1940 НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ Том III
ХАРЬКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

О МАКСИМАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проф.-д-р АХИЕЗЕР Н. И.

В нескольких заметках, напечатанных в „Докладах Академии Наук С. С. С. Р.", А. И. Плесснер построил спектральную теорию максимальных симметрических операторов. В настоящей заметке мы хотим показать, что теория А. И. Плесснера в некотором смысле непосредственно включается в спектральную теорию самосопряженных операторов.

1. Пусть H есть полное (сепарабельное или несепарабельное) гильбертово пространство. Пусть, далее, A есть максимальный симметрический оператор в H, A^* — его сопряженный оператор и D, D^* их области определения. Примем для определенности, что уравнение

$$A^* g - zg = 0 \qquad (Im\, z \neq 0)$$

нетривиальные решения имеет в верхней полуплоскости ($Im\, z > 0$), и обозначим натягиваемое этими решениями подпространство через G_z.

Образуем гильбертово пространство $\{H, H\}$, элементами которого являются пары $\{f_1, f_2\}$ элементов из H, причем

$$\alpha \{f_1, f_2\} = \{\alpha f_1, \alpha f_2\},$$
$$\{f_1, f_2\} \pm \{g_1, g_2\} = \{f_1 \pm g_1, f_2 \pm g_2\},$$
$$(\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}) = (f_1, g_1) + (f_2, g_2).$$

Определим в $\{H, H\}$ оператор $\mathbf{A}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{A} \{f_1, f_2\} = \{Af_1, -Af_2\},$$

причем $\{f_1, f_2\} \in \mathbf{D} = \{D, D\}$. Легко видеть, что $\mathbf{A}$ есть симметрический оператор и

$$\mathbf{A}^* \{f_1, f_2\} = \{A^* f_1, -A^* f_2\} \qquad (f_1, f_2 \in D^*).$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}^* \{g_1, g_2\} - z \{g_1, g_2\} = \{A^* g_1 - zg_1, -A^* g_2 - zg_2\}.$$

При $Im\, z \neq 0$ последнее выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$g_1 \in G_z,\ g_2 = 0, \text{ если } Im\, z > 0,$$

и

$$g_1 = 0,\ g_2 \in G_{\bar z}, \text{ если } Im\, z < 0.$$

Отсюда следует, что индексы дефекта оператора $\mathbf{A}$ одинаковы, и значит $\mathbf{A}$ имеет гипермаксимальные расширения. Для их получения следует изобразить изометрически подпространство $\{G_\alpha, 0\}$ ($\alpha > 0$, например, $\alpha = 1$) на $\{0, G_{i\alpha}\}$, затем определить область $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ самосопряженного оператора $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ как совокупность всех пар вида

$$\{f_1, f_2\} = \{f_{01}, f_{02}\} + \frac{1}{2i\alpha} \{g, 0\} - \frac{1}{2i\alpha} \{0, Vg\},$$

где

$$\{f_{01}, f_{02}\} \in \mathbf{D};\ g,\ V_g \in G_{i\alpha};\ \| V_g \| = \| g \|,$$

и, наконец, положить

$$\mathbf{B}\{f_1, f_2\} = \mathbf{A}\{f_{01}, f_{02}\} + \frac{1}{2}\{g, 0\} + \frac{1}{2}\{0, Vg\} \qquad (\mathbf{B} = \mathbf{A}_V).$$

Пусть E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ принадлежащее $\mathbf{B}$ разложение единицы, так что

$$(\mathbf{B}\{f_1, f_2\}, \ \{h_1, h_2\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda\{f_1, f_2\}, \ \{h_1, h_2\}),$$

$$(\{f_1, f_2\} \in \mathbf{D}[\mathbf{B}])$$

$$(\mathbf{B}\{f_1, f_2\}, \ \mathbf{B}\{f_1, f_2\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda\{f_1, f_2\}, \ \{f_1 f_2\}).$$

Как известно, $\mathbf{D}(\mathbf{B})$ есть множество всех пар $\{f_1, f_2\}$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda\{f_1, f_2\}, \ \{f_1, f_2\}) < \infty.$$

Пусть $\mathbf{P}$ есть оператор проектирования на $\{H, 0\}$. Положим

$$(1_1) \qquad f_1 = E_\lambda f,$$

если

$$(1_2) \qquad \{f_1, 0\} = \mathbf{P}E_\lambda\{f, 0\}.$$

Из этого определения следует, что

$$(E_\lambda f, h) = (\{f_1, 0\}, \ \{h, 0\}) = (\mathbf{P}E_\lambda\{f, 0\}, \ \{h, 0\}) = (E_\lambda\{f, 0\}, \ \{h, 0\}),$$

и значит $(E_\lambda f, f)$ есть неубывающая функция от λ, причем

$$E_\lambda^* = E_\lambda; \ E_{\lambda+0} = E_\lambda; \ \lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0; \ \lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda = E.$$

Если $f_0 \in D$, то

$$(\mathbf{A}\{f_0, 0\}, \ \{h, 0\}) = (\mathbf{B}\{f_0, 0\}, \ \{h, 0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda\{f_0, 0\}, \ \{h, 0\}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f_0, \ h),$$

а с другой стороны

$$(\mathbf{A}\{f_0, 0\}, \ \{h, 0\}) = (Af_0, h);$$

поэтому

$$(Af_0, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda f_0, h) \qquad (f_0 \in D).$$

Мы видим также, что

$$(Af_0, Af_0) = (\mathbf{A}\{f_0, 0\}, \mathbf{A}\{f_0, 0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda\{f_0, 0\}, \ \{f_0, 0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f_0, f_0),$$

и значит из $f_0 \in D$ следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f_0, f_0) < \infty.$$

Наоборот, если для некоторого f

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) < \infty$$

и значит

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda\{f, 0\}, \ \{f, 0\}) < \infty,$$

так что

$$\{f, 0\} \in \mathbf{D}(\mathbf{B}),$$

то мы имеем представление

$$\{f, 0\} = \{f_{01}, f_{2}\} + \frac{1}{2i}\{g, 0\} - \frac{1}{2i}\{0, Vg\},$$

где

$$\{f_{01}, f_{02}\} \in \mathbf{D};\ g,\ Vg \in G_i\ (\alpha = 1).$$

Это представление показывает, что

$$f = f_{01} + \frac{1}{2i}g;\ 0 = f_{02} - \frac{1}{2i}Vg,$$

откуда

$$Vg = 0, f_{02} = 0,\ f = f_{01}.$$

Таким образом из (2) следует, что $f \in D$.

Хотя $\mathbf{E}_\lambda$ изменяется вместе с V, E_λ от V не зависит (это и есть введенная А. Плесснером спектральная функция максимального оператора A).

Для доказательства обозначим через $\mathbf{R}_z$ резольвенту оператора $\mathbf{B}$. Мы имеем представление

$$(\mathbf{R}_z\{f_1, f_2\},\ \{h_1, h_2\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d(\mathbf{E}_\lambda\{f_1, f_2\}, \{h_1, h_2\}),$$

откуда ($\alpha > 0$)

$$(\mathbf{R}_{i\alpha}\{f, 0\}, \{h, 0\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - i\alpha}\, d(E_\lambda f, h),$$

и нам остается доказать, что левая часть зависит только от f, h и α (но не от V).

Пусть

$$\mathbf{R}_{i\alpha}\{f, 0\} = \{f_1, f_2\};$$

так как $\{f_1, f_2\} \in \mathbf{D}(\mathbf{B})$ и, следовательно,

$$\{f_1, f_2\} = \{f_{01}, f_{02}\} + \frac{1}{2i\alpha}\{g, 0\} - \frac{1}{2i\alpha}\{0, Vg\},$$

$$\{f, 0\} = (\mathbf{B} - i\alpha\mathbf{E})\{f_1, f_2\} = \mathbf{A}\{f_{01}, f_{02}\} - i\alpha\{f_{01}, f_{02}\} + \{0, Vg\},$$

то

$$Af_{01} - i\alpha f_{01} = f;\ -Af_{02} - i\alpha f_{02} + Vg = 0;$$

$$f_{01} + \frac{1}{2i\alpha}g = f_1;\ f_{02} - \frac{1}{2i\alpha}Vg = f_2,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$f_{01} = (A - i\alpha E)^{-1} f;\quad Vg = 0,\ f_{02} = 0;$$

$$f_1 = f_{01};\quad f_2 = 0$$

и

$$\{f_1, f_2\} = \{(A - i\alpha E)^{-1} f, 0\},$$

а этот вектор зависит только от f и α.

А. Плесснер ввел *отклонение*

$$D_{\lambda,\mu} = E_\sigma - E_\mu E_\lambda \qquad (\sigma = \min\{\lambda, \mu\}).$$

Мы видим, что

$$f_1 = D_{\lambda,\mu} f,$$

если

$$\{f_1, 0\} = \mathbf{P}(\mathbf{E}_\mu \mathbf{E}_\lambda - \mathbf{E}_\mu \mathbf{P} \mathbf{E}_\lambda)\{f, 0\}.$$

Позитивность отклонения (теорема VII первой статьи А. Плесснера) отсюда получается сразу. В самом деле, если $\varphi(\sigma)$ $(-\infty<\sigma<\infty)$ измерима и ограничена, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \varphi(\lambda)\overline{\varphi(\mu)}\,d_\lambda d_\mu(D_{\lambda,\mu}f,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \varphi(\lambda)\overline{\varphi(\mu)}\,d_\lambda d_\mu((\mathbf{E}_\mu\mathbf{E}_\lambda-\mathbf{E}_\mu\mathbf{P}\mathbf{E}_\lambda)\{f,0\},\{f,0\})=$$
$$=(\varphi(\mathbf{B})\{f,0\},\varphi(\mathbf{B})\{f,0\})-(\mathbf{P}\varphi(\mathbf{B})\{f,0\},\varphi(\mathbf{B})\{f_1,0\})\geqslant 0.$$

При построении теории функций от A естественно положить

$$f_1=\varphi(A)f,$$

если

$$\{f_1,0\}=\mathbf{P}\varphi(\mathbf{B})\{f,0\}.$$

Из этого определения следует

$$(\varphi(A)f,h)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E_\lambda f,h).$$

Особую роль играют те функции $\omega(\sigma)$ $(-\infty<\sigma<\infty)$, для которых

$$\omega(\mathbf{B})\{f,0\}\in\{H,0\}.$$

Если $\omega(\sigma)$ такая функция, а $\varphi(\sigma)$ произвольна и если

$$\Theta(\sigma)=\varphi(\sigma)\,\omega(\sigma),$$

то

$$\Theta(A)f=\varphi(A)\,\omega(A)f$$

при условии, что правая часть имеет смысл.

Во второй статье А. Плесснера дано важное достаточное условие принадлежности функции $\omega(\sigma)$ этому особому классу при любом максимальном симметрическом операторе A.

2. Оператор

$$A=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}$$

в $H=L^2(0,\infty)$ является хорошим примером.

Прежде всего заметим, что здесь можно отождествить $\{H,H\}$ с $L^2(-\infty,\infty)$.

В самом деле, если

$$f_1=f_1(t),\ f_2=f_2(t)\in L^2(0,\infty),$$

то за $\{f_1,f_2\}$ можно принять функцию $\mathfrak{f}(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, где

$$\mathfrak{f}(t)=\begin{cases} f_1(t) & (t>0)\\ f_2(-t) & (t<0)\end{cases}$$

D есть множество всех функций $f(t)$ из $L^2(0,\infty)$, которые имеют вид

$$f(t)=\int_0^t f'(t)\,dt,$$

где

$$f'(t)\in L^2(0,\infty).$$

Оператор $\mathbf{A}$ и его область определения задаются следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathfrak{f}=\frac{1}{i}\mathfrak{f}'(t);\quad \mathfrak{f},\mathfrak{f}'\in L^2(-\infty,\infty),\ \mathfrak{f}(0)=0.$$

Мы видим, что

$$\mathbf{A}\mathfrak{f}=\mathbf{A}\{f_1,f_2\}=\{Af_1,\,-Af_2\}.$$

Индексы дефекта оператора $\mathbf{A}$ суть (1, 1).

Решение уравнения

$$\mathbf{A}^* \{f_1, f_2\} = z \{f_1, f_2\} \qquad (Im\, z \neq 0)$$

есть

$$\{f_1, f_2\} = \begin{cases} \{e^{-t}, 0\} & (z = i) \\ \{0, e^{-t}\} & (z = -i) \end{cases}$$

Все самосопряженные расширения оператора $\mathbf{A}$ получаются так: $\mathbf{D}_\varphi$ есть множество всех пар

$$\{f_1, f_2\} = \{f_{01}, f_{02}\} + \frac{1}{2i} \{ce^{-t}, 0\} + \frac{1}{2i} \{0, ce^{i\varphi} e^{-t}\}$$

и

$$\mathbf{A}_\varphi \{f_1, f_2\} = \mathbf{A} \{f_{01}, f_{02}\} + \frac{1}{2} \{ce^{-t}, 0\} - \frac{1}{2} \{0, ce^{i\varphi} e^{-t}\},$$

где

$f_{01}, f_{02} \in D$; $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; φ фиксируется, α — произвольное комлексное число.

Можно сказать, что $\mathbf{D}_\varphi$ есть множество функций $\mathbf{f}(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, которые имеют вид

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0(t) + c\mathbf{g}_\varphi(t),$$

где

$$\mathbf{f}_0(t) = \int_0^t h(t)\, dt \qquad (h(t) \in L^2(-\infty, \infty))$$

$$\mathbf{g}_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2i} e^{-t} (t > 0) \\ \frac{1}{2i} e^{i\varphi} e^{t} (t < 0). \end{cases}$$

Оператор $\mathbf{A}_\varphi$ представляется так:

$$\mathbf{A}_\varphi \mathbf{f} = \frac{1}{i} h(t) + cA_\varphi g_\varphi(t),$$

где

$$\mathbf{A}_\varphi g_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t} & (t > 0) \\ \frac{1}{2} e^{i\varphi} e^{t} & (t < 0). \end{cases}$$

Полагая

$$\Omega(t; \varphi) = \begin{cases} e^{i\varphi} & (t < 0) \\ 1 & (t > 0), \end{cases}$$

находим

$$g_\varphi(t) = g_0(t)\, \Omega(t; \varphi); \quad g_0(t) = g_\varphi(t)\, \Omega(t; -\varphi).$$

Но $\mathbf{D}_0$ есть область определения самосопряженного оператора

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$$

в $L^2(-\infty, \infty)$. Этот оператор имеет разложение единицы

$$\mathbf{E}_\lambda^{(0)} = \mathbf{F}^* \mathbf{J}_\lambda \mathbf{F}.$$

где $\mathbf{F}$ — преобразование Фурье-Планшереля и J_λ дается соотношением

$$J_\lambda h(t) = \begin{cases} h(t) & (t \leqslant \lambda) \\ 0 & (t > \lambda). \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}_\lambda^{(\varphi)} h = \Omega(t; \varphi) \mathbf{F}^* \mathbf{J}_\lambda \mathbf{F} \Omega(t; -\varphi) h(t).$$

При построении спектральной функции E_λ оператора A по формуле (1_2) мы замечаем, что умножение на $\Omega(t; \varphi)$ и $\Omega(t; -\varphi)$ не играет никакой роли, откуда следует, что

$$E_\lambda h = \begin{cases} \mathbf{F}^* \mathbf{J}_\lambda \mathbf{F} h & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0), \end{cases}$$

как это хорошо известно[1].

Литература

А. Плесснер. Доклады А. Н. С. С. С. Р., XXII, 5, 1939.
" " " XXIII, 4, 1939.

[1] После того, как эта заметка была сдана в печать, появился большой мемуар М. Наймарка, в котором среди других результатов имеется результат этой статьи.