50^1)$$

Наименьшее значение σ_r достигает при $r = 0$:

$$\sigma_{\min} = -\frac{64EM_t^2}{\pi^2 G^2 d^6}, \quad (51)$$

или

$$\sigma_{\min} = -\frac{4EM_t^2}{d^2 F^2 G^2}. \quad (51^1)$$

Подставляя наименование единиц всех множителей, входящих в зависимость (50), находим:

$$\sigma_{\max} = \frac{64E \text{ кг/см}^2 M_t^2 \text{ кг}^2 \cdot \text{см}^2}{\pi^2 G^2 \frac{\text{кг}^2}{\text{см}^4} d^6 \text{ см}^6} = \frac{64EM_t^2 \text{ кг}}{\pi^2 G^2 d^6 \text{ см}^2}. \quad (52)$$

Выразим σ_r через угол закручивания; для этого воспользуемся зависимостью между φ и крутящим моментом M_t :

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}. \quad (53)$$

В нашем случае длина элемента dx и потому зависимость (53) переписывается в такой форме:

$$d\varphi = \frac{M_t dx}{GI_p}. \quad (54)$$

Отсюда определим M_t через $d\varphi$ и результат подставим в выражение (49):

$$M_t = GI_p \frac{d\varphi}{dx} = GI_p \theta, \quad (55)$$

где $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ — относительный угол закручивания.

Подстановка в (49) дает:

$$\sigma_r = \frac{64EG^2 I_p^2 \theta^2}{\pi^2 G^2 d^6} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) = \frac{64E\pi^2 d^8}{\pi^2 32^2 d^6} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) = \frac{Ed^2}{16} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right) \theta^2. \quad (56)$$

Очевидно, что относительные углы закручивания, возникающие в стержнях равных размеров под действием равных крутящих моментов M_t , будут различны, в зависимости от физических свойств материалов.

Для жестких материалов, у которых G велико, θ — мало, а в связи с этим мало и σ_r ; для таких материалов, как резина G мало, и потому θ получается значительным, а в связи с этим σ_r достигает одного порядка с τ_{\max} .

Итак в стержнях, изготовленных из материалов с большими деформациями (например, из резины) точнее сказать: с большим отношением $\frac{\tau_{\max}^2}{G}$ см. (40). [Из (40) $\sigma_r = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right)$ видно, что σ_r зависит не

только от отношения $\frac{\tau_{\max}^2}{G^2}$, но и от величины E , но так как модуль упругости при растяжении в свою очередь связан с G соотношением: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, то при изменении G , одновременно меняется и E . Таким образом, вводя какое-либо ограничительное условие относительно величины G , мы тем самым ограничиваем и величину E , напряжения 2-го порядка при кручении получаются по величине того же класса, что и напряжения 1-го порядка и, следовательно, в этом случае учитывать эти напряжения совершенно необходимо.

Допустим, что скручивается резиновый брус диаметром $d = 2$ см, при этом относительный угол закручивания определится выражением:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}.$$

Пусть крутящий момент равен 10 кг-см, модуль упругости при сдвиге $G = 3,5$ кг/см².

На основании этих данных θ получает численное значение:

$$\theta = \frac{10 \cdot 32}{3,5 \cdot \pi d^4} = \frac{10 \cdot 32}{3,5 \cdot \pi \cdot 16} = \frac{20}{3,5 \cdot \pi} = 2 \text{ (точнее } 1,91).$$

Подставляя это значение θ в выражение (56), приняв $r = \frac{d}{2}$, найдем:

$$\sigma_{\max} = \frac{Ed^2\theta}{16} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 4}{16} = 10 \text{ кг/см}^2. \quad (57)$$

Желая сравнить с τ_{\max} , определим последнее из уравнения напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 10}{\pi 8} = \frac{20}{\pi} = 7 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. в рассматриваемом случае τ_{\max} и σ_{\max} получаются одного порядка.

На основании соотношения (41) можно заключить, что σ_{\max} может даже значительно превзойти τ_{\max} , так как нормальное напряжение выражается через τ_{\max}^2 .

В таблице II приведены τ_{\max} , изменяющиеся от 1 кг/см² и до 20 кг/см² (предел упругости); по этим значениям вычислены соответствующие им величины σ_{\max} , помещенные во втором столбце; в третьем столбце даны те же значения, выраженные в % τ_{\max} .

Таблица II

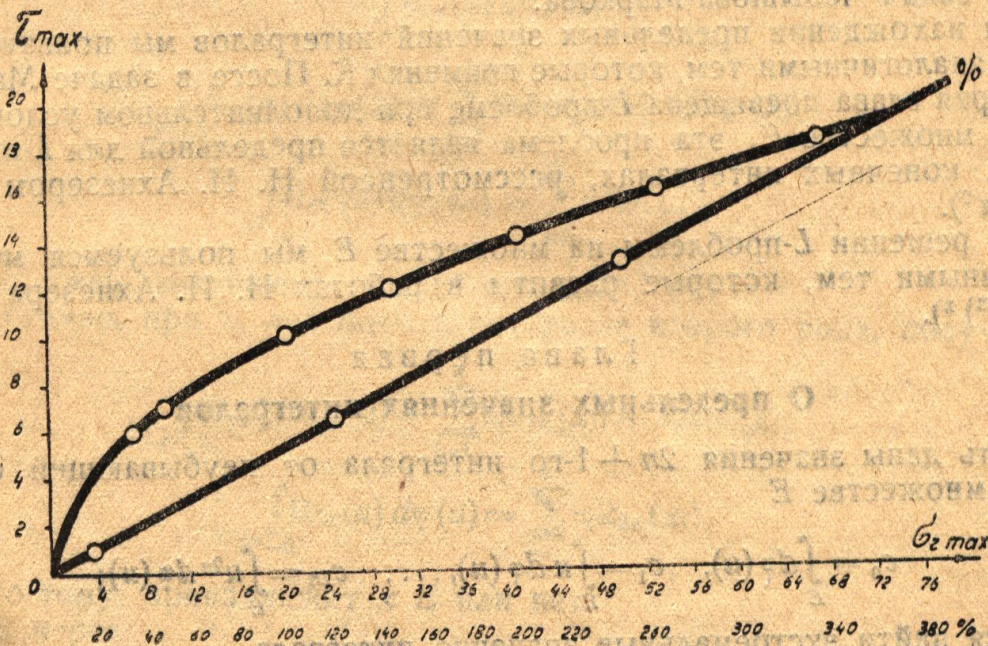
τ_{\max} кг/см ²	σ_{\max} кг/м ²	%
1	0,21	21
2	0,83	41,50
4	3,33	83,20
4,8	4,8	100
6	7,50	125
7	10,00	143
8	13,33	167
10	20,83	208
12	30	250
14	40,83	292
16	53,33	333
18	67,50	375
20	83,33	417

Из рассмотрения приведенной таблицы видно, что при малых значениях τ_{\max} , σ_{\max} хотя и меньше τ_{\max} однако представляет величину того же самого порядка, при $\tau_{\max} = 4,8$ кг/см², $\sigma_{\max} = 4,8$ кг/см²; при дальнейшем увеличении τ_{\max} , σ_{\max} перерастает его и при $\tau_{\max} = 20$ кг/см² $\sigma_{\max} = 417\%$ (τ_{\max}).

Уже при $\tau_{\max} = 10$ кг/см² σ_{\max} переходит через предел упругости и, следовательно, опасными напряжениями являются не напряжения 1 порядка, а напряжения 2 порядка.

На фиг. 11 графически дано изображение данных таблицы II, по оси ординат отложены значения τ_{\max} , по оси абсцисс отложены величины σ_{\max} , выраженные в кг/см² и те же величины в % τ_{\max} .

В материалах, промежуточных (по своим физическим свойствам) между сталью и резиной, возникают подобные же явления, только значи-



Фиг. 11

тельно сглаженные в том смысле, что напряжения 2 порядка, хотя и не перерастают напряжения 1 порядка, но при некоторых условиях достигают того же класса величины, что и τ_{\max} и, следовательно, в таких случаях необходимо вести расчет с учетом напряжений 2 порядка.