ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 18 1961

Л. П. ВИНОКУРОВ

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН, НАГРУЖЕННЫХ СИЛАМИ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Основой предлагаемого метода является замена дифференциальных уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений, относящихся к отдельным линиям (прямым и кривым), разделяющим пластину на части. Такой метод с применением прямых линий для решения в прямоугольных координатах двухмерных задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, был предложен Л. В. Канторовичем [1], применявшим интерполяцию по Лагранжу для выражения функций по одной из переменных. Такую интерполяцию М. Г. Слободянский [2], [3] заменил разложением в ряд Тейлора и показал, как решать задачи теории упругости, если их описывать дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого порядка.

Таким же вопросом занималась В. Н. Фадеева [4], показавшая, как учесть искривление контура в эллиптической пластине.

Все упомянутые авторы давали решение в прямоугольных координатах и были связаны расположением линий на равных расстояниях, прямых, разделяющих пластину на полосы.

Нами решаются двухмерные задачи выражением функции по одной из переменных в конечных разностях, получаемых применением скользящей интерполяции. Последняя позволила:

а) получить решение в различных координатах: прямоугольных, косоугольных, полярных [1], и этим легко отражать в решении различные формы пластин;

б) расставлять линии — прямые и кривые, разделяющие пластину на части, не обязательно на равные расстояния, что важно для несимметричных задач и для достижения в отдельных случаях бо́льшей точности результатов;

в) решать непосредственно с удовлетворением условий на контуре задачи, описываемые не только дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, но и любого старшего порядка, вводя при этом в случае необходимости фиктивные линии со стороны тех граней пластины, которые параллельны линиям деления.

В данной работе метод замены уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений применен для расчета на устойчивость пластин различных форм.

---

[1] Возможно решение и в смешанных координатах.

§ 1. СКОЛЬЗЯЩАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОЛУЧЕНИЮ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В РАЗЛИЧНЫХ КООРДИНАТАХ

А. Прямоугольные координаты

Пусть дана определенная непрерывная функция $w = f(x)$, изображаемая гладкой или кусочно-гладкой кривой на отрезке l в прямоугольных координатах. Для определения производной функции $w = f(x)$ во всех точках не обязательно знание её на всем отрезке l. Достаточно знать функцию $w = f(x)$ в окрестности точки. Это обстоятельство позволяет функцию $w = f(x)$ апроксимировать на малом отрезке, содержащем рассматриваемую точку. На таком отрезке в качестве апроксимирующей функции избираем квадратную параболу

$$\bar{w} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{1.1}$$

коэффициенты которой подбираются из условий совпадения $\bar{w}$ и w в точках n; $n-1$ (на расстоянии d_n от n влево) и $n+1$ (на расстоянии d_{n+1} от n вправо). Уравнение (1.1) отнесено к осям координат w, x, имеющим начало в центральной точке n, которое вместе с точкой n скользит в пределах всего отрезка l.

Определив коэффициенты a_0, a_1 и a_2, получаем

$$\bar{w} = w_n + \frac{x}{(1+\alpha_n)\,d_n}\left[w_{n+1}\,\alpha_n^2 - w_n\left(\alpha_n^2 - 1\right) - w_{n-1}\right] + \\ + \frac{x^2}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\left[w_{n+1}\alpha_n - w_n\left(1+\alpha_n\right) + w_{n-1}\right], \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_n = \frac{d_n}{d_{n+1}}.$$

Из (1.2) для точки n, т. е. при $x = 0$, имеем

$$\frac{d\bar{w}(0)}{dx} = \frac{dw(x_n)}{dx} = \frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n\left(\alpha_n^2 - 1\right) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,d_n}; \tag{1.3}$$

[1]

$$\frac{d^2\bar{w}(0)}{dx^2} = \frac{d^2 w(x_n)}{dx^2} = 2\,\frac{w_{n-1} - w_n\left(1+\alpha_n\right) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,d_n\,d_{n+1}}. \tag{1.4}$$

Рассматривая (1.3) и (1.4) как операторы, находим

$$\left.\frac{d^3 w}{dx^3}\right|_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)\right]_{x=0} = \frac{2}{(1+\alpha_n)d_n}\left\{\frac{\alpha_n^2\left[w_n - w_{n+1}\left(1+\alpha_{n+1}\right) + w_{n+2}\alpha_{n+1}\right]}{(1+\alpha_{n+1})\,d_{n+2}\,d_{n+1}} - \right. \\ \left. - \frac{\left(\alpha_n^2 - 1\right)\left[w_{n-1} - w_n\left(1+\alpha_n\right) + w_{n+1}\,\alpha_n\right]}{(1+\alpha_n)\,d_n\,d_{n+1}} - \frac{w_{n-2} - w_{n-1}\left(1+\alpha_{n-1}\right) + w_n\,\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}\,d_n}\right\}. \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{d^4 w}{dx^4}\right|_{x=0} = \left[\frac{d^2 w}{dx^2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)\right] = \frac{4}{(1+\alpha_n)\,d_n\,d_{n+1}}\left\{\frac{w_{n-2} - w_{n-1}\left(1+\alpha_{n-1}\right) + w_n\,\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}\,d_n} - \right. \\ \left. - \frac{w_{n-1} - w_n\left(1+\alpha_n\right) + w_{n+1}\alpha_n}{d_n\,d_{n+1}} + \frac{\alpha_n\left[w_n - w_{n+1}\left(1+\alpha_{n+1}\right) + w_{n+2}\,\alpha_{n+1}\right]}{(1+\alpha_{n+1})\,d_{n+1}\,d_{n+2}}\right\}; \tag{1.6}$$

где

$$\alpha_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{d_n}; \quad \alpha_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{d_{n+2}}.$$

---

[1] Здесь принято

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = \frac{dw(0)}{dx}; \quad \left.\frac{d^2 w}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{d^2 w(0)}{dx^2}.$$

Если $\overline{w}$ есть функция двух переменных x, y, то параболой (1.1) апроксимируется отрезок кривой в окрестности точки n, полученной сечением поверхности w плоскостью параллельной $w-x$, на расстоянии y от оси x. Тогда коэффициенты a_0, a_1 и a_2 будут функциями y (то же относится к w_{n-1}, w_n, w_{n+1}), а выражения (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) — частными производными от w по x в точке n.

Частная производная по y любого порядка k в этой точке, как следует из (1.2),

$$\left.\frac{\partial^k \overline{w}}{\partial y^k}\right|_{x=0} = \frac{d^k w_n}{dy^k}. \tag{1.7}$$

Смешанные производные (по x и по y) находятся как производные по y от выражения (1.3), (1.4), (1.5) и (1.6).

В этом заключается получение производных от функции нескольких переменных в конечных разностях по одной переменной в прямоугольных координатах применением скользящей интерполяции. Скользящей эта интерполяция названа потому, что, скользя параболой (1.1) по кривой $w=f(x)$, мы в конечном счете получаем апроксимацию всей этой кривой. Если $\alpha_{n-1} = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 1$, т. е. $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n = d_{n+1} = d_{n+2}$, то формулы (1.3) — (1.6) значительно упрощаются.

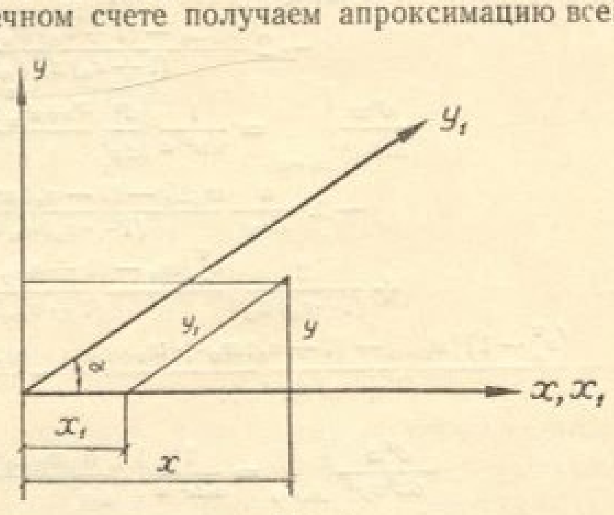

Рис. 1.

Б. Косоугольные координаты

Ось y_1 полагаем направленной к оси x под углом α, отличным от 90° (рис. 1). Апроксимирующая парабола (1.2) сохраняется в косоугольных координатах при замене в ней x на x_1.

Производные от функции двух переменных в конечных разностях по одной переменной x_1 в косоугольных координатах совпадают с подобными производными по переменной x в прямоугольных координатах. Производные от той же функции по y в конечных разностях по одной переменной x_1 имеют вид

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{dw_n}{dy_1} - \frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_n^2-1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}\cos\alpha\right]; \tag{1.10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\frac{d^2 w_n}{dy_1^2} - 2\cos\alpha\frac{d}{dy_1}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_n^2-1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}\right] + \right.$$
$$\left. + 2\frac{w_{n-1} - (1+\alpha_n)w_n + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\cos^2\alpha\right\}; \tag{1.11}$$

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right|_{x_1=0} = \frac{1}{\sin^3\alpha}\left\{\frac{d^3 w_n}{dy_1^3} - 3\cos\alpha\frac{d^2}{dy_1^2}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_n^2-1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}\right] + \right.$$
$$+ 3\cos^2\alpha\frac{d}{dy_1}\left[2\frac{w_{n-1} - (1+\alpha_n)w_n + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\right] - \frac{2}{(1+\alpha_n)d_n}\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_n^2[w_n - (1+\alpha_{n+1})w_{n+1} + w_{n+2}\alpha_{n+1}]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+2}d_{n+1}} - \frac{(\alpha_n^2-1)[w_{n-1} - (1+\alpha_n)w + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{w_{n-2} - (1+\alpha_{n-1})w_{n-1} + w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})d_{n-1}d_n}\right\}\cos^3\alpha\right\}; \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right|_{x_1=0}=\frac{1}{\sin^4\alpha}\left\{\left|\frac{d^4 w_n}{dy_1^4}-4\frac{d^3}{dy_1^3}\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_n^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}\cos\alpha+\right.\right.$$

$$+12\frac{d^2}{dy_1^2}\frac{w_{n-1}-(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\cos^2\alpha-4\frac{d}{dy_1}\frac{2}{(1+\alpha_n)d_n}\times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha_n^2[w_n-(1+\alpha_{n+1})w_{n+1}+w_{n+2}\alpha_{n+1}]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+2}d_{n+1}}-\frac{(\alpha_n^2-1)[w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n]}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{w_{n-2}-w_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})d_{n-1}d_n}\right\}\cos^3\alpha+\frac{4}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\times$$

$$\times\left\{\frac{w_{n-2}-w_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})d_{n-1}d_n}-\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{d_n d_{n+1}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_n[w_n-w_{n+1}(1+\alpha_{n+1})+w_{n+2}\alpha_{n+1}]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+1}d_{n+2}}\right\}\cos^4\alpha\right\}; \qquad (1.13)$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x_1=0}=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{d}{dy_1}\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_n^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}-\right.$$

$$\left.-2\frac{w_{n-1}-(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\cos\alpha\right]; \qquad (1.14)$$

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right|_{x_1=0}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\frac{d^2}{dy_1^2}\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_n^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)d_n}-\right.$$

$$-2\frac{d}{dy_1}\frac{w_{n-1}-(1-\alpha_n)w_n+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\cos\alpha+$$

$$+\frac{2}{(1+\alpha_n)d_n}\left\{\frac{\alpha_n^2[w_n-(1+\alpha_{n+1})w_{n+1}+\alpha_{n-1}w_{n+2}]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+2}d_{n+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\alpha_n^2-1)[w_{n-1}-(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}-\frac{w_{n-2}-(1+\alpha_{n-1})w_{n-1}+w_n\alpha_{n-1}}{(1+d_{n-1})d_{n-1}d_n}\right\}\cos^2\alpha;$$
$$(1.15)$$

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right|_{x_1=0}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{2\frac{d}{dy_1^2}\frac{w_{n-1}-(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}-\right.$$

$$-\frac{4}{(1+\alpha_n)d_n}\frac{d}{dy_1}\left\{\frac{d_n^2[w_n-(1+\alpha_{n+1})w_{n+1}+w_{n+2}\alpha_n]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+2}d_{n+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\alpha_n^2-1)[w_{n-1}-(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}d_n]}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}-\frac{w_{n-2}-(1+\alpha_{n-1})w_{n-1}+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})d_{n-1}d_n}\right\}\cos\alpha+$$

$$+\frac{4}{(1+\alpha_n)d_n d_{n+1}}\left\{\frac{w_{n+2}-(1+\alpha_{n-1})w_{n-1}+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})d_{n-1}d_n}-\frac{w_{n-1}(1+\alpha_n)w_n+w_{n+1}\alpha_n}{d_n d_{n+1}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_n[w_n-(1+\alpha_{n+1})w_{n+1}+w_n+2\alpha_{n+1}]}{(1+\alpha_{n+1})d_{n+1}d_{n+2}}\right\}\cos^2\alpha\right\}. \qquad (1.16)$$

Эти выражения получены следующим образом: пользуясь формулами перехода от прямоугольных к косоугольным координатам,

$$y_1=\frac{y}{\sin\alpha};\ x_1=x-\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha};$$

находим

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial y_1}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}-\frac{\partial w}{\partial x_1}\cos\alpha\right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial y_1}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cos^2\alpha\right)\ \text{и т. д.}$$

Подстановкой производных от w в конечно-разностной форме придем к выражениям (1.11) — (1.16).

В. Полярные координаты

Выражения функции w двух переменных ρ и θ и ее производных по этим переменным в конечных разностях различны для каждого из двух вариантов:

конечные разности по переменной θ и по переменной ρ (θ угловая и ρ — радиальная координаты).

1. Конечные разности по переменной θ

Конечным числом радиальных линий, исходящих из одного центра, делим пластину на секторы (рис. 2). Затем, следуя скользящей интерполяции, выражаем w в пределах трех соседних радиальных линий $n-1$, n, $n+1$ квадратной параболой $w = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$, в которой коэффициенты a_0, a_1, a_2 являются функциями одной переменной ρ и определяются из следующих условий:

1) при $\theta = 0$ (линия n) $w = w_n$;
2) при $\theta = -\theta_n$ (линия $n-1$) $w = w_{n-1}$;
3) при $\theta = \theta_{n+1}$ (линия $n+1$) $w = w_{n+1}$.

В результате получаем

$$w = w_n + \frac{\theta}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\left[w_{n+1}\alpha_n^2 - (\alpha_n^2 - 1)\,w_n - w_{n-1}\right] +$$
$$+ \frac{\theta^2}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\,\theta_{n+1}}\left[w_{n+1}\alpha_n - (1+\alpha_n)\,w_n + w_{n-1}\right]. \qquad (1.17)$$

$$\alpha_n = \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}.$$

Это уравнение совпадает с подобным уравнением в прямоугольных координатах при замене в последнем x на θ, а d_i на θ_i. Отсюда вытекает также совпадение и соответствующих формул для производных.

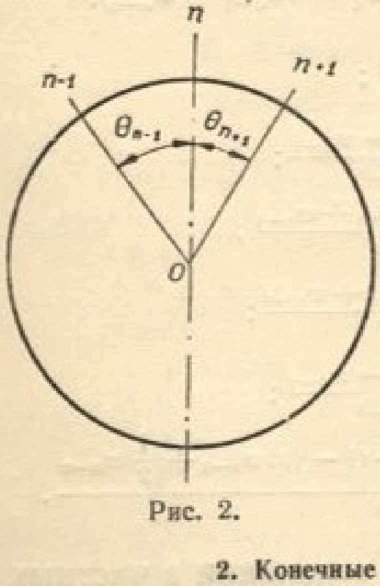

Рис. 2.

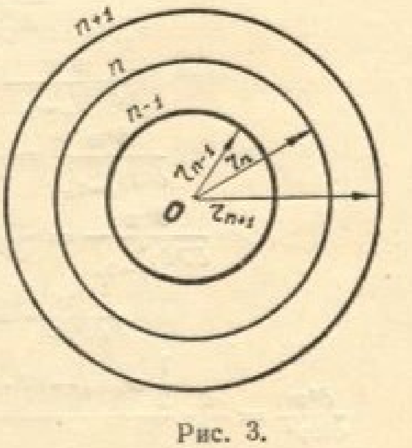

Рис. 3.

2. Конечные разности по переменной ρ

В этом случае пластина делится на части конечным числом концентрических окружностей радиусами

$$r_0 < r_1 < r_2 \; \ldots\ldots \; < r_n < r_{n+1} < r_{n+2}.$$

Следуя скользящей интерполяции, в пределах трех соседних окружностей $n-1$, n, $n+1$, имеющих радиусы r_{n-1}, r_n, r_{n+1} (рис. 3), апроксимируем функцию w квадратной параболой $w = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2$, коэффициенты которой, являющиеся функциями θ, определяются из следующих условий:

1) при $\rho = r_n$, $w = w_n$;
2) при $\rho = r_{n-1}$, $w = w_{n-1}$;
3) при $\rho = r_{n+1}$, $w = w_{n+1}$.

В результате получаем следующее выражение для w в пределах той части пластины, которая ограничена окружностями $n-1$ и $n+1$:

$$w = \left[(1-\alpha^2) w_n + \frac{d}{2}(1+\alpha) w_{n-1} + \frac{d}{2}(\alpha-1) w_{n+1} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) w_{n+1} + 2\alpha w_n - \left(\frac{1}{2}+\alpha\right) w_{n-1}\right]\frac{\rho}{b} + \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{2}\left(\frac{\rho}{b}\right)^2, \tag{1.18}$$

где

$$\alpha = \frac{r_n}{b}; \; b = r_{n+1} - r_n = r_n - r_{n-1}.$$

Особенностью этого уравнения является то, что в нем начало координат для ρ не скользит.

Уравнение (1.18), в котором w_{n-1}; w_n; w_{n+1} и т. д. являются функциями θ, играет такую же роль, как уравнение (1.2) в прямоугольных координатах, т. е. с его помощью определяются производные от w по ρ и по θ первого и второго порядка, а затем, рассматривая их как операторы, находятся производные любого порядка в точках окружности n:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho}_{\rho = 2_n} = \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2b}; \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}_{\rho = 2_n} = \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{b^2}; \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3}_{\rho = r_n} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2} w_{n+2} - (1+4\alpha) w_{n+1} + (1-4\alpha) w_{n-1} - \frac{1}{2} w_{n-2}\right]; \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4}_{\rho = r_n} = \frac{1}{b^4}(w_{n+2} - 4w_{n+1} + 6w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}); \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial^k w}{\partial \theta^k}_{\rho = r_n} = \frac{d^k w_n}{d\theta^k}; \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \rho}_{\rho = r_n} = \frac{d}{d\theta}\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2b}; \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \rho^2}_{\rho = 2_n} = \frac{d}{d\theta}\frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{b^2}; \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \rho^2}_{\rho = 2_n} = \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{b^2}; \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \rho} = \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2b}; \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta \partial \rho^3} = \frac{d}{d\theta}\frac{\frac{1}{2} w_{n+2} - (1+4\alpha) w_{n+1} + (1-4\alpha) w_{n-1} + \frac{1}{2} w_{n-2}}{b^3}. \tag{1.28}$$

§ 2. ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения изгиба пластины с учетом сил, приложенных в их срединной плоскости, с частными производными заменяем системой обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью ранее составленных формул для производных в конечно-разностной форме по одной переменной.

При этом пластина линиями, избранными соответственно принятой системе координат, делится на полосы и применительно к каждой из этих линий записывается дифференциальное уравнение в конечных разностях по одной переменной. Для линии эти уравнения представляются в таком виде:

А. В прямоугольных координатах

Конечные разности по переменной x

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4 w_n}{dy^4}+\frac{4}{(1+\alpha_n)\,d_n d_{n+1}}\left\{\frac{w_{n-2}-w_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}\,d_n}-\right.\\
\left.-\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{d_n\,d_{n+1}}+\frac{\alpha_n\,[w_n-w_{n+1}(1+\alpha_{n+1})+w_{n+2}\alpha_{n+1}]}{d_{n+1}\,d_{n+2}}\right\}+\\
+\frac{4}{(1+\alpha_n)\,d_n d_{n+1}}\frac{d^2}{dy^2}\left[w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n\right]=\\
=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[N_{x(n)}\,2\,\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,d_n d_{n+1}}+N_{y(n)}\frac{d^2 w_n}{dy^2}+\right.\\
\left.+2N_{xy(n)}\frac{d}{dy}\,\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_n^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,d_n\,d_{n+1}}\right]. \qquad (2.1)
\end{gathered}
$$

При $d_{n-1}=d_n=d_{n+1}=d_{n+2}=d$ и $\alpha=\alpha_n=\alpha_{n+1}=1$ уравнение (2.1), упрощаясь, обращается в нижеприводимое

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4 w_n}{dy^4}+\frac{2}{d^2}\frac{d}{dy^2}(w_{n-1}-2w_n+w_{n+1})+\frac{1}{d^4}(w_{n-2}-4w_{n-1}+6w_n-\\
-4w_{n+1}+w_{n+2})=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[N_{x(n)}\frac{1}{d^2}(w_{n-1}-2w_n+w_{n+1})+N_{y(n)}\frac{d^2 w_n}{dy^2}+\right.\\
\left.+N_{xy(n)}\frac{d}{dy}\,\frac{w_{n+1}-w_{n-1}}{d}\right., \qquad (2.2)
\end{gathered}
$$

где $N_{x(n)}$, $N_{y(n)}$ — интенсивности нормальных сил, параллельных осям x и y, в точках линии n; $N_{xy(n)}$ — интенсивность касательных сил в тех же точках.

Все они зависят от одной переменной y.

Б. В полярных координатах

1. Конечные разности по переменной θ

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4 w_n}{d\rho^4}+\frac{1}{\rho^4}\,\frac{1}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}\left\{\frac{w_{n-2}-w_{n-1}(1+\alpha_{n-1})+w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,\theta_{n-1}\theta_n}-\right.\\
\left.-\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{\alpha_n\theta_{n+1}}+\frac{\alpha_{n+1}\,[w_n-w_{n+1}(1+\alpha_{n+1})+w_{n+2}\alpha_{n+1}}{\theta_{n+1}\theta_{n+2}}\right\}+\\
+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2}\left[2\,\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}\right]+\frac{2}{\rho}\frac{d^3 w_n}{d\rho^3}-\\
-\frac{2}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_n^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\right]-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 w_n}{d\rho^2}+\\
+\frac{8}{\rho^4}\,\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}+\frac{1}{\rho^3}\frac{dw_n}{d\rho}=\\
=\frac{1}{D}\left\{N_{x(n)}\frac{d^2 w_n}{d\rho^2}+N_{y(n)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{dw_n}{d\rho}+\frac{2}{\rho^2}\,\frac{w_{n-1}-w_n(1+\alpha_n)+w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}\right]+\right.\\
+\frac{2}{\rho}N_{xy(n)}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_{n-1}^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\right]-\\
\left.-\frac{1}{\rho^2}\,\frac{w_{n+1}\alpha_n^2-w_n(\alpha_{n+1}^2-1)-w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\right\}, \qquad (2.3)
\end{gathered}
$$

где $N_{x(n)}$, $N_{y(n)}$, $N_{xy(n)}$ — интенсивности нормальных и касательных сил в осях x и y на линии n.

После подстановки $\rho = e^t$ в уравнение (2.3) получаем

$$\frac{d^4w_n}{dt^4} - 6\frac{d^3w_n}{dt^3} + 11\frac{d^2w_n}{dt^2} - 6\frac{dw_n}{dt} +$$
$$+\frac{4}{(1+\alpha_n)\,d_nd_{n+1}}\left\{\frac{w_{n+2} - w_{n-1}(1+\alpha_{n-1}) + w_nd_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}d_n} -\right.$$
$$\left.-\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{d_nd_{n+1}} + \frac{d_{n+1}\left[w_n - w_{n+1}(1+\alpha_{n+1}) + w_{n+2}\alpha_{n+1}\right.}{(1+\alpha_{n+1})\,d_{n+1}d_{n+2}}\right\} +$$
$$+\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt}\right)\left[2\,\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}\right] + 2\left(\frac{d^3w_n}{dt^3} - 3\frac{d^2w_n}{dt^2} +\right.$$
$$\left.+2\frac{dw_n}{dt}\right) - 2\frac{d}{dt}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_n^2 - 1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)}\right] - \left(\frac{d^2w_n}{dt^2} - \frac{dw_n}{dt}\right) +$$
$$+8\,\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}} + \frac{dw_n}{dt} = \frac{1}{D}\left\{N_{x(n)}\left(\frac{d^2w_n}{dt^2} -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{dw_n}{dt}\right)N_{y(n)}\left[\frac{dw_n}{dt} + 2\,\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,\theta_n\theta_{n+1}}\right] +$$
$$+2N_{xy(n)}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 + w_n(\alpha_{n-1}^2 - 1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\right] -\right.$$
$$\left.\left.-\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_n^2 - 1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,\theta_n}\right\}\right\}e^{2t}. \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет постоянные коэффициенты, если $N_{x(n)}\rho^2, N_{y(n)}\rho^2$, $N_{xy(n)}\rho^2$ — величины постоянные.

2. Конечные разности по переменной ρ

$$\frac{d^4w_n}{d\theta^4} + 2(2-\alpha^2)\frac{d^2w_n}{d\theta^4} + (\alpha^2-\alpha)\frac{d^2w_{n+1}}{d\theta^2} + (\alpha^2+\alpha)\frac{d^2w_{n-1}}{d\theta^2} +$$
$$+\alpha_{n+2}w_{n+2} + \alpha_{n+1}w_{n+1} + \alpha_nw_n + \alpha_{n-1}w_{n-1} + \alpha^4w_{n-2} =$$
$$= \frac{1}{D}\left\{N_{x(n)}\,\frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{b^2} + N_{y(n)}\left(\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2b\rho} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{b^2\rho^2}\right) + 2N_{xy(n)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{w_{n+1} - w_{n+1}}{2b}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dw_n}{d\theta}\right]\right\}, \qquad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+2} &= \alpha^4 + 2\alpha - 2\alpha^2;\\
\alpha_n &= 6\alpha^4 - 4\alpha^2 + 3\alpha;\\
\alpha_{n+1} &= -4\alpha^4 + 5\alpha^2 - 4{,}5\alpha;\\
\alpha_{n-1} &= -4\alpha^4 + \alpha^2 - 2{,}5\alpha.
\end{aligned}$$

В. В косоугольных координатах

Конечные разности по переменной x_1

$$(1 + 2\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha)\,\frac{4}{(1+\alpha_n)\,d_nd_{n+1}}\left\{\frac{w_{n-2} - w_{n-1}(1+\alpha_{n-1}) + w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}d_n} -\right.$$
$$\left.-\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{d_nd_{n+1}} + \frac{\alpha_n\left[w_n - w_{n+1}(1+\alpha_{n+1}) + w_{n+2}\alpha_{n+1}\right]}{d_{n+1}d_{n+2}}\right\} +$$
$$+\frac{4}{\sin^2\alpha}(1 + 3\operatorname{ctg}^2\alpha)\,\frac{d^2}{dy_1^2}\left[\frac{w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha_n)\,d_nd_{n+1}}\right] +$$
$$+\frac{4\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}\left\{\frac{2}{(1+\alpha_n)\,d_n}\frac{d}{dy_1}\left\{\frac{\alpha_n^2\left[w_n - w_{n+1}(1+\alpha_{n+1}) + w_{n+2}d_{n+1}\right.}{(1+\alpha_{n+1})\,d_{n+2}d_{n-1}} -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{(\alpha_n^2 - 1)\left[w_{n-1} - w_n(1+\alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n\right]}{(1+\alpha_n)\,d_n} - \frac{w_{n-2} - w_{n-1}(1+\alpha_{n-1}) + w_n\alpha_{n-1}}{(1+\alpha_{n-1})\,d_{n-1}d_n}\right\} +$$
$$\left.+\frac{d^3}{dy_1^3}\left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n(\alpha_{n-1}^2 - 1) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\,d_n}\right]\right\} + \frac{1}{\sin^4\alpha}\frac{d^4w_n}{dy_1^4} =$$

$$
= \frac{1}{D} \left\{ 2\left(N_{x(n)} + N_{y(n)} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2N_{xy(n)} \operatorname{ctg} \alpha\right) \frac{w_{n-1} - w_n (1 + \alpha_n) + w_{n+1}\alpha_n}{(1+\alpha)\, d_n d_{n+1}} + \right.
$$

$$
+ N_{y(n)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{d^2 w_n}{dy_1^2} + 2\left(N_{xy(n)} \frac{1}{\sin \alpha} - \right.
$$

$$
\left. \left. - N_{y(n)} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \frac{d}{dy_1} \left[\frac{w_{n+1}\alpha_n^2 - w_n (\alpha_{n-1}^2) - w_{n-1}}{(1+\alpha_n)\, d_n}\right] \right\}. \tag{2.6}
$$

При $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n = d_{n+1} = d_{n+2} = d$ (т. е. при $\alpha_{n-1} = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 1$) уравнение (2.6) приобретает следующий вид:

$$
\frac{2}{\sin^2 \alpha}(1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha) \frac{d^2}{dy_1^2}\left[\frac{w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}}{d^2}\right] - \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{d}{dy_1} [w_{n-2} + \right.
$$

$$
\left. + 2(w_{n-1} - w_{n+1}) - w_{n+2}] + \frac{d^3}{dy_1^3} (w_{n+1} - w_{n-1}) \right] + \frac{1}{\sin^4 \alpha} \frac{d^4 w_n}{dy_1^4} +
$$

$$
+ (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha) \frac{1}{d^4} (6w_n - 4w_{n+1} + w_{n+2} - 4w_{n-1} + w_{n-2}) =
$$

$$
= \frac{1}{D}\left[\left(N_{x(n)} + N_{y(n)} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2N_{xy(n)} \operatorname{ctg} \alpha\right) \frac{w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}}{d} + \right.
$$

$$
\left. + N_{y(n)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{d^2 w_n}{dy_1^2} + \frac{1}{d}\left(N_{xy(n)} \frac{1}{\sin \alpha} - N_{y(n)} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \frac{d}{dy_1} (w_{n+1} - w_{n-1}) \right], \tag{2.7}
$$

где $N_{x(n)}$, $N_{y(n)}$, $N_{xy(n)}$ — интенсивности сил, параллельных прямоугольных осям координат x, y, на линии n.

При составлении уравнений в полярных и косоугольных координатах были использованы дифференциальные уравнения с частными производными, полученными (методом замены переменных) из дифференциального уравнения в прямоугольных координатах.

Следует отметить, что уравнения в косоугольных и полярных координатах в конечных разностях по переменным x_1 и θ содержат нечетные производные от w не только при сдвигающих силах N_{xy}, но также в левых частях уравнений (2.6) и (2.7). Это, как известно, является фактором, усложняющим решение и поэтому его нужно учитывать при выборе той переменной, в отношении которой w ищется в дискретной форме.

§ 3. ОБ УДОВЛЕТВОРЕНИИ УСЛОВИЯМ НА КОНТУРЕ И ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Условия на контуре различно удовлетворяются на гранях пластины, параллельных линиям деления, и на гранях, пересекающихся с ними. На грани, параллельной линиям деления контурные условия удовлетворяются сплошь по всей грани уже при составлении конечно-разностных дифференциальных уравнений для линии, находящейся в непосредственном соседстве с наружной гранью или совпадающей с ней, пользуясь вводимыми фиктивными линиями. Суть этого объясним на примере прямоугольной пластины (рис. 4).

При составлении уравнения (2.1) или (2.2) для линии 1 (рис. 4), кроме нее, вовлекаются действительные линии 2, 3, 0 и фиктивная 0′.

Пусть грань O связана с жёсткой опорой. Тогда w_0 известно: $w_0 = 0$. Уравнение w_0 для фиктивной линии 0′ находится из второго условия на грани O, а именно, если грань O, например, абсолютно защемлена, то на ней $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ или в конечных разностях $\frac{w_{0'} - w_1}{2d} = 0$, откуда

$$
w_{0'} = w_1. \tag{3.1}
$$

Если грань O шарнирно связана с опорой, то на ней $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ или в конечных разностях $\frac{w_{0'} - 2w_0 + w_1}{d^2} = 0$, откуда при $w_0 = 0$ имеем

$$w_{0'} = -w_1. \tag{3.2}$$

Равенством (3.1) или (3.2) уравнение $w_{0'}$ выражается через w_1 и таким образом $w_{0'}$ исключается.

Когда грань O свободна или упруго оперта, так что уравнение w_0 на этой грани неизвестно, то дифференциальные уравнения в конечных разностях по одной переменной составляются также для этой грани.

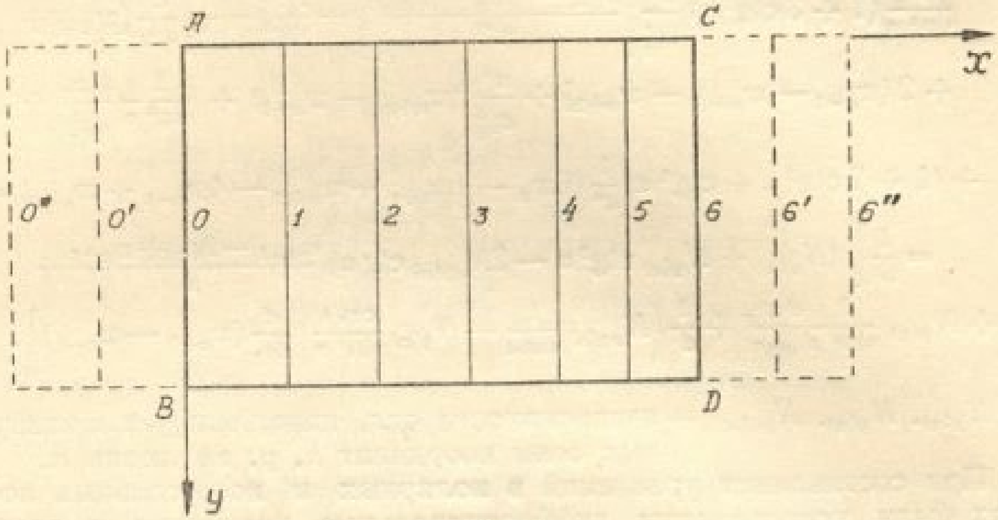

Рис. 4.

При этом вовлекаются уже две фиктивные линии 0′ и 0″. Их уравнения изгиба $w_{0,}$ и $w_{0'}$ определяются из двух условий на грани 0. Например, если она свободная, то на ней $M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$ и $Q_{xz} = D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2}\right] = 0$ или в конечных разностях по переменной x при $\alpha_{n-1} = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 1$

$$\frac{w_{0'} - 2w_0 + w_1}{d^2} + \nu \frac{d^2 w_0}{dy^2} = 0 \tag{3.3}$$

и

$$\frac{w_{0''} + 2w_{0'} - 2w_1 + w_2}{2d^3} + \frac{2-\nu}{2d}\frac{d^2}{dy^2}(-w_{0'} + w_1) = 0. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3) и (3.4) позволяют выразить $w_{0'}$ и $w_{0''}$ через w_0, w_1, w_2, и тогда $w_{0'}$ и $w_{0''}$ исключаются из основных дифференциальных уравнений, составленных в конечных разностях по одной переменной x.

На гранях, пересекающихся с линиями деления, условия на контуре удовлетворяются в их точках пересечения с гранями.

Из этих условий определяются произвольные постоянные интегрирования дифференциальных уравнений. Количество условий на контуре в точках пересечения линий деления с гранями и количество произвольных постоянных интегрирования всегда совпадают. Для сплошных круглых пластин их центральные точки следует рассматривать как контурные. Кроме того, в круглых пластинах при применении конечных разностей по переменной ρ_1 нет пересечения линий деления с гранями пластин. Поэтому произвольные постоянные интегрирования находятся из условий замкнутости круговых линий. Они заключаются в том, что при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ совпадают w, w', w'' и w'''.

В задачах устойчивости уравнения, вытекающие из условий на контуре, будут однородными. Положив равным нулю детерминант системы этих уравнений, получаем уравнение для определения критической нагрузки.

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН НА УПРУГОЙ ПОСТЕЛИ[1]

Пусть постель следует гипотезе о линейной пропорциональности между давлением в данной точке и ее перемещением. В таком случае изгиб пластины, нагружённой силами в срединной плоскости, описывается уравнениями (2.1), (2.2) или (2.3), (2.4), если к ним в левую часть добавить член $(kw)_n$, где k — коэффициент постели.

Всё дальнейшее в смысле определения критических сил протекает так, как это уже было изложено ранее для пластин, не лежащих на упругой постели.

§ 5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько примеров, цель которых показать практическое приложение вышеизложенного метода и степень точности получаемых при этом результатов.

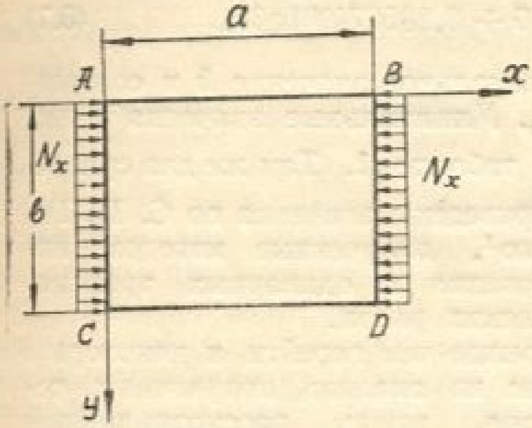

Рис. 5.

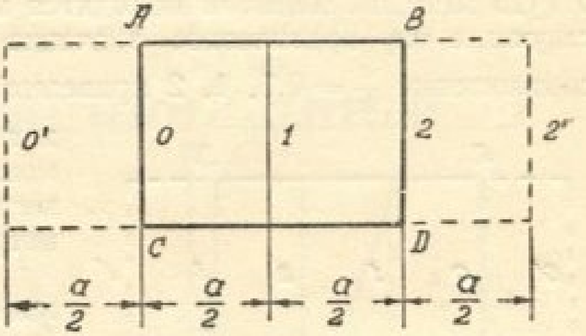

Рис. 6.

№ 1. Прямоугольная пластина равномерно сжата силами N_x (*кг/см*), приложенными к граням, параллельным оси y (рис. 5). Нагруженные грани свободно оперты, из двух других одна грань свободно оперта, а другая — свободная. Вводим одну линию 1, разделяющую пластину на две полосы, каждая шириной $d = \frac{a}{2}$ (рис. 6). Фиктивные линии 0′ и 2″ по условиям симметрии имеют одинаковые прогибы w, $N_y = N_{xy} = 0$.

Из условий $M_y = 0$ на гранях AC и BD вытекает

$$w_{2'} = -w_{1'}. \tag{5.1}$$

Вследствие чего согласно (2.2) для линии 1 имеем

$$\frac{d^4 w_1}{dy^4} - \frac{16}{d^2}\frac{d^2 w_1}{dy^2} - \frac{8N_x w_1}{Dd^2} + \frac{64 w_1}{d^4} = 0. \tag{5.2}$$

Из этого уравнения подстановкой $w_1 = Ae^{sy}$ находим

$$w_1 = c_1 e^{-\alpha y} + c_2 e^{\alpha y} + c_3 \cos\beta y + c_4 \sin\beta y, \tag{5.3}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}}; \quad \beta = \sqrt{-\frac{8}{a^2} + \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}}. \tag{5.4}$$

[1] Имеется в виду постель с линейной пропорциональностью

Интересно отметить, что таким же получается интеграл при решении рассматриваемого нами примера по методу интегрирования в одинарных тригонометрических рядах, с той лишь разницей, что вместо числа 8 в коэффициентах α и β содержится число π^2 (для первой критической силы).

Для постоянных интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 из четырех условий

$$y=0\left|\begin{matrix} w=0 \\ M_x=0\end{matrix}\right.; \quad y=b\left|\begin{matrix} M_x=0 \\ Q_{yz}=0\end{matrix}\right.$$

получается система однородных уравнений. Из условия равенства нулю ее детерминанта вытекает (при $\nu=0{,}25$)

$$\beta\left(\alpha^2-\frac{2}{a^2}\right)^2 th\alpha b=\alpha\left(\beta^2-\frac{2}{a^2}\right)\operatorname{tg}\beta b. \tag{5.5}$$

Таким же это уравнение получается по методу интегрирования в одинарных тригонометрических рядах.

При

$$\frac{N_x}{D}=k\frac{\pi^2}{a^2} \tag{5.6}$$

оно приводится к виду

$$\frac{\beta}{\alpha}(6+8{,}88567k)^2 th\alpha b=(-6+8{,}88567k)^2\operatorname{tg}\beta b, \tag{5.7}$$

откуда методом попыток находится минимальное значение k и соответствующее ему критическое значение N_x. Минимальные значения k для соотношений $\frac{a}{b}=0{,}5$, 1, 2 приведены в таблице 1. Там же для сравнения приведены значения по С. П. Тимошенко[1], полученные методом интегрирования в одинарных тригонометрических рядах.

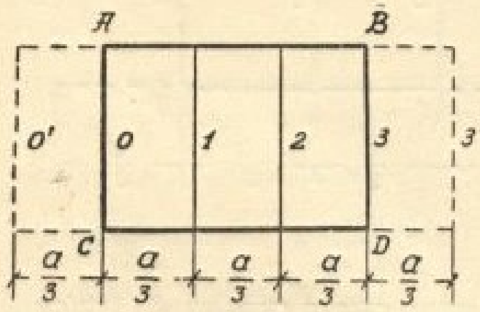

Рис. 7.

Прежде чем перейти к некоторым выводам из анализа полученных результатов, решим рассматриваемый нами пример, разделив пластину на три равные части введением линий 1 и 2 и фиктивных линий 0′ и 3′ (рис. 7).

Учитывая симметрию и условие $M_y=0$ на грани 0, из которого следует $w_{0'}=-w_1$, дифференциальное уравнение (2.2) применительно к линии 1 записываем в виде

$$\frac{d^4w_1}{dy^4}-\frac{18}{a^2}\frac{d^2w_1}{dy^2}+\frac{9w_1}{a^2}\left(\frac{9}{a^2}-\frac{N_x}{D}\right)=0. \tag{5.8}$$

Интеграл этого уравнения такой же, как и уравнения (5.2), но

$$\alpha=\sqrt{\frac{9}{a^2}+\sqrt{\frac{9N_x}{a^2D}}};\quad \beta=\sqrt{-\frac{9}{a^2}+\sqrt{\frac{9N_x}{a^2D}}}. \tag{5.9}$$

Следует заметить, что при делении пластин на две равные полосы в выражениях α и β содержалось число 8, а при делении пластины на три равные полосы в них содержится число 9, что уже ближе к π^2, чем 8.

[1] С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем, Госстройиздат, 1946, стр. 304, таблица 32. Следует учесть, что последняя составлена, следуя формуле $\frac{N_x}{D}=k\frac{\pi^2}{b_2}$, а не формуле (5.6).

Получающиеся минимальные значения k даны в таблице 1.

Таблица 1

Метод решения	$\frac{a}{b}=2$	$\frac{a}{b}=1$	$\frac{a}{b}=0{,}5$
Значения k по С. П. Тимошенко	2,792	1,44	1,1
Значения k при делении пластины на две равные полосы	2,59 % ошибки=7,23	1,25 % ошибки=13,2	0,912 % ошибки=17,09
Значения k при делении пластины на три равные полосы	2,722 % ошибки=2,51	1,346 % ошибки=6,53	1,01 % ошибки=8,18

Из анализа данных этой таблицы заключаем:

1. Решение в конечных разностях по одной из переменных тем ближе к точному, чем больше отношение $\frac{a}{b}$. Отсюда вытекает, что линию деления следует располагать параллельно короткой грани пластины.

2. Точность решения в конечных разностях по одной из переменных быстро нарастает с увеличением количества линий деления. Так, с переходом от одной к двум линиям деления процент ошибки уменьшается в три с лишним раза и колеблется в пределах от 2,5 до 8, что вообще приемлемо для практических расчетов. При этом важно отметить, что в отличие от вариационных методов, данный метод дает значения критических сил ниже истинных.

3. При расположении линий деления параллельно короткой стороне пластины можно улучшить точность решения.

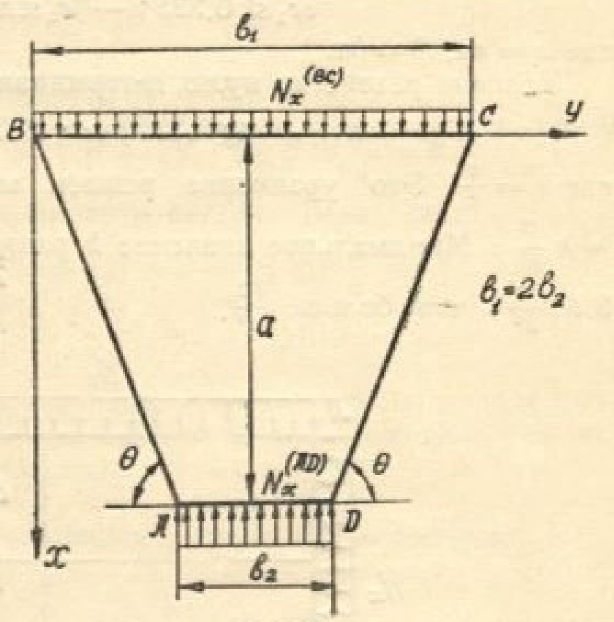

Рис. 8.

Отметим, что для получения одной и той же степени точности решения при расположении линий параллельно защемленным граням пластины потребуется большее число этих линий, чем при расположении их параллельно незащемленным граням.

Это связано с тем, что при наличии перегибов в изогнутой поверхности пластины требуется при использовании конечных разностей более густая сетка для получения необходимой точности.

№ 2. Трапецевидная пластина (рис. 8), защемленная по всему контуру, сжата равномерно распределенными силами на гранях BC и AD имеющими интенсивности N_x.

Из всех трех составляющих тензора напряжений плосконапряженного состояния N_x, N_y, N_{xy} учитываем, следуя П. Ф. Папковичу, только одну основную составляющую N_x.

Вводим одну линию деления 1 посредине пластины[1] и фиктивные ли-

[1] Параллельно нагруженным граням, как в пластине рис. 6.

нии $0'$, $2'$ со стороны граней BC и AD. Из условия $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ на линиях 0 и 2 вытекает $w_0 = w_1$; $w_2' = w_1$.

На линиях 0 и 2 $w_0 = w_2 = 0$. Учитывая эти условия, а также что $N_y = N_{xy} = 0$; $d = \frac{a}{2}$, дифференциальное уравнение (2.6) применительно к линии 1, где $N_x(1) = \frac{2}{3} N_x$[1], записываем в виде

$$\frac{d^4 w_1}{dy^4} - \frac{16}{d^2}\frac{d^2 w_1}{dy^2} + \frac{1}{d^4}\left(128 - \frac{16}{3}\frac{N_x d^2}{D}\right) = 0. \qquad (5.10)$$

Так как $\frac{N_x}{D} > \frac{12}{d^2}$ (в чем убеждают нас конечные результаты), то интеграл уравнения (5.10) совпадает по типу с интегралом уравнения (5. 2), то есть имеет выражение (5.3).

При этом

$$\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{8 + \sqrt{\frac{16}{3}\frac{N_x d^2}{D} - 64}}\,; \quad \beta = \frac{1}{a}\sqrt{-8 + \sqrt{\frac{16}{3}\frac{N_x a^2}{D} - 64}}\,. \qquad (5.4)$$

Из граничных условий в точках $y = \pm 0{,}75\ b_2$, где $w_1 = 0$ и $\frac{dw_1}{dy} = 0$, получаем $c_2 = c_4 = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} c_1 ch\, 0{,}375\,\dot{\alpha} + c_3 \cos 0{,}375\,\dot{\beta} &= 0 \\ \alpha c_1 sh\, 0{,}375\,\dot{\alpha} - \beta c_3 \sin 0{,}375\,\dot{\beta} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (5.12)$$

где $\dot{\alpha} = \alpha a$; $\dot{\beta} = \beta a$.

Условие равенства нулю детерминанта системы (5.12) дает

$$\operatorname{tg} 0{,}375\,\dot{\beta} = \gamma\, th\, 0{,}375\,\dot{\alpha}, \qquad (5.13)$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. Это уравнение решаем методом попыток, полагая $\frac{N_x}{D} = k\frac{8}{a^2}$. Минимальное значение k равно 7,2, т. е. $\frac{N_x}{D} = 7{,}2\,\frac{8}{a^2}$ или $\frac{N_x}{D} = 5{,}84\,\frac{\pi^2}{a^2}$, что больше $\frac{12}{a^2}$.

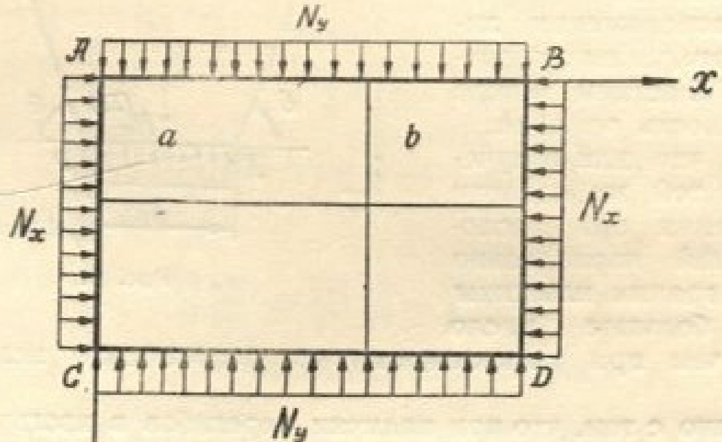

Рис. 9.

Для стержня длиною a постоянного сечения, защемленного на обоих концах, по Эйлеру $\frac{N_x^э}{D} = 4\,\frac{\pi^2}{a^2}$, т. е. $\frac{N_x}{N п_x^э} = \frac{5{,}84}{4} = 1{,}46$.

№ 3. Прямоугольная пластина сжата по двум направлениям равномерно распределенными нормальными силами по контуру (рис. 9).

[1] Здесь $N_x = N_x AD$.

Линией 1[1] делим пластину на две равные полосы. Грани AB и CD предполагаются свободно опертыми. Получаемые при этом результаты позволяют найти решение для пластины, у которой грани AB и CD абсолютно защемлены заменой выражений α и β на другие ($\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$), соответствующие условиям защемления граней AB и CD.

Приводим основные уравнения устойчивости при делении пластины на две равные полосы линией 1 для некоторых случаев опирания сжатых по двум направлениям прямоугольных пластин, не имеющих еще решения.

А. Грань AB свободно оперта, грань CD свободна

Условия на этих гранях:

$$y = 0 \left| \begin{aligned} & w_1 = 0 \\ & \frac{d^2 w_1}{dy^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

или

$c_1 + c_3 = 0; \; -\alpha^2 c_1 + \beta^2 c_3 = 0$, откуда $c_1 = c_3 = 0$;

$$y = b \left| \begin{aligned} & \frac{d^2 w_1}{dy^2} + \frac{\nu(-w_1)}{a^2} = 0 \\ & \frac{d^3 w_1}{dy^3} + \frac{2-\nu}{a^2} \frac{d(-w_1)}{dy} = 0, \end{aligned} \right.$$

или при $c_1 = c_3 = 0$

$$\left. \begin{aligned} & c_2 (-\alpha^2 - \nu) \sin \alpha \frac{b}{2} + c_4 (\beta^2 - \nu) \operatorname{sh} \beta \frac{b}{a} = 0; \\ & c_2 (-\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\nu) \cos \alpha \frac{b}{a} + c_4 (\beta^2 - 2\beta + \beta\nu)\, \beta \operatorname{ch} \frac{b}{a} = 0 \end{aligned} \right\} . \tag{5.13}$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (5.13) дает

$$\frac{\beta}{\alpha} \left| \alpha^2 (-\beta^2 + 2 - \nu) + \nu (-\beta^2 + 2 - \nu) \right| \operatorname{tg} \alpha \frac{b}{a} =$$

$$= - [\beta^2 (\alpha^2 + 2 - \nu) + \nu (-\alpha^2 - 2 + \nu)] \operatorname{th} \beta \frac{b}{a} .$$

Это уравнение легко решить методом попыток, воспользовавшись для первого приближения теми значениями α и β, которые уже известны для одноосного сжатия пластины.

Б. Грань AB абсолютно защемлена, грань CD — свободна

Условия на этих гранях:

$$y = 0 \left| \; w_1 = 0; \; \frac{dw_1}{dy} = 0; \; y = b \right| \begin{aligned} & \frac{d^2 w_1}{dy^2} + \frac{\nu(-w_1)}{a^2} = 0 \\ & \frac{d^3 w_1}{dy^3} + \frac{(2-\nu)}{a^2} \frac{d(-w_1)}{dy} = 0 \end{aligned} ,$$

откуда

$$c_1 + c_3 = 0;$$
$$\alpha c_2 + \beta c_4 = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} & c_1 (-\alpha^2 - \nu) \cos \alpha \frac{b}{a} + c_2 (-\alpha^2 - \nu) \sin \frac{b}{a} + c_3 (\beta^2 - \nu) \operatorname{ch} \beta \frac{b}{a} + \\ & \quad + c_4 (\beta^2 - \nu) \operatorname{sh} \beta \frac{b}{a} = 0. \\ & c_1 (\alpha^2 + 2\alpha - \nu) \sin \alpha \frac{b}{a} + c_2 (-\alpha^3 - 2\alpha + \nu\alpha) \cos \alpha \frac{b}{a} + \\ & \quad + c_3 (\beta^2 - 2\beta + \nu\beta) \operatorname{sh} \beta \frac{b}{a} + c_4 (\beta^3 - 2\beta + \nu\beta) \operatorname{ch} \beta \frac{b}{a} = 0 \end{aligned} \right\} . \tag{5.14}$$

[1] Параллельный оси y.

Из условия равенства нулю детерминанта системы (5.14) вытекает

$$[\alpha^2(\beta^2-\nu)(\alpha^2+2-\nu)+\beta^2(-\alpha^2-\nu)(\beta^2-2+\nu)]\sin\alpha\frac{b}{a}\sin\alpha\frac{b}{a}\times$$
$$\times\operatorname{ch}\beta\frac{b}{a}-\alpha\beta[(\beta^2-\nu)(-\alpha^2-2+\nu)+(-\alpha^2-\nu)(\beta^2-2-$$
$$-\nu)]\cos\alpha\frac{b}{a}\operatorname{ch}\beta\frac{b}{a}+\alpha\beta[(-\alpha^2-\nu)(-\alpha^2-2-\nu)+(\beta^2-$$
$$-\nu)(\beta^2-2+\nu)]=0. \tag{5.15}$$

В. Грань AB абсолютно защемлена, грань CD свободно оперта

Условия на этих гранях:

$$\left.\begin{aligned}&C_1+C_3=0;\\&\alpha C_2+\beta C_4=0;\\&C_1\cos\alpha\frac{b}{a}+C_2\sin\alpha\frac{b}{a}+C_3h\beta\frac{b}{a}+C_4\operatorname{sh}\beta\frac{b}{a}=0;\\&-\alpha C_1\cos\alpha\frac{b}{a}-\alpha^2C_2\sin\alpha\frac{b}{a}+\beta^2C_3\operatorname{ch}\beta\frac{b}{a}+\beta^2C_4\operatorname{sh}\beta\frac{b}{a}=0.\end{aligned}\right\}\tag{5.16}$$

Равенство нулю детерминанта системы (5.16) дает

$$\beta\sin\alpha\frac{b}{a}\operatorname{ch}\beta\frac{b}{a}-\alpha\cos\alpha\frac{b}{a}\operatorname{sh}\beta\frac{b}{a}=0;$$

или

$$\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha\frac{b}{a}=\operatorname{th}\beta\frac{b}{a}. \tag{5.17}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный метод позволяет по определенному правилу получить в аналитической форме, с достаточной для практики точностью, решения задач устойчивости пластин с различными очертаниями и условиями на контуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Известия АН СССР, № 5, VII сер., 1933; Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Методы приближенного решения уравнения в частных производных, 1936

2. М. Г. Слободянский. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикладная математика и механика. Т. VII, вып. 1, 1939.

3. М. Г. Слободянский. Пространственные задачи теории упругости для призматических тел. Уч. зап. МГУ, Механика, вып. 39, 1940.

4 В. Н. Фадеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды математического ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 28, 1949, стр. 73—103.