ХАРЬКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. ОСОАВИАХИМА

ПРОФЕССОР д-р
АХИЕЗЕР Н. И.

КУРС АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Выпуск 10

ИЗДАНИЕ * ХАИ

§ 1 Введение

До сих пор мы изучали движение несжимаемой жидкости. В этом выпуске мы постараемся несколько пополнить этот пробел и рассмотреть некоторые вопросы динамики сжимаемых жидкостей. При-этом рассмотрении нам придется учитывать тепловые явления, что является новым по сравнению с динамикой несжимаемой жидкости.

Мы примем, что нашей жидкостью является идеальный газ, который, как известно, характеризуется соотношением

$$(1) \qquad p = (c_p - c_v)\,\rho\,\vartheta,$$

где ϑ есть абсолютная температура, а c_p и c_v суть измеренные в механических единицах теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Кроме того мы будем предполагать, что внешние массовые силы отсутствуют.

Что касается вязкости, то ею мы будем также пренебрегать.

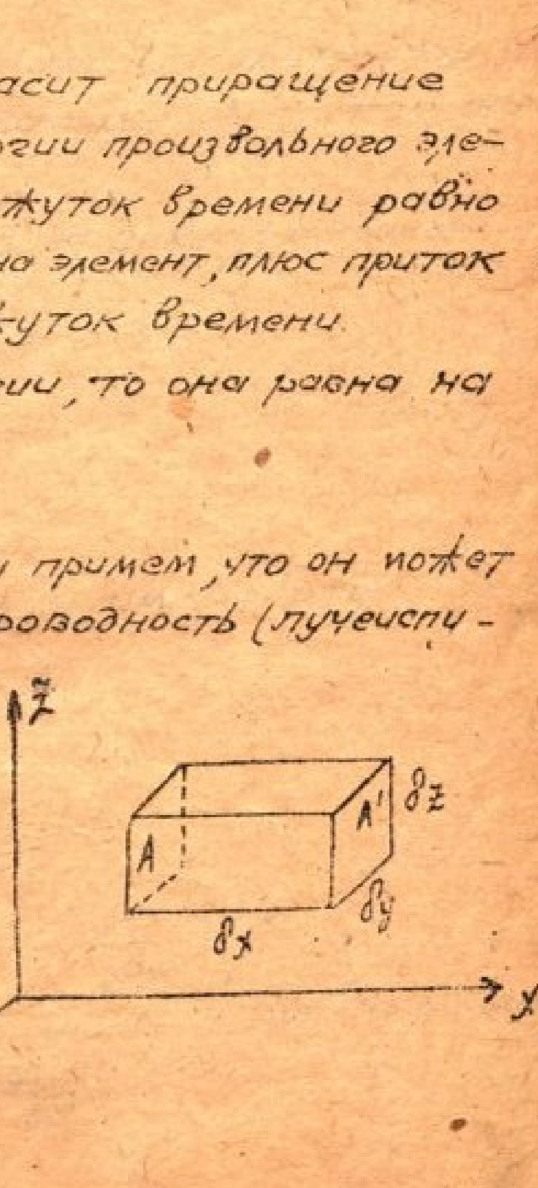
Первое начало термодинамику гласит приращение кинетической плюс внутренней энергии произвольного элемента жидкости за некоторый промежуток времени равно работе внешних сил, действующих на элемент, плюс приток тепла извне за указанный промежуток времени.

Что касается внутренней энергии, то она равна на единицу массы

$$E = c_v\,\vartheta.$$

А относительно притока тепла мы примем, что он может осуществляться только через теплопроводность (лучеиспусканием мы будем пренебрегать).

Применим первое начало к элементу жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами $\delta x, \delta y, \delta z$.



В момент времени t кинетическая энергия рассматриваемого элемента равна

$$\rho\,\delta x.\,\delta y.\,\delta z\,\frac{u^2+v^2+w^2}{2}$$

а внутренняя энергия

$$\rho\,\delta x.\,\delta y.\,\delta z.\,c_v\,\vartheta.$$

Так как $\rho\,\delta x.\,\delta y.\,\delta z$ есть масса нашего элемента, которая при движении элемента остается неизменной, то приращение энергии элемента за время Δt равно

$$\rho.\delta x.\delta y.\delta z.\,\Delta t.\,\frac{d}{dt}\left\{c_v\vartheta+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right\},$$

где производная по t берется, конечно, субстанциальная.

Из сил, действующих на элемент, мы имеем только давление на его поверхность.

На левую стенку действует сила

$$p_A\,\delta y.\,\delta z;$$

направление ее совпадает с направлением положительной оси X-ов, а точкой приложения этой силы мы можем считать точку A.

Точка A за время Δt перемещается на вектор с проекциями

$$u_A\,\Delta t,\; v_A\,\Delta t,\; w_A\,\Delta t$$

Поэтому работа силы, действующей на левую стенку, за время Δt есть

$$\delta y.\,\delta z.\,\Delta t.\,p_A.\,u_A$$

Аналогично для правой стенки получим работу

$$-\delta y.\,\delta z.\,\Delta t.\,p_{A'}.\,u_{A'}.$$

Сумма этих работ

$$\delta y.\,\delta z.\,\Delta t\left\{(pu)_A-(pu)_{A'}\right\}=$$

$$=-\delta x.\,\delta y.\,\delta z.\,\Delta t\,\frac{(pu)_{A'}-(pu)_A}{\delta x}$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна

$$-\delta x.\,\delta y.\,\delta z.\,\Delta t\,\frac{\partial(pu)}{\partial x}$$

Если учесть остальные стенки, то для работы внешних сил получится выражение

$$-\delta x . \delta y . \delta z . \Delta t \left\{ \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right\}.$$

Учтем теперь приток тепла извне. Обозначим через λ коэффициент теплопроводности.

Приток тепла через левую стенку за время Δt равен

$$-\delta y . \delta z . \Delta t \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_A$$

Аналогичная величина для правой стенки есть

$$\delta y . \delta z . \Delta t \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{A'},$$

а сумма этих величин равна

$$\delta x . \delta y . \delta z . \Delta t . \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right).$$

Учитывая остальные стенки, получим для полного притока тепла величину

$$\delta x \, \delta y \, \delta z . \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) \right\}$$

Теперь мы можем составить уравнение энергии. Он имеет вид

$$(2) \qquad \rho \frac{d}{dt}\left\{ c_v \vartheta + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) - \left\{ \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} \right\}.$$

Уравнения (1), (2) и должны быть присоединены к системе

$$(3) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

$$(4) \qquad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

если мы хотим иметь полную систему уравнений движения идеального газа.

Займемся теперь некоторыми преобразованиями уравнения (2).

С этой целью воспользуемся уравнениями (4), которые дают

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{u^2+v^2+w^2}{2} = \rho\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right) = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Отсюда следует, что

$$(5)\qquad \rho\frac{d}{dt}\frac{u^2+v^2+w^2}{2} = -\left\{\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right\}+ +p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

С другой стороны

$$\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z} = p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}$$

А так как в силу (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

то $\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z} = \frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$

Отсюда

$$(6)\qquad \frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z} = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{\partial p}{\partial t}$$

Пользуясь соотношением (5), мы можем представить уравнение (2) в виде

$$(2^{bis})\qquad \rho c_v\frac{d\vartheta}{dt}+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right);$$

а пользуясь соотношением (6), в виде

$$(2^{ter})\qquad \rho\frac{d}{dt}\left\{c_v\vartheta+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Каждое из полученных уравнений позволяет сделать некоторые интересные выводы.

Возьмем в начале уравнение (2^{ter}) и предположим, что движение стационарно, так что $\frac{\partial p}{\partial t}=0$. В этом случае правая часть может быть представлена, как

$$\rho\cdot q,$$

где q есть приток тепла в единицу времени на единицу массы, находящейся в данном месте пространства. Следовательно уравнение (2^{ter}) принимает вид

$$q=\frac{d}{dt}\left\{c_v\vartheta+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right\}.$$

Таким образом притекающее тепло идет на увеличение функции

$$(7)\qquad i=c_v\vartheta+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\frac{p}{\rho}.$$

Следовательно, для стационарного движения при отсутствии притока тепла величина i остается постоянной вдоль каждой линии тока (и приближенно вдоль тонкой трубки тока).

Величину i, определяемую формулой (7) называют тепловой функцией.

Постоянство тепловой функции вдоль линии тока при отсутствии притока тепла и стационарности течения является обобщением теоремы Бернулли.

Если тепловой обмен отсутствует и трения также нет, то движение (стационарное или нестационарное) называется адиабатическим. Уравнение (2^{bis}) для адиабатического случая принимает вид

$$\rho c_v\frac{d\vartheta}{dt}+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

или

$$(2')\qquad \rho c_v\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Заменяя в этом уравнении ϑ на $\frac{1}{c_p-c_v}\frac{p}{\rho}$ и вводя обычное обозначение

$$\frac{c_p}{c_v}=\gamma$$

(для воздуха $\gamma = 1,405$), получим

$$\rho \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

или

$$\rho dp = \gamma p d\rho .$$

Отсюда

(8) $$p = Const. \rho^{\gamma}$$

Так выглядит связь между p и ρ при адиабатическом движении.

Отсюда уже вытекает, что для адиабатического движения

(9) $$\vartheta = Const. \rho^{\gamma-1}$$

Если s есть энтропия на единицу массы, то, как известно,

(10) $$ds = \frac{dE + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\vartheta}$$

Для адиабатического движения

$$dE + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v d\vartheta + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

в силу $(2')$.

Таким образом в случае адиабатического движения энтропия остается постоянной.

Второе начало термодинамики гласит:

всякий происходящий в природе физический или химический процесс протекает в таком направлении, что сумма энтропий всех изменяемых процессом тел не уменьшается.

На основании (1) для идеального газа

$$ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} ,$$

откуда

(11) $$s = s_0 + c_v \ln \frac{p}{p_0} - c_p \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

§2 Скорость звука в покоющейся жидкости.

Рассмотрим движение в одном измерении, реализуемое, например, в узкой бесконечно длинной цилиндрической трубе, наполненной жидкостью. Мы примем, что плотность ρ есть функция от одного давления p. Уравнения движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

так как

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Мы имеем таким образом нелинейную систему для нахождения двух функций u, ρ. В следующем параграфе мы точно решим эту систему в предположении, что u есть функция от одного ρ.

Без каких либо предположений нашу систему решить не удается.

В настоящем параграфе мы заменим подлежащие решению нелинейные уравнения некоторыми линейными уравнениями, которые будут описывать движение уже не точно, а приближенно.

Этот переход к линейной системе (линеаризацию) совершим с помощью следующих предположений:

1) сама скорость u и ее производная по x малы, но производная от u по t не мала, так что членом $u\frac{\partial u}{\partial x}$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial u}{\partial t}$;
2) производная от ρ по x мала, и членом $u\frac{\partial \rho}{\partial x}$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial \rho}{\partial t}$
3) величина $\frac{dp}{d\rho}$ в различных точках почти постоянна и может быть заменена ее значением на бесконечность, где жидкость покоится, т.е. величиной

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0=a_0^2.$$

В силу сделанных нами предположений наша система заменится следующей:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Удобнее эту систему записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \rho = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \log \rho$$

Дифференцируя первое уравнение по x, а второе по t и умножая первое уравнение на a_0^2, найдем после вычитания, что

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Это уравнение позволяет определить u, после чего ρ найдется с помощью уравнения

(2) $$\frac{\partial}{\partial t} \log \rho = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Прежде чем интегрировать полученную линейную систему, выясним, какой смысл имеет для механики решение этой системы.

Приведенные нами условия удовлетворяются с большой точностью в следующем случае.

Пусть жидкость в трубе первоначально покоится.

Затем в некоторый момент времени в некоторой точке жидкости происходит внезапное возмущение, например, внезапное уплотнение.

Это возмущение вызовет некоторое движение в жидкости, причем частицы жидкости будут совершать какие-то малые колебания около своих первоначальных положений, так что рассматриваемое движение достаточно хорошо описывается линеаризованной системой уравнений (1), (2).

В первый момент колебания будут совершать только

те частицы, которые находятся в непосредственной близости от места, где произошло возмущение.
Но затем колебаниями будут охватываться все новые и новые частицы, и мы получим некоторое волновое движение вдоль трубы.

Рассмотрение уравнений (1), (2) позволит нам изучить это волновое движение, в частности - найти скорость распространения волн.

Принимая во внимание, что звук есть как раз распространение подобных волн, мы заключаем, что решение уравнений (1), (2) должно позволить нам найти скорость звука в нашей жидкой среде.

Для интегрирования уравнения (1) перейдем от переменных t, x к новым переменным.

$$x_1 = x - a_0 t\,;\quad x_2 = x + a_0 t.$$

Всякая функция от x и t представится как функция от x_1 и x_2:

$$\varphi(x,t) = \psi(x_1, x_2).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

и значит

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = a_0\frac{\partial}{\partial x_2} - a_0\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Далее

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = a_0^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right\}.$$

С помощью этих соотношений уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Иначе говоря

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Это значит, что $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ от x_1 не зависит, то-есть является функцией (и притом произвольной) от x_2

Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = f_2'(x_2).$$

Интегрирование дает

$$u = C + f_2(x_2),$$

где C от x_2 не зависит, т.-е. есть произвольная функция от x_1. Итак

$$u = f_1(x_1) + f_2(x_2),$$

где f_1 и f_2 означают совершенно произвольные функции, которые должны быть определены в каждом конкретном случае из начальных условий.

Возвращаясь к старым переменным, получим, что

$$u = f_1(x - a_1 t) + f_2(x + a_0 t)$$

Чтобы понять результат, который мы получили, рассмотрим частный случай, когда $f_2 \equiv 0$. В этом случае

$$u = f_2(x - a_0 t).$$

Возьмем какое-нибудь число ξ и положим

$$\xi = x - a_0 t$$

Если

$$\eta = f_1(\xi),$$

то скорость u будет иметь значение η в различные моменты времени t в различных точках x, причем эти значения x связаны с соответствующими значениями t равенством

$$x - a_0 t = \xi.$$

Можно сказать, что точка x должна двигаться, чтобы скорость в ней все время была равна η.

Скорость, с которой точка x должна двигаться равна

$$\frac{dx}{dt} = a_0 ,$$

как это непосредственно вытекает из равенства

$$x = a_0 t + \xi .$$

Итак частному решению

$$u = f_1 (x - a_0 t)$$

отвечает волна, распространяющаяся в сторону положительных x-ов со скоростью a_0. Равным образом решение

$$u = f_2 (x + a_0 t)$$

дает волну, распространяющуюся в сторону отрицательных x-ов с тою же скоростью.

$$a_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}$$

есть таким образом скорость звука в нашей среде.

Сделаем подсчет для воздуха, принимая вначале, что температура остается постоянной, т. е., что

$$p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0}$$

Из этой формулы следует, что

$$(3) \qquad a_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$$

Подставляя численные значения для температуры 0°C:

$$p_0 = 76 . 13,6 . 981 , \quad \rho_0 = 0,00129$$

найдем, что

$$a_0 = 280 \frac{mt}{sec}$$

Этот результат с опытами не согласуется, так как опыты дают

$$a_0 = 333 \frac{mt}{sec}$$

Величину $\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$ принято называть Ньютоновою скоростью звука в воздухе.

Причину расхождения формулы (3) с опытом выяснил

Лаплас. Он первый понял, что при определении скорости звука нужно исходить из адиабатического закона

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

так как в явлении распространения звука мы имеем дело с быстрыми колебаниями, и тепловой обмен не успевает совершаться.

При адиабатическом законе

$$\frac{dp}{d\rho} = p_0 \frac{1}{\rho_0} \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

и значит

$$a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

При прежних значениях величин p_0 и ρ_0 мы получим теперь, что

$$a_0 = \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = 332 \frac{mt}{sec},$$

а это значение с опытом согласуется, как нельзя лучше.

§ 3. Местная скорость звука.

Рассмотрим снова вопрос о движении сжимаемой жидкости в бесконечно-длинной цилиндрической трубе, но примем, что сделанные в предыдущем параграфе пренебрежения недопустимы. Так как без каких-либо дополнительных предположений точную систему уравнений движения решить не удается, то и на этот раз мы сделаем некоторое предположение. А именно, примем, что не только p но и скорость u есть функция от одного ρ, где ρ уже есть функция от x и t.

В силу этого предположения наша система уравнений принимает вид

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{du}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$(2) \qquad \rho\frac{du}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u\frac{du}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

причем p есть заданная функция от ρ.

Ищется u, как функция от ρ, и ρ, как функция от x и t.

Определяя из уравнения (1) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и подставляя в уравнение (2), мы находим после некоторых упрощений, что

$$\rho^2\left(\frac{du}{d\rho}\right)^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

откуда

$$(3') \qquad \rho\frac{du}{d\rho} = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

и значит

$$(3) \qquad u = \pm\int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\,\frac{d\rho}{\rho},$$

где ρ_0 есть давление в той точке, в которой скорость равна нулю. Уравнение (3) позволяет найти u в функции от ρ.

Чтобы затем найти ρ в функции от x и t, мы имеем уравнение

$$(4) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left[u \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right] = 0,$$

которое получается из (1) в силу (3').

Не останавливаясь на задаче интегрирования уравнения (4), постараемся понять смысл этого уравнения.

Для определенности возьмем перед радикалом верхний знак:

$$(4') \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\left[u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right] = 0.$$

В данной точке x плотность (а значит и давление и скорость) с течением времени будет меняться. Поставим вопрос, с какой скоростью должна двигаться в момент времени t точка x, чтобы в этой точке x плотность ρ оставалась постоянной в течение бесконечно-малого промежутка времени (а не всегда, как это требовалось в §2).

Наше условие гласит:

$$\rho = \rho(t, x(t)), \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Искомая скорость точки x найдется из условия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0$$

Сравнивая это уравнение с (4'), мы получаем, что

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Итак, $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ есть искомая скорость точки x, но не относительно трубы, а относительно движущегося газа.

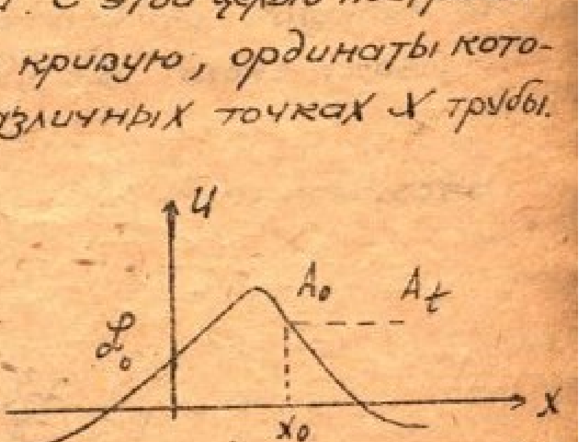
В силу соображений §2 величина

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

поэтому также представляет некоторую скорость звука. Ее называют местной скоростью звука. Величина a была бы скоростью звука в смысле §2, если бы в невозмущенном состоянии жидкости давление было p и плотность была ρ (а не p_0 и ρ_0).

§4. Графическое изображение полученных результатов

Для большей наглядности изобразим результаты последних двух параграфов графически. С этой целью построим для начального момента времени кривую, ординаты которой суть значения скорости u в различных точках x трубы. Эта кривая ($\mathcal{L}_0$) представлена на чертеже (а).



(а)

Для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с прямой волной, которая распространяется в сторону положительных x-ов.

Рассмотрим в начале линеаризованную задачу. Возьмем в начальный момент времени некоторую точку x_0, которой отвечает на кривой $\mathcal{L}_0$ точка A_0 с ординатой u_0.

В момент времени t скорость u будет иметь значение u_0 уже в точке

$$x = x_0 + a_0 t.$$

Чтобы построить соответствующую точку кривой $\mathcal{L}_t$, являющейся к моменту времени t положением кривой $\mathcal{L}_0$, очевидно, нужно точку A_0 сместить вправо на отрезок $A_0 A_t = a_0 t$. Так как этот отрезок одинаков для всех точек кривой $\mathcal{L}_0$, то кривая $\mathcal{L}_t$, дающая распределение скоростей в момент времени t, есть та же кривая $\mathcal{L}_0$, только смещенная вправо на некоторый отрезок. Таким образом начальная кривая перемещается без всякого искажения.

Иначе обстоит дело в случае волн конечной (а не бесконечно малой) амплитуды, которые мы рассматривали в § 3.

Метод построения остается прежний, но для получения кривой $\mathcal{L}_{t+\Delta t}$ по кривой $\mathcal{L}_t$ точку A_t придется смещать на величину

$$\Delta x = (u+a)\Delta t,$$

а величина

$$u+a = u+\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\,\frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

есть некоторая функция от ρ или, что то же, от u; следовательно, каждая точка кривой $\mathcal{L}_t$ получает свое смещение, и поэтому кривая $\mathcal{L}_t$ не только перемещается, но и деформируется.

Рассмотрим подробнее случай адиабатического движения:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

В этом случае

$$u = a_0 \frac{2}{\gamma-1}\left\{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right\}$$

$$a = a_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

и значит

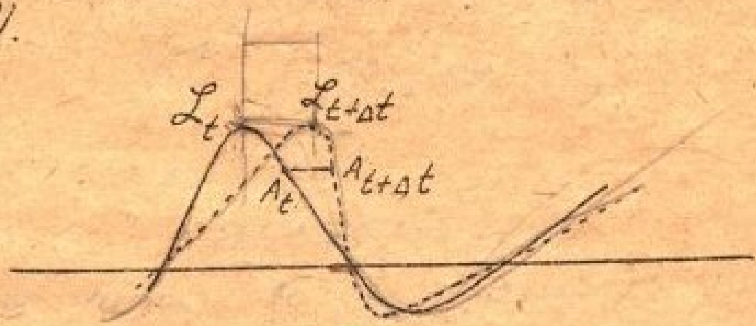
$$u + a = -\frac{2a_0}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} =$$

$$= -\frac{2a_0}{\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{2}\left[u \qquad + a_0 \frac{2}{\gamma-1}\right] =$$

$$= \frac{\gamma+1}{2} u \qquad + a_0$$

Мы видим, что смещение состоит из двух частей: одна - на величину $a_0 \quad \Delta t$ - не искажает кривой, а другая - на величину $\frac{\gamma+1}{2} u \Delta t$ - будет, очевидно, кривую деформировать. Так как мы хотим проследить деформацию, то мы можем переноса не рассматривать.

Смещая точку A_t с ординатой u на величину $\frac{\gamma+1}{2} u \Delta t$, мы замечаем что смещение будет тем больше, чем больше (u). Поэтому та часть кривой $\mathcal{L}_t$, на которой скорость убывает с увеличением x, становится более крутой (чертеж (в)).



(в)

Мы видим, что по прошествии некоторого промежутка времени наиболее крутая часть кривой примет вертикальное положение. В этот момент в соответствующей точке x скорость будет иметь некоторый разрыв. Описанный процесс далее уже применять нельзя.

Важное заключение, к которому мы пришли, состоит в том, что в случае волн конечной амплитуды, даже если в начальный момент скорость была непрерывна, с течением времени образуются разрывы непрерывности, вернее говоря, образуются области чрезвычайно быстрого изменения скорости (и плотности). Эти области называют скачками уплотнения.

§5. Интеграл Бернулли.

Для стационарного адиабатического движения (при отсутствии внешних массовых сил) вдоль каждой линии тока имеет место равенство

$$\frac{\mathcal{V}^2}{2}+c_v\vartheta+\frac{p}{\rho}=Const \qquad (\mathcal{V}^2=u^2+v^2+w^2),$$

как мы это показали в §1.

Так как

$$c_v\vartheta=\frac{1}{\gamma-1}\,\frac{p}{\rho},$$

то

$$c_v\vartheta+\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p}{\rho}$$

Поэтому написанное нами уравнение можно записать так

$$(1)\qquad \frac{\mathcal{V}^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p}{\rho}=Const\ ;$$

оно совпадает с уравнением Бернулли

$$(1^{bis})\qquad \frac{\mathcal{V}^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=Const,$$

так как

$$p=const\ \rho^{\gamma}.$$

Обозначая через ρ_0, p_0 плотность и давление в том месте, где скорость $\mathcal{V}$ равна нулю, мы можем уравнение (1) переписать в виде

$$(2)\qquad \frac{\mathcal{V}^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}$$

Вводя скорость звука

$$a_0=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}},$$

придадим уравнению (2) форму

$$(3_1).\qquad \mathcal{V}^2=\frac{2a_0^2}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\right\}$$

или форму

$$(3_2)\qquad \mathcal{V}^2=\frac{2a_0^2}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}.$$

Для решения конкретных задач о движении газа в трубках кроме уравнения Бернулли (3_1) или (3_2) необходимо еще одно уравнение, а именно, уравнение неразрывности для трубки тока или, как его часто называют, уравнение расхода для трубки тока.

Обозначим через S длину дуги вдоль центральной линии тока нашей трубки. Тогда ρ, V и площадь поперечного сечения трубки, которую мы обозначим через σ, суть функции от S.

Но произведение

$$M = \rho V \sigma,$$

выражающее массу газа, проходящую через сечение σ в единицу времени, есть некоторая константа (вдоль трубки тока), которую и называют расходом.

Из сказанного вытекает, что

$$\log\rho + \log V + \log\sigma = Const.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds} + \frac{1}{V}\frac{dV}{ds} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = 0. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь тем, что в силу уравнения (1^{bis})

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{ds};$$

а также тем, что

$$\frac{dp}{ds} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{ds} = a^2\frac{d\rho}{ds},$$

где a - местная скорость звука.

В силу этих соотношений (4) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds} + \frac{a^2 - V^2}{a^2 V}\frac{dV}{ds} = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) вытекает важное следствие: если трубка тока в некотором сечении сужается (т.е. $\frac{d\sigma}{ds} < 0$) и если в этом сечении скорость газа меньше (соответственно, больше) чем местная скорость звука, то в этом сечении скорость V возрастает (соответственно, убывает).

Поэтому если трубка сужается до некоторого минимального сечения σ_{min}, а затем расширяется, то дозвуковой поток может перейти в сверхзвуковой; нужно только, чтобы увеличивающаяся в сужающейся части дозвуковая скорость в сечении σ_{min} сделалась равной местной скорости звука в этом сечении. Это значение скорости называют критическим значением и обозначают через a_*.

На указанном замечании основано действие сопла Лаваля, которое служит для получения сверхзвуковых потоков.

Покажем, как найти критическую скорость. Обозначая отвечающее ей давление через p_* (критическое давление), мы должны в (3_2) заменить v^2 на

$$a_*^2 = \gamma \frac{p_*}{\rho_*} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = a_0^2 \left(\frac{p_*}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

и p на p_*. Мы получим уравнение

$$\left(\frac{p_*}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma-1}\left\{1 - \left(\frac{p_*}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\},$$

откуда

$$p_* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0{,}527 p_0 .$$

Следовательно

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = 0{,}911 a_0 .$$

Мы не будем останавливаться на детальном рассмотрении явления истечения газа из котла через насадок. Отметим только, что в этом вопросе приходится учитывать довольно сложные процессы, связанные с разными потерями в насадке а таких потерь при составлении уравнения Бернулли мы не предполагали.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о том, при каких скоростях является уже необходимым учет сжимаемости воздуха в авиации.

Будем исходить из того, что истинное течение регулируется уравнением Бернулли (3_2), которое мы перепишем в виде

$$p = p_0 \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{a_0^2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Разлагая правую часть в ряд, получим

$$p = p_0 \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_0^2} + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{v^2}{a_0^2} \right)^2 - \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} \left(\frac{v^2}{a_0^2} \right)^3 + \dots \right\}$$

Это разложение, конечно, справедливо при

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{a_0^2} < 1.$$

Если скорости достаточно малы, то в написанном разложении можно ограничиться только двумя членами, что даст

$$p \doteq p_0 \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{a_0^2} \right\}$$

или

$$p = p_0 - \frac{\rho_0 v^2}{2},$$

но это есть как раз уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости (с постоянной плотностью ρ_0).

Ясно, что при больших скоростях v указанная приближенная замена точного уравнения уже не всегда допустима.

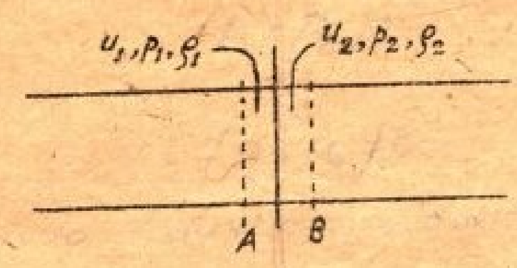
Например, при $v = \frac{a_0}{2}$ (для воздуха это составляет приблизительно 600 клм в час, что в современной авиации достигается) наша замена состоит в отбрасывании членов порядка

$$p_0 \frac{\gamma}{8} \left(\frac{v^2}{a_0^2} \right)^2 \approx \frac{1}{16} \frac{\rho_0 v^2}{2}$$

т.е. величин, составляющих более 6% от учитываемой величины $\frac{\rho_0 v^2}{2}$.

Этот подсчет даст некоторые указания относительно того, когда в авиации можно считать воздух несжимаемым, и когда сжимаемость учитывать необходимо.

§6 Скачки уплотнения. В области скачка уплотнения выведенные нами ранее дифференциальные уравнения непригодны. Поэтому мы должны заново составить уравнения, относящиеся к скачку. По прежнему будем рассматривать движение в цилиндрической трубе, т.е. задачу в одном измерении. Предположим, что мы имеем плоскость разрыва, при переходе через которую слева направо скорость, давление и плотность изменяются скачком от значений u_1, p_1, ρ_1 к значениям u_2, p_2, ρ_2



Пусть плоскость разрыва имеет скорость c.

Будем рассматривать движение газа относительно плоскости разрыва, тогда скорость слева будет

$$v_1 = u_1 - c,$$

а справа

$$v_2 = u_2 - c.$$

Так как в единицу времени проходит одна и та же масса газа через всякое сечение трубы, то

$$(1) \qquad \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

Это есть первое соотношение между введенными нами величинами.

Примем для определенности, что $v_1 > 0$ *) и обозначим

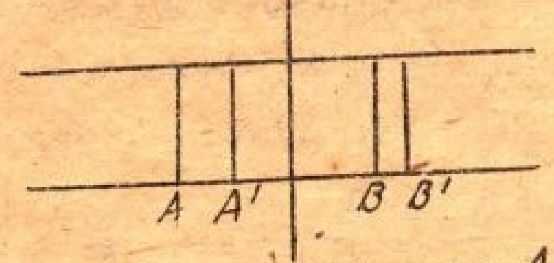
$$(2) \qquad m = \rho_1 v_1 ;$$

это есть масса газа, проходящая в единицу времени через единицу площади сечения трубы, то-есть удельный расход газа.

Обозначим площадь сечения трубы через σ и возьмем два сечения трубы A, B по разные стороны от плоскости разрыва и достаточно близко от нее

*) значит и $v_2 > 0$.

Пусть по прошествии бесконечно-малого промежутка времени δt, в течение которого движение газа относительно плоскости разрыва можно считать стационарным, плоскости A, B заняли положения A', B'.



На заключенную между сечениями A и B массу газа действовала сила

$$(p_1 - p_2)\sigma .$$

Ее импульс

$$\delta t \cdot (p_1 - p_2)\sigma$$

равен приращению количества движения рассматриваемой массы газа.

На количество движения газа, заключенного между сечениями A', B не изменилось. Значит указанный импульс равен количеству движения газа, заключенного между сечениями B, B', минус количество движения газа, заключенного между сечениями AA'.

За время δt через сечения трубы проходит масса газа

$$\sigma . m . \delta t .$$

Это есть масса газа, заключенного между сечениями A, A', а также между сечениями B, B'

Таким образом

$$\sigma m \delta t (v_2 - v_1) = \delta t (p_1 - p_2)\sigma$$

или

$$p_1 - p_2 = m(v_2 - v_1) \tag{3}$$

Это - второе соотношение.

Третье соотношение мы получим из того, что труба теплоизолирована, а процесс стационарен относительно плоскости разрыва, записавши, что энергия кинетическая плюс энергия внутренняя массы газа $A'B'$ минус эта сумма для массы AB равна работе сил давления в сечениях A, B, т. е. равна

$$(p_1 v_1 - p_2 v_2)\,\sigma\,.\,\delta t.$$

Что бы ни происходило в плоскости разрыва, поскольку мы приняли стационарность течения относительно плоскости разрыва, указанная разность энергий равна энергии массы BB' минус энергия массы AA', то-есть

$$m\sigma\,\delta t\left\{\frac{v_2^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{v_1^2}{2}-\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\right\}$$

Итак, уравнение энергии имеет вид

$$(4)\qquad \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{m} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

Его называют формулой Ранкина.

С помощью (3) формулу (4) можно переписать в виде

$$\frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{m} = \frac{(v_1+v_2)(p_1-p_2)}{2m}+\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

После некоторых упрощений это соотношение можно в силу (1) и (2) представить еще так

$$(5)\qquad \frac{1}{2}(p_1+p_2)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right).$$

Соотношения (1), (2), (3), (5) позволяют найти c, p_2, ρ_2, если известны u_1, p_1, ρ_1, u_2.

Решая уравнения (1), (2), (3) относительно v_1, v_2, найдем, что

$$(6)\qquad v_1=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_1-p_2}{\rho_1-\rho_2}}\,,\quad v_2=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_1-p_2}{\rho_1-\rho_2}}\,.$$

Так как мы приняли, что $v_1>0$, $v_2>0$, то $c<u_1$, $c<u_2$, и значит плоскость разрыва относительно движущегося газа перемещается в сторону отрицательных x-ов, а газ относительно плоскости разрыва движется в сторону положительных x-ов.

A priori мыслимы два случая: $\rho_1<\rho_2$ и $\rho_1>\rho_2$. В первом случае плотность газа при переходе (в направлении движении газа относительно плоскости разрыва, то-есть в нашем случае при переходе слева направо) через плоскость разрыва увеличивается, а во втором случае она уменьшается. Поэтому первый случай можно назвать скачком уплотнения, а второй – скачком разрежения. Эти же случаи возможны и при $v_1<0$, $v_2<0$, когда плоскость разрыва относительно газа перемещается в сторону положительных x-ов.

Докажем теперь, что при $v_1>0$, $v_2>0$ будет обязательно $\rho_1<\rho_2$.

Этим будет доказано, что скачки разрежения не могут существовать, и тем самым будет оправдан термин „скачки уплотнения", который мы с самого начала ввели для рассматриваемых разрывов.

Для доказательства применим второе начало термодинамики. Поскольку между сечениями A', B состояние не меняется, то приращение энтропии тел принимающих участие в процессе равно энтропии $S_{BB'}$ массы газа между сечениями B, B' минус энтропия $S_{AA'}$ массы газа между сечениями A, A'.

В силу формулы (11) § 1

$$S_{BB'}-S_{AA'}=c_v\ln\frac{p_2}{p_1}-c_p\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

С другой стороны из (5) следует, что

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{p_1}-\frac{\rho_2}{\rho_2}\right)$$

откуда

$$\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=\ln\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_2}{p_2}+1}{\frac{p_2}{p_1}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Поэтому

$$\frac{1}{c_v}(S_{BB'}-S_{AA'})=\ln\frac{p_2}{p_1}-\gamma\ln\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_2}{p_1}+1}{\frac{p_2}{p_2}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}=F\left(\frac{p_2}{p_1}\right),$$

где

$$F(\lambda) = \ln\lambda - \gamma \ln \frac{(\gamma+1)\lambda + (\gamma-1)}{(\gamma-1)\lambda + (\gamma+1)} .$$

Согласно второму началу термодинамики должно иметь место неравенство

$$F\left(\frac{p_2}{p_1}\right) > 0 .$$

Исследуем ход функции $F(\lambda)$.

Прежде всего мы замечаем, что

$$F(1) = 0$$

Далее, дифференцирование дает

$$F'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)\lambda + (\gamma-1)} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma-1)\lambda + (\gamma+1)} =$$

$$= \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)(\lambda-1)^2}{\lambda\{(\gamma+1)\lambda + (\gamma-1)\}\{(\gamma-1)\lambda + (\gamma+1)\}}$$

Мы рассматриваем только положительные значения λ, а для этих значений в силу полученной формулы $F'(\lambda) > 0$. Значит функция $F(\lambda)$ возрастает при увеличении λ. А так как $F(1) = 0$, то $F(\lambda) > 0$ при $\lambda > 1$ и $F(\lambda) < 0$ при $\lambda < 1$.

Условие

$$F\left(\frac{p_2}{p_1}\right) > 0$$

может, следовательно, выполниться только при $p_2 > p_1$.

Но если $p_2 > p_1$, то и $\rho_2 > \rho_1$. Таким образом наше утверждение доказано.

§7. Задача Прандтля - Маиера

Желая рассмотреть некоторые случаи плоского течения газа, выведем необходимые уравнения в полярных координатах. Собственно говоря, нам понадобятся только уравнение неразрывности, уравнение отсутствия вихрей и уравнение Бернулли. Все эти уравнения у нас уже встречались, но не представляет никакого труда вывести их заново.

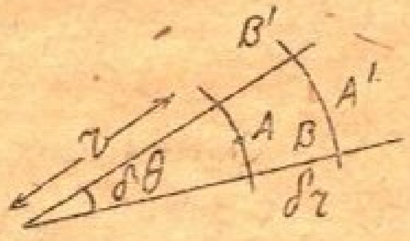
Обозначим радиус вектор через r, полярный угол через θ, проекцию скорости на радиус вектор через v_r и проекцию на перпендикулярное направление через v_s.

Принимая адиабатический закон и стационарность течения, мы имеем уравнение Бернулли в виде

$$(1)\qquad \frac{v_r^2+v_s^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0},$$

где p_0, ρ_0 относятся к точке, в которой скорость равна нулю.

Взявши элементарный (криволинейный) прямоугольник со сторонами δr, $r\delta\theta$ (см. чертеж), выведем обычным образом уравнение неразрывности и уравнение отсутствия вихрей (циркуляция равна нулю).



Мы получаем

$$(\rho v_r r)_A\,\delta\theta-(\rho v_r r)_{A'}\,\delta\theta+(\rho v_s)_B\,\delta r-(\rho v_s)_{B'}\,\delta r=0$$

$$(v_r)_B\,\delta r-(v_r)_{B'}\,\delta r+(v_s r)_{A'}\,\delta\theta-(v_s r)_A\,\delta\theta=0,$$

откуда

$$(2)\qquad \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_s)}{\partial\theta}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial(r v_s)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}=0.$$

(2) есть уравнение неразрывности, а (3) - уравнение отсутствия вихрей.

Отметим, что выведенные уравнения не зависят от того, в какую сторону отсчитывается угол θ. Нужно только чтобы это направление соответствовало положительному направлению для тангенциальной скорости v_s.

Поставим себе теперь задачу найти такое решение уравнений (1), (2), (3), для которого все величины v_r, v_s, ρ зависят только от θ

При сделанном условии

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial v_s}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$$

уравнения (2), (3) принимают вид

$$(4) \qquad \rho v_r + v_s \frac{d\rho}{d\theta} - \rho \frac{dv_s}{d\theta} = 0$$

$$(5) \qquad v_s = \frac{dv_r}{d\theta}$$

Дифференцируя (1) по θ, получаем

$$v_r \frac{dv_r}{d\theta} + v_s \frac{dv_s}{d\theta} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-2} \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

или

$$(6) \qquad v_r \frac{dv_r}{d\theta} + v_s \frac{dv_s}{d\theta} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-2} \frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

В силу (5) уравнение (6) принимает вид

$$v_s\left[v_r + \frac{dv_s}{d\theta}\right] + \frac{a_0^2}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

Умножая это уравнение на ρ и учитывая (4), получим, что

$$(7) \qquad v_s^2 = a_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = a^2$$

В силу этого уравнения из (1) следует, что

$$(8) \qquad v_r^2 = \frac{2}{\gamma-1} a_0^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

Исключая из (7) и (8) плотность ρ, получаем, что

$$v_r^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v_s^2 = \frac{2}{\gamma-1} a_0^2 .$$

На основании (5) это принимает вид

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{dv_r}{d\theta}\right)^2 + v_r^2 = \frac{2}{\gamma-1} a_0^2 .$$

Это уравнение легко проинтегрировать.
Его общий интеграл есть

(9) $$v_r = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\, a_0 \sin\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0),$$

где θ_0 – произвольная постоянная.
В силу (5)

(10) $$v_s = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\, a_0 \cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0),$$

а на основании (7)

(11) $$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma+1}\cos^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0),$$

так что

(12) $$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cos^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0).$$

Остается найти уравнение линий тока.
Дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r\,d\theta}{v_s}$$

Следовательно,

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\;\frac{\sin\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0)}{\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta-\theta_0)}\,d\theta,$$

откуда

$$\log r = -\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\log\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0) + \log r_0$$

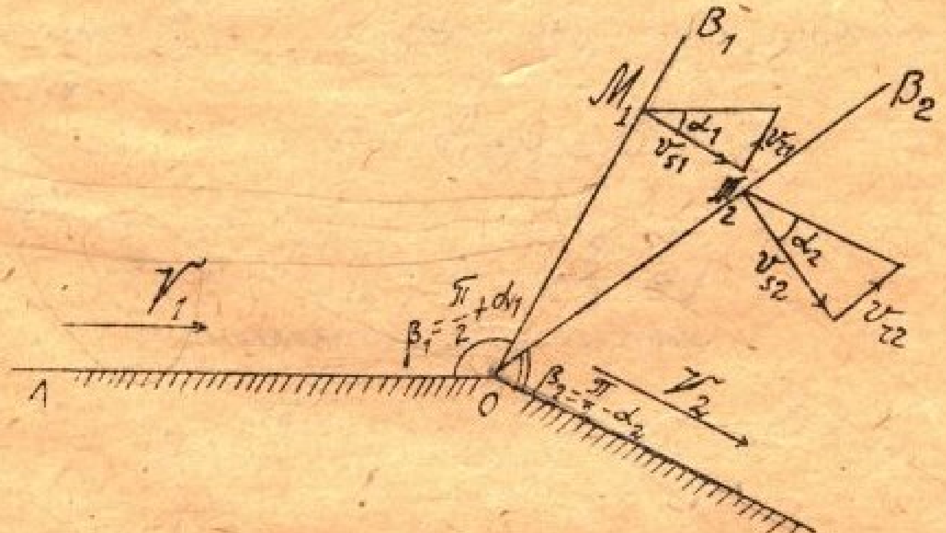
так что

$$r = r_0\left[\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta+\theta_0)\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},$$

где r – вторая произвольная постоянная.
Выведенные формулы были впервые получены Прандтлем при решении задачи о стационарном обтекании острого угла сверхзвуковым потоком. Картина обтекания такова.

Картина обтекания такова: газ движется вдоль плоской стены AO с постоянной сверхзвуковой скоростью V_1, имея плотность ρ_1 и находясь под давлением p_1; в точке O внезапно изменяется направление стены, причем занятой потоком области AOC отвечает угол, больший $180°$; принимается, что первоначальные значения скорости, плотности и давления сохраняются до некоторого луча OB_1, а новые (V_2, ρ_2, p_2), которые наперед неизвестны, начинаются с некоторого луча OB_2, причем в области B_2OC течение носит характер аналогичный течению до луча OB_1, то-есть скорость V_2 постоянна и параллельна новому направлению стены; в угле B_1OB_2, величина и положение которого наперед неизвестны, происходит непрерывное изменение старого потока в новый.

Примем, что течение в угле B_1OB_2 происходит в соответствии с формулами (9), (10), (11) и (12).



В точках луча OB_1 (например в точке M_1) скорость равна V_1, значит для луча OB_1

$$(14_1) \qquad v_{r1}^2 + v_{s1}^2 = V_1^2$$

а с другой стороны в силу (9) и (10)

$$(14_2) \qquad (\gamma-1)\, v_{r1}^2 + (\gamma+1)\, v_{s1}^2 = 2a_0^2$$

Решая уравнения (14_1) и (14_2), находим, что

$$(15_1) \qquad v_{s1}^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} V_1^2$$

$$v_{r1}^2 = \frac{\gamma+1}{2} V_1^2 - a_0^2$$

Это позволяет найти угол α_1, а вместе с тем и угол наклона луча B_1, равный

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

А именно

$$(15_2) \qquad tg\alpha_1 = \frac{(\gamma+1)V_1^2 - 2a_0^2}{2a_0^2 - (\gamma-1)V_1^2}$$

Будем отсчитывать полярный угол от луча OB_1 и притом по часовой стрелке, так что для луча OB_1: $\theta=0$.
Отсюда мы находим в силу (9), (10), что

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\theta_0\right) = tg\alpha_1 .$$

Так как угол α_1 уже известен, то произвольная постоянная θ_0 найдена.
Обозначая угол B_1OB_2 через δ, будем иметь:

$$(16) \qquad \frac{v_{r_2}}{v_{s_2}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(\delta+\theta_0)\right] = tg\alpha_2 = ctg\,\beta_2 .$$

Но величина $\beta_1+\delta+\beta_2$ нам известна, равна как и β_1
Полагая

$$\beta_1+\delta+\beta_2 = \omega ,$$

так что

$$\beta_2 = \omega - \delta - \beta_1 = \omega - \delta - \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

находим для определения δ систему

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left\{\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(\delta+\theta_0)\right\} + tg(\omega-\delta-\alpha_1) = 0$$

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\theta_0\right) = tg\alpha_1$$

$$tg\alpha_1 = \sqrt{\frac{(\gamma+1)V_1^2 - 2a_0^2}{2a_0^2 - (\gamma-1)V_1^2}} = \sqrt{\frac{V_1^2 - a_1^2}{a_1^2}}$$

Решение этой системы на практике не представляет труда, если пользоваться графиками, дающими угол α_1 в функции от отношения V_1 к a_0 и угол λ как функцию от μ, где

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\lambda\right) = tg\mu .$$

Аналогично решается задача об обтекании стены, которая внезапно обрывается в точке O. Здесь идет речь о газе, который вырывается во внешнее пространство, где задано давление P_2 $(<P_1)$.

Формулы

$$tg\,\alpha_1=\sqrt{\frac{(\gamma+1)v_1^2-2a_0^2}{2a_0^2-(\gamma-1)v_1^2}}$$

$$tg\,\alpha_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\;tg\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\theta_0\right)$$

остаются в силе и здесь.

Роль известного угла ω будет теперь играть известное давление P_2 вдоль OC.

В силу (12)

$$\frac{P_1}{P_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\cos^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\theta_0\,,$$

$$\frac{P_2}{P_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\cos^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta_0+\delta),$$

откуда

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}=\frac{\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta_0+\delta)}{\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\theta_0}\,.$$

Это уравнение служит для нахождения угла δ.

В частности, если $P_2=0$, то

$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,(\theta_0+\delta)=\frac{\pi}{2}$$

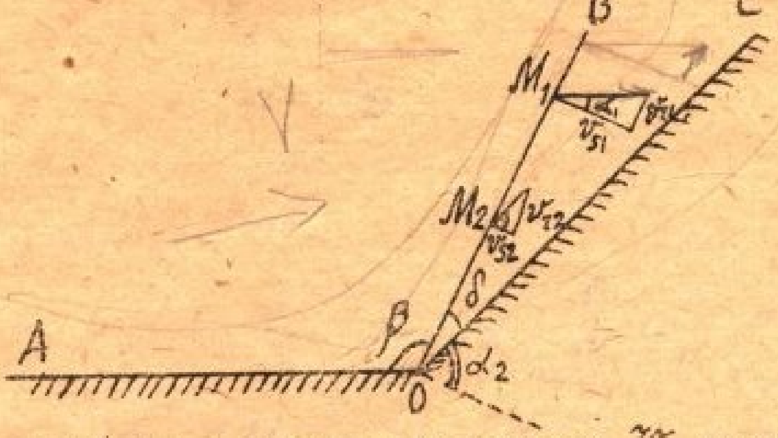
и значит

$$tg\,\alpha_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\;ctg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\delta\,.$$

Из (16) и (10) следует, что v_s равно нулю на луче CB_2, т.е. OB_2 совпадает с OC.
Значит угол отклонения ψ равен

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha_2 + \delta - \pi = \alpha_1 + \delta - \frac{\pi}{2}.$$

§ 8. Косой скачек уплотнения. Рассмотрим теперь обтекание сверхзвуковым потоком угла, меньшего 180°.



Первоначальная скорость равна V_1 и параллельна стене AO, плотность равна ρ_1, а давление равно p_1.
В точке O направление стены внезапно меняется. Примем, что на некотором луче OB, положение которого нам наперед неизвестно, величины V, ρ, p изменяются скачком, что приводит к внезапному отклонению потока. Скачек, который мы здесь имеем, отличается от ранее изученного тем, что здесь испытывает разрыв только v_s, то-есть только проекция скорости на нормаль к OB. Его поэтому называют косым скачком уплотнения.
Условия в области разрыва получаются легкой модификацией уравнений § 6; а именно, они имеют вид

(1) $$\rho_1 v_{s1} = \rho_2 v_{s2} = m$$

(2) $$p_1 - p_2 = m(v_{s2} - v_{s1})$$

(3) $$\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

При этом принято во внимание, что линия разрыва OB неподвижна.
Чтобы определить картину течения, нужно найти

угол β или угол δ, так как сумма

$$\beta + \delta = \omega$$

известна.

Замечая, что (см. чертеж)

$$V_1 \sin\beta = v_{s1} \quad , -V_1 \cos\beta = v_{\tau 1}$$

$$\frac{v_{\tau 2}}{v_{s2}} = tg\alpha_2 = ctg\,\delta = ctg\,(\omega-\beta)$$

$$v_{\tau 1} = v_{\tau 2}$$

получаем такие равенства:

a) в силу (1)

$$(4) \qquad ctg\,(\omega-\beta) + \frac{\rho_2}{\rho_1}\, ctg\,\beta = 0$$

в) в силу (2)

$$(5) \qquad p_1 - p_2 = \rho_1 V_1^2 \sin^2\beta \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)$$

c) соотношение (3)

$$(3) \qquad \frac{1}{2}(p_1+p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

(3), (4), (5) есть система трех уравнений для нахождения трех неизвестных β, p_2, ρ_2.

Ту же картину течения мы получим, если газ вытекает во внешнее пространство где задано постоянное давление $p_2 > p_1$.

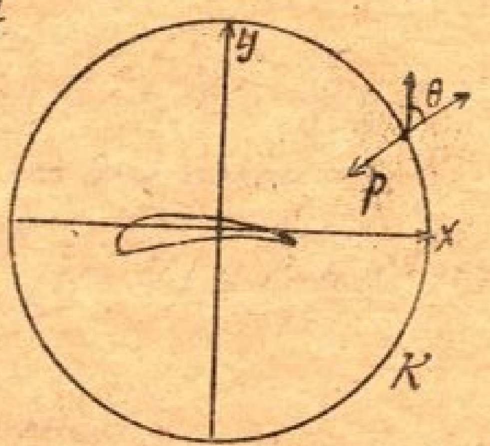
Задание величины p_2 заменяет здесь задание угла ω. Зная p_1, ρ_1, p_2, мы можем найти с помощью (3) плотность ρ_2. Уравнение (5) позволит найти угол β, после чего с помощью (4) найдем угол ω, дающий направление потока после скачка.

§9. О плоско-параллельном течении при больших скоростях меньших скорости звука.

В этом параграфе мы будем заниматься стационарным, адиабатическим движением жидкости с потенциалом скоростей. Мы будем предполагать, что скорость течения на бесконечности направлена в сторону положительных x-ов и достаточно велика для того, чтобы можно было применять теорию несжимаемой жидкости, но все-же меньше, чем скорость звука.

1. Прежде всего мы докажем, что при сделанных предположениях имеет место теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе.

Воспользуемся теоремой о количестве движения. Поместим крыло внутрь круга K (контрольного) достаточно большого радиуса R



На жидкость, заключенную внутри этого круга, действует в направлении оси y-ов

1) сила $-P$, где P - подъемная сила крыла,

2) сила

$$-\int_K p \cos\theta \, ds = \int_K p\,dx ,$$

где интегрирование производится по окружности контрольного круга

Полная сила по оси y-ов

$$\int_K p\,dx - P$$

равна проекции на ось y-ов количества движения, выносимого из K за единицу времени, то-есть

$$\int_K \rho V_r \cdot v\,ds ,$$

где V_r есть проекция скорости на радиус

Так как

$$V_r = u \sin\theta + v \cos\theta$$

то написанный интеграл равен

$$\int_K \rho(u\sin\theta + v\cos\theta)v\,ds =$$

$$= -\int_K \rho v(v\,dx - u\,dy)$$

Следовательно,

$$(1) \qquad P = \int_K p\,dx - \int_K \rho v(v\,dx - u\,dy).$$

Проекция скорости u на бесконечности равна известной постоянной величине U, а проекция v на бесконечности равна нулю

$$\lim_{R\to\infty} u = U, \quad \lim_{R\to 0} v = 0.$$

Можно доказать, что для больших R

$$(2) \qquad \lim_{R\to\infty} R^{\delta}(u-U) = \lim_{R\to\infty} R^{\delta} v = 0$$

если только $\delta < 1$.

Заметим, что равенство

$$\lim_{R\to\infty} R^{\delta} f = 0 \qquad (\delta<1)$$

наверно имеет место, если для больших R справедливо разложение

$$f = \frac{f_1}{R} + \frac{f_2}{R^2} + \cdots$$

По отношению к функциям

$$u - U, \ v$$

мы не предпологаем возможности таких разложений, но равенства (2), которые единственно нам будут нужны и справедливость которых можно доказать, мы здесь должны принять.

Так как

$$\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} a_1^2 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} a_1^2,$$

где a_1 есть скорость на бесконечности, где скорость равна U, давление p_1, плотность ρ_1, и значит

$$(3)\quad \frac{(u-U)^2+2U(u-U)+v^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}a_1^2\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma-1}a_1^2,$$

то в силу (2)

$$\lim_{R\to\infty}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}-1\right]R^{\delta}=0.$$

Отсюда легко получить, что

$$(4)\qquad \lim_{R\to\infty}R^{\delta}\left[\rho-\rho_1\right]=0.$$

Из (3) вытекает также, что

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}=1-\frac{\gamma-1}{2}\left\{\frac{(u-U)^2}{a_1^2}+\frac{2U(u-U)}{a_1^2}+\frac{v^2}{a_1^2}\right\}$$

и значит

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1}-1+\frac{\gamma-1}{a_1^2}U(u-U)=-\frac{\gamma-1}{2}\left\{\frac{(u-U)^2}{a_1^2}+\frac{v^2}{a_1^2}\right\}$$

или

$$(5)\qquad \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1+\frac{\gamma-1}{a_1^2}U(u-U)=-\frac{\gamma-1}{2}\left\{\frac{(u-U)^2}{a_1^2}+\frac{v^2}{a_1^2}\right\}$$

Из соотношения (5) вытекает, что там, где величинами

$$\frac{(u-U)^2}{a_1^2},\ \frac{v^2}{a_1^2}$$

по их малости можно пренебречь, имеет место приближенное равенство

$$\frac{p}{p_1}=\left\{1-\frac{\gamma-1}{a_1^2}U(u-U)\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

или с тою же степенью точностью

$$(6)\qquad p=p_1-\rho_1U(u-U)$$

С другой стороны из (5) вытекает, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{2\delta}\left\{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1+\frac{\gamma-1}{a_1^2}U(v-U)\right\}=0$$

Откуда

$$(7)\qquad \lim_{R\to\infty} R^{2\delta}\left\{p-p_1+\rho_1 U(u-U)\right\}=0$$

Обратимся теперь к интегралу (1).
Этот интеграл берется по окружности радиуса R, а R можно сделать сколь угодно большим.

Так как

$$\left|\int_K f(x,y)\,dx\right|\leq M\,2\pi R,$$

где M максимум абсолютного значения $f(x,y)$ на K, то в случае, когда

$$\lim_{R\to\infty} RM=0,$$

интеграл

$$\int_K f(x,y)\,dx$$

равен нулю.

То же самое заключение можно сделать относительно интегралов

$$\int_K f(x,y)\,dy.$$

В силу этого замечания пользуясь формулами (7), (4), (2), можно для P получить выражение

$$P=\lim_{R\to\infty}\left\{\int_K[p_1-\rho_1 U(u-U)]\,dx+\int_K\rho_1 v\,U\,dy\right\}.$$

Но

$$\int_K dx=\int_K dy=0$$

а с другой стороны

$$\int_K u\,dx+v\,dy=\Gamma$$

есть циркуляция вокруг крыла, которая от R не зависит.

Поэтому

$$P=-\rho_1 U\Gamma.$$

Аналогично доказывается, что лобовое сопротивление Q равно нулю.

Итак, теорема Н. Е. Жуковского доказана.

2. Составим теперь уравнение для потенциала скоростей. Будем исходить из уравнений

$$(8_1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$(8_2) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}a^2\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

где $a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ местная скорость звука, и уравнения неразрывности

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial y}v=0.$$

Умножая (8_1) на u, а (8_2) на v и складывая получим в силу (9), что

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}=a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

или

$$(10) \qquad (u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2uv\frac{\partial u}{\partial y}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

так как по условию

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}a^2=\frac{U^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}a_1^2$$

то

$$a^2=a_1^2+\frac{\gamma-1}{2}\left\{U^2-u^2-v^2\right\}$$

или

$$a^2=a_1^2-\frac{\gamma-1}{2}\left\{2U(u-U)+v^2+(u-U)^2\right\}$$

Выражение (11) мы подставим в (10).

Будем предполагать, что крыло является тонким и мало искривленным, а угол атаки малым. Тогда скорость потока всюду будет мало отличаться от своего значения на бесконечности, т.е. величины $u-U$, v и их производные будут малы.

Квадратами и произведениями этих величин мы пренебрежем.

Благодаря этому уравнение (10) заменится некоторым приближенным линейным уравнением (то-есть мы снова производим линеаризацию).

Это уравнение имеет вид

$$(12 \qquad (U^2-a_1^2)\frac{\partial u}{\partial x}-a_1^2\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Поясним, как получилось это уравнение.

Член $(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}$ в силу (11) равен

$$\Big\{(u-U)^2+2U(u-U)+U^2-$$

$$-a_1^2+\frac{\gamma-1}{2}\left[2U(u-U)+v^2+(u-U)^2\right]\Big\}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ есть малая первого порядка.

Поэтому из выражения в фигурных скобках мы должны оставить только член нулевого порядка, то-есть член, не содержащий $u-U$ и v.

Мы получим

$$(U^2-a_1^2)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично поступаем с остальными членами.

Таким образом мы имеем основное уравнение (12), которое запишем в виде

$$(1-M^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

где $M=\frac{U}{a_1}<1$ есть так называемое число Бэрстоу.

Уравнение для потенциала скоростей принимает теперь вид

$$(13) \qquad (1-M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Если мы сделаем преобразование

$$x=x'$$

$$y=y'\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$$

то функция $\varphi(x,y)$ перейдет в некоторую функцию $\varphi_1(x',y')$:

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x',y').$$

При этом из того, что φ удовлетворяет уравнению (13) будет следовать, что

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y'^2} = 0,$$

т.е. для φ_1 получается обычное уравнение логарифмического потенциала. Это показывает, что задача нахождения потока сжимаемой жидкости, обтекающего тонкое и мало искривленное крыло, эквивалентна аналогичной задаче для другого крыла в несжимаемой жидкости.

Проверим, что это действительно так. С этой целью крыло L (в сжимаемой жидкости) растянем по оси y-ов в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз. Получим новое крыло L'.

Найдем его обтекание несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_1 и давлением на бесконечности p_1 при прежней скорости на бесконечности.

Получим потенциал скоростей

$$\varphi_1(x', y').$$

Построим функцию $\varphi(x,y) = \varphi_1(x', y')$ с помощью преобразования

$$x = x', \quad y = y' \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}.$$

При этом преобразовании линии равного уровня C' перейдут в некоторые более крутые линии C. Их ортогональная траектория уже будет отличаться от L'. Она будет более пологой кривой. Более подробное рассмотрение показывает, что мы получим как раз исходный профиль L.

С другой стороны новая функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (13) и условию на бесконечности

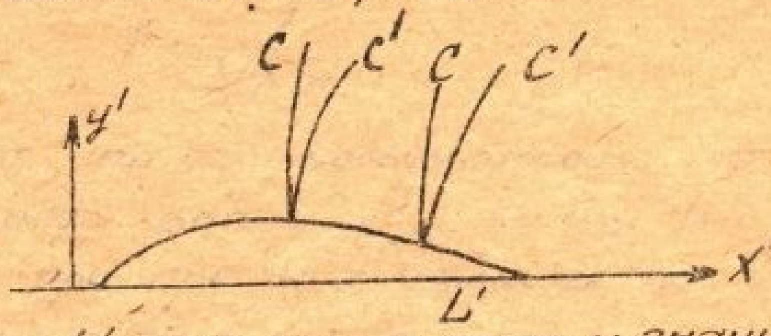
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

и как мы только что выяснили линии

$$\varphi(x,y) = C$$

ортогональны L.

Линии, на которых эта функция постоянна (линии уровня), будут ортогональны к крылу L'



В самом деле L' есть линия тока и значит вдоль нее $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$, т.е.

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

Поэтому полученная функция дает решение линеаризованной задачи.

Замечая, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}$$

мы приходим к выводу, что в соответственных точках обоих потоков проекция скорости на ось абсцисс одинакова.

В силу соотношения (6) будут одинаковы давления в соответственных точках обоих потоков.

Поэтому на основании формулы (1) (после пренебрежения вторым членом правой части) можно утверждать, что с принятой степенью точности подъемные силы наших крыльев одинаковы.

Значит подъемная сила профиля L в сжимаемой жидкости равна подъемной силе профиля L' в несжимаемой жидкости.

Но из теории тонкого профиля вытекает что при растяжении в N раз вдоль оси y-ов тонкого профиля в несжимаемой жидкости его подъемная сила возрастает в N раз.

Значит при переходе от L к L' в несжимаемой жидкости подъемная сила изменяется в отношении

$$1 : \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} .$$

Отсюда следует, что если подъемная сила для L в несжимаемой жидкости равна P_H, то для L в сжимаемой жидкости при прежних условиях на бесконечности подъемная сила равна

$$P_{сж} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} P_H .$$

Этот результат Прандтля хорошо согласуется с опытными данными.

§ 10. <u>О плоскопараллельных течениях со сверхзвуковыми скоростями.</u> Сохраним предположения предыдущего параграфа за исключением того, которое касается величины скорости на бесконечности, которая теперь будет больше скорости звука:

$$U > a_1$$

Мы можем и здесь воспользоваться линеаризованным уравнением, которое теперь имеет вид

$$\left(\frac{U^2}{a_1^2} - 1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

Число Бэрстоу $\frac{U}{a_1}$ теперь уже больше 1.

Называя углом Маха угол M, определяемый формулой

$$\sin M = \frac{a_1}{U},$$

так что

$$\frac{U^2}{a_1^2} - 1 = \frac{1}{\sin^2 M} - 1 = ctg^2 M,$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - tg^2 M\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

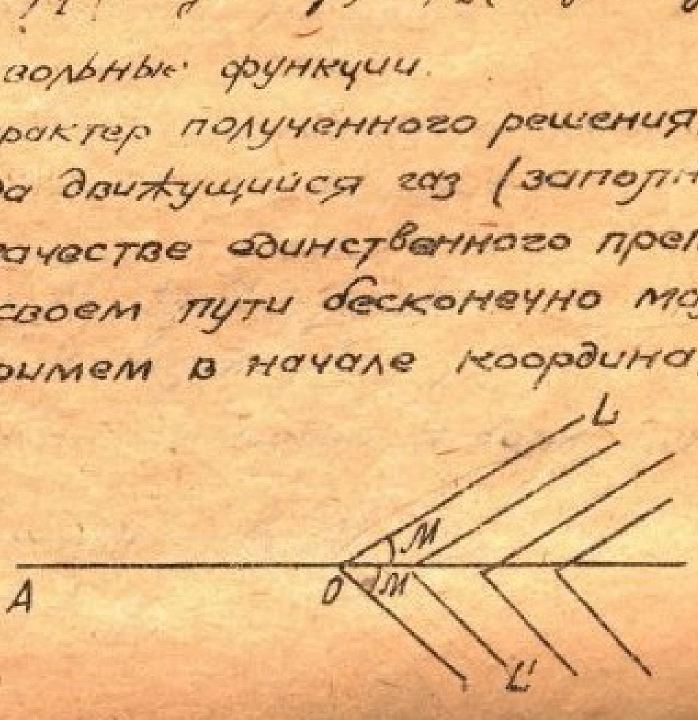
Интегрируя его так же, как и уравнение (1) § 2, найдем общий интеграл в виде

$$\varphi(x,y) = f_1(x\,tg M - y) + f_2(x\,tg M + y),$$

где f_1, f_2 суть произвольные функции.

Чтобы выяснить характер полученного решения, рассмотрим случай, когда движущийся газ (заполняя все пространство) в качестве единственного препятствия встречает на своем пути бесконечно малое тело, которое мы примем в начале координат.

Течение разбивается на два симметричных течения: одно в верхней полуплоскости, а другое в нижней.



Мы можем принять, что в верхней полуплоскости

$$(3_1)\qquad \varphi(x,y) = Ux + f(x\,\mathrm{tg}\,M - y)$$

а в нижней

$$(3_2)\qquad \varphi(x,y) = Ux + f(x\,\mathrm{tg}\,M + y),$$

так что f есть прибавка вызываемая возмущением.

На левой половине оси абсцисс возмущение еще не могло сказаться и поэтому для $y=0$, $x<0$

$$\varphi(x,y) = Ux.$$

Отсюда следует, что

$$f(\xi) = 0$$

при

$$\xi \leq 0.$$

Значит в углу AOL, где

$$x\,\mathrm{tg}\,M - y \leq 0$$

имеет место равенство

$$\varphi(x,y) = Ux,$$

т.е. невозмущенное движение простирается до линии OL в верхней полуплоскости и до линии OL' в нижней. Эти линии образуют угол Маха с положительной осью x-ов и носят название линий Маха.

Из формул (3_1), (3_2) следует, что вызываемая возмущением прибавка к Ux в выражении потенциала сохраняет постоянное значение на линиях Маха — прямых параллельных OL в верхней полуплоскости и OL' в нижней.

На этих же линиях будут постоянны также проекции скорости u, v, плотность ρ и давление p.

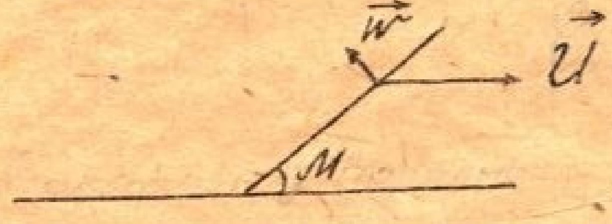
В верхней полуплоскости

$$u = U + f'(x\,\mathrm{tg}\,M - y)\,\mathrm{tg}\,M$$
$$v = -f'(x\,\mathrm{tg}\,M - y)$$

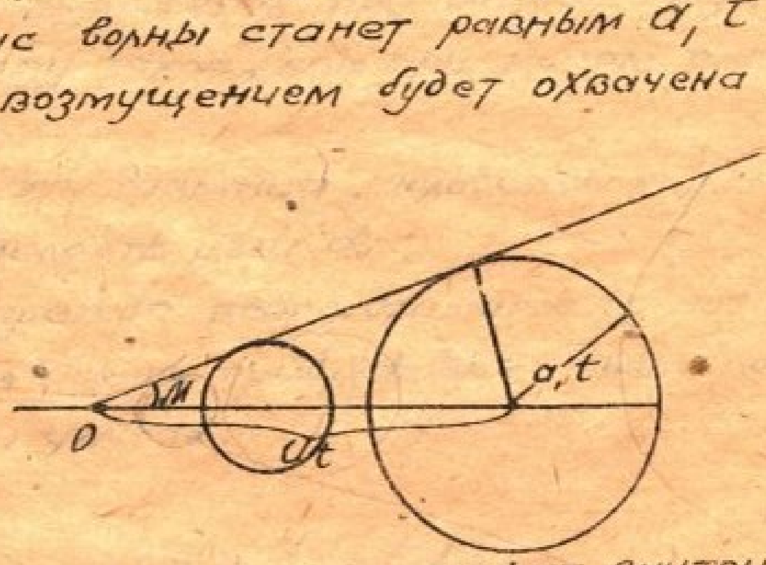
Таким образом скорость, вызываемая возмущением, имеет проекции

$$u - U = f'(x\,\mathrm{tg}\,M - y)\,\mathrm{tg}\,M$$
$$v = -f'(x\,\mathrm{tg}\,M - y)$$

так что
$$\frac{v}{u-U} = -\operatorname{ctg} M$$
или
$$1 + \operatorname{tg} M \cdot \frac{v}{u-U} = 0$$
Это значит, что дополнительная скорость $\vec{w}$ перпендикулярна к линиям Маха

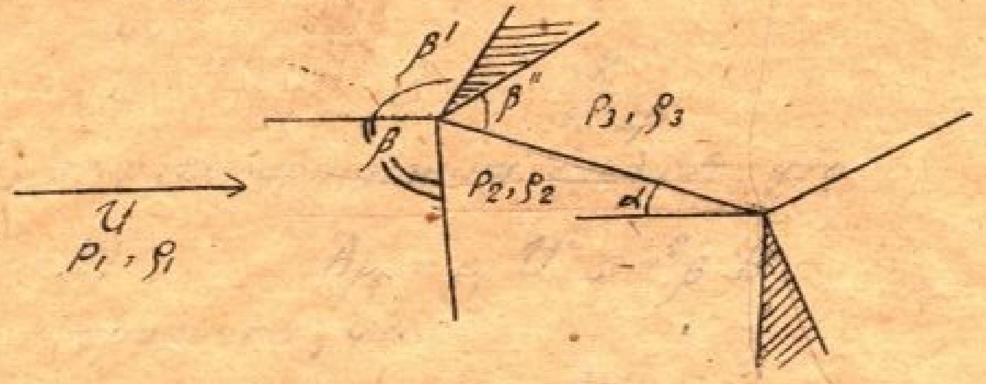


Линии Маха можно пояснить еще так.
Пусть сверхзвуковой поток встречает препятствие в точке O. Частица газа, придя в O испытывает уплотнение и поэтому становится центром шаровых волн, которые распространяются со скоростью звука a_1 и центры которых движутся со скоростью U.
По прошествии t секунд центр волны пройдет путь Ut, а радиус волны станет равным $a_1 t$.
Поэтому возмущением будет охвачена только



та часть газа, которая лежит внутри конуса с центром O и осью OX причем угол раствора этого конуса равен 2M, где
$$\sin M = \frac{a_1 t}{Ut} = \frac{a_1}{U}$$
Образующие этого конуса и суть линии Маха.
В заключение рассмотрим поток, набегающий на

тонкий слабо искривленный профиль расположенный под малым углом атаки α.



Явление обтекания у переднего и заднего носика - будет происходить примерно так, как в случае обтекания угла, которое мы рассматривали в § 7 и § 8. У переднего носика сверху угол больше $180°$ и мы будем иметь там клинообразную область разрежения так же как и у заднего носика снизу. Наоборот у переднего носика снизу и у заднего носика сверху будут косые скачки уплотнения. Давление сверху пластинки будет такое, какое получается при обтекании угла равного $180°+\alpha$, а снизу такое, как при косом скачке в случае угла $180°-\alpha$.

Вычислим эти давления, пользуясь результатами §§ 7, 8 и учитывая малость угла α.

Определим прежде всего давление p_2 под крылом.

Искать будем первое приближение, пренебрегая вторыми степенями угла α.

Положим

$$p_2 = p_1 (1 + A\alpha),$$

$$\rho_2 = \rho_1 (1 + B\alpha).$$

В силу формул (4), (5), (6) § 8 и того, что $\omega = \pi - \alpha$:

$$-ctg(\alpha+\beta) + \frac{\rho_2}{\rho_1} ctg\,\beta = 0$$

$$+p_1 A\alpha = \rho_1 U^2 \sin^2\beta \frac{B\alpha}{1+B\alpha}$$

$$\frac{1}{2}(2 + A\alpha) B\alpha = \frac{(A-B)\alpha}{\gamma - 1}.$$

Первое уравнение с принятой степенью точности дает

$$1+Bα = \frac{tg\beta}{tg\beta + \frac{\alpha}{\cos^2\beta}} = 1 - \frac{2\alpha}{\sin 2\beta}$$

откуда

$$(a) \qquad B = -\frac{2}{\sin 2\beta}.$$

Из второго уравнения следует, что

$$(в) \qquad A p_1 = \rho_1 U^2 \sin^2\beta \, B,$$

а из третьего, что

$$B = \frac{A-B}{\gamma-1}$$

или

$$(c) \qquad A = B\gamma$$

В силу (в) и (с)

$$(д) \qquad \sin^2\beta = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}\frac{1}{U^2} = \frac{a_1^2}{U^2}.$$

Это показывает, что $\beta = \pi - M$, где M есть угол Маха. Найдя β, мы можем с помощью (а) определить B. Мы получаем, что

$$B = \frac{1}{\frac{a_1}{U_1}\sqrt{1-\frac{a_1^2}{U^2}}}$$

Поэтому в силу (в) и (д)

$$A p_1 = \rho_1 a_1^2 B = \frac{\rho_1 U^2}{\sqrt{\frac{U^2}{a^2} - 1}}.$$

Следовательно,

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho_1 U^2 \alpha}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2} - 1}}$$

Найдем теперь p_3, для чего воспользуемся формулами §7. Прежде всего имеем уравнение

$$-ctg\,\beta' = \sqrt{\frac{U^2 - a_1^2}{a_1^2}}$$

Которое показывает, что

$$(a)\qquad \sin^2\beta' = \frac{a_1^2}{U^2},$$

откуда следует, что $\pi-\beta'$ есть угол Маха.

Поскольку угол α мал, то мал также угол $\delta=\pi+\alpha-\beta'-\beta''$

Поэтому формулу

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(\theta_0+\delta)}{\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0}$$

можно заменить на

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 1-\delta\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\, tg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0$$

Но

$$(в)\qquad \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0 = -ctg\beta'$$

Значит

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 1+\delta\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\, ctg\beta' =$$

$$= 1-\delta\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}$$

Откуда

$$(c)\qquad \frac{p_3}{p_1} = 1-\frac{2\delta\gamma}{\gamma+1}\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}$$

Остается выразить δ через α.

Для этого возьмем формулу

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\, tg\left\{\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(\delta+\theta_0)\right\} + ctg(\beta'-\alpha+\delta) = 0.$$

Из нее следует, что

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left\{ tg\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0 + \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\delta\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0}\right\} + ctg\beta' - \frac{\delta-\alpha}{\sin^2\beta'} = 0$$

или в силу (в).

$$\frac{\delta}{\cos^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta_0} = \frac{\delta-\alpha}{\sin^2\beta'}$$

Учитывая (а) и (в) мы можем это уравнение переписать в виде

$$\delta\left\{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{U^2}{a_1^2}-1\right)\right\}=\frac{U^2}{a_1^2}(\delta-\alpha)$$

откуда

$$\delta=\frac{\gamma+1}{2}\alpha\,\frac{U^2}{a_1^2\left(\frac{U^2}{a_1^2}-1\right)}$$

Подставляя это выражение в (с) получаем, что

$$\frac{p_3}{p_1}=1-\alpha\gamma\frac{U^2}{a_1^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}}$$

А поскольку

$$a_1^2=\frac{\gamma p_1}{\rho_1}$$

то

$$p_3=p_1-\alpha\rho_1\,\frac{U^2}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}}$$

Мы видим, что

$$p_1-p_3=p_2-p_1,$$

то-есть увеличение давления под крылом равно уменьшению давления над крылом.

Полная сила, с которой поток действует на наше крыло, если его хорда равна b, есть

$$R=2b\alpha\rho_1\,\frac{U^2}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}}$$

Эта сила перпендикулярна к плоскости крыла.
Подъемная сила есть

$$P=R\cos\alpha\cong R=2\rho\alpha\,\frac{bU^2}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}}$$

а лобовое сопротивление

$$Q=R\sin\alpha\cong R\alpha=2\rho\alpha^2\,\frac{bU^2}{\sqrt{\frac{U^2}{a_1^2}-1}}$$

Конечно, наш приближенный анализ предполагал, что $U>a_1$. При $U=a_1$ формулы теряют смысл.

В общем и целом эти формулы не плохо согласуются с экспериментами.