

Ю. П. ПЕТРОВ

РАСЧЕТ НА ИЗГИБ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН
ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

Решение рассматриваемой задачи дискретным методом приводит к громоздким системам линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка. Оно значительно упрощается, если изогнутую поверхность пластины описать не одним дифференциальным уравнением 4-го порядка, а системой из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Это дает следующие преимущества:

1) повышается точность решения задачи, поскольку для получения системы дифференциальных уравнений дискретного метода привлекаются только конечно-разностные выражения вторых производных;

2) интегрирование системы дифференциальных уравнений дискретного метода с помощью методов матричного исчисления значительно упрощается;

3) некоторые элементы изгибающих моментов в сечениях пластины получаются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений дискретного метода, а не дифференцированием функции прогибов пластины;

4) вычисление изгибающих моментов M_x и M_y , а также определение постоянных интегрирования при любых граничных условиях на гранях AD и BC (рис. 1) осуществляется без использования конечно-разностных формул.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА

Рассмотрим прямоугольную пластину размерами $2a \times 2b$ (рис. 1), нагруженную распределенной нагрузкой $q(x, y)$, с произвольными граничными условиями. Положим, что задача несимметрична относительно осей x и y .

Дифференциальное уравнение

$$D \Delta \Delta W(x, y) = q(x, y) \quad (1.1)$$

представим системой из двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta M(x, y) &= -q(x, y) \\ D \Delta W(x, y) &= -M(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где W — функция прогибов пластины, $M = \frac{1}{1+\nu}(M_x + M_y)$, M_x и M_y — изгибающие моменты в сечениях пластины нормальных к осям x и y , ν — коэффициент Пуассона.

Разобьем пластину на полосы $n+2$ прямыми, с расстоянием между ними $h = \frac{2a}{n+1}$ (прямые 0 и $n+1$ проходят по граням AB и CD).

Для прямой i , т. е. при $x = x_i$, система (1.2) запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_i}{dy^2} + \frac{d^2 M_i}{dx^2} &= -q_i \\ \frac{d^2 W_i}{dy^2} + \frac{d^2 W_i}{dx^2} &= -\frac{1}{D} M_i \end{aligned} \right\}. \quad (1.3)$$

Заменим в (1.3) производные $\frac{d^2 M_i}{dx^2}$ и $\frac{d^2 W_i}{dx^2}$ их конечно-разностными выражениями, которые получаются при «скользящей» интерполяции функций M и W степенным полиномом второй степени [1]. В результате получим две системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_i}{dy^2} + \frac{1}{h^2} (M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}) &= -q_i \\ \frac{d^2 W_i}{dy^2} + \frac{1}{h^2} (W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}) &= -\frac{1}{D} M_i \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

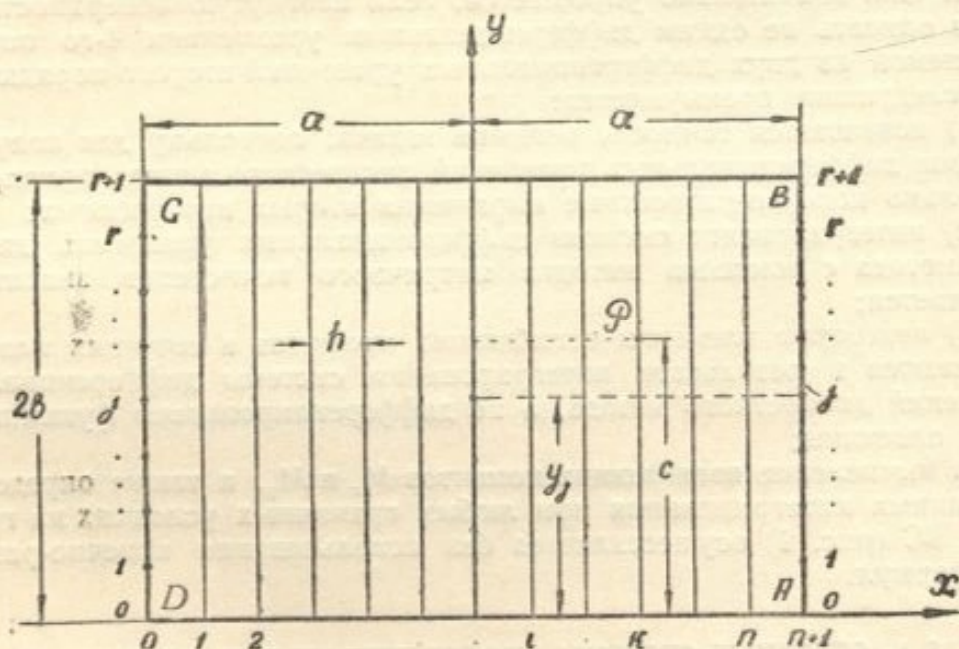


Рис. 1.

которые приближенно представляют систему дифференциальных уравнений (1.2), а следовательно, дифференциальное уравнение (1.1).

Системы (1.4) содержат $2n + 4$ неизвестных функции при $2n$ дифференциальных уравнениях. Четыре функции: W_0 , M_0 , W_{n+1} и M_{n+1} , именуемые в дальнейшем «контурными», представляют собой функции W и M , соответственно при $x = -a$ и $x = a$.

Переносим в правые части систем (1.4) все «контурные» функции и полученные системы дифференциальных уравнений записываем в матричном виде

$$\left. \begin{aligned} M'' + \frac{1}{h^2} DM &= -q - \frac{1}{h^2} (\psi_0 + \psi_{n+1}) \\ W'' + \frac{1}{h^2} DW &= -\frac{1}{D} M - \frac{1}{h^2} (\varphi_0 + \varphi_{n+1}) \end{aligned} \right\}, \quad (1.5)$$

где $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$, $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$,
 $\psi_0 = (M_0, 0, \dots, 0)$, $\psi_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, M_{n+1})$,
 $\varphi_0 = (W_0, 0, \dots, 0)$, $\varphi_{n+1} = (0, \dots, 0, W_{n+1})$.

$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — столбцевые матрицы;

$$D = \begin{bmatrix} -2, & 1, 0, & \dots & 0 \\ 1, & -2, 1, 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots & \dots & 0, 1, -2 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем системы (1.5) в две такие системы, которые состояли бы из независимых дифференциальных уравнений. Для этого необходимо матрицу D привести к диагональному виду. Пусть преобразующей матрицей будет матрица B . Элементы ее известны из [3], а именно:

$$b_{ks} = (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi ks}{n+1} \quad (k, s = 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку матрица D симметрична, $B = B^{-1}$. Тогда

$$D = B\lambda B, \quad (1.6)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{n+1} \right) \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив (1.6) в (1.5) и выполнив несложные преобразования, приходим к двум системам из независимых дифференциальных уравнений, которые компактно запишем в виде системы из двух матричных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= -Bq - \frac{1}{h^2} B (\psi_0 + \psi_{n+1}) \\ U'' - \alpha^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B (\varphi_0 + \varphi_{n+1}) \end{aligned} \right\}, \quad (1.7)$$

где $V = BM$, $U = BW$ — столбцевые матрицы;

$\alpha^2 = -\frac{1}{h^2} \lambda$ — диагональная матрица.

Определив из второго матричного дифференциального уравнения системы (1.7) функцию-столбец V и подставив ее в первое дифференциальное уравнение, найдем

$$\begin{aligned} U^{IV} - 2\alpha^2 U'' + \alpha^4 U &= \frac{1}{D} Bq + \frac{1}{Dh^2} B (\psi_0 + \psi_{n+1}) - \\ &- \frac{1}{h^2} B (\varphi_0'' + \varphi_{n+1}'') - \frac{\lambda}{h^4} B (\varphi_0 + \varphi_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Более точную систему матричных дифференциальных уравнений получим, если воспользуемся соотношениями, приведенными в работе [2]. Опуская промежуточные преобразования, приводим конечный результат:

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= -Bq - \frac{1}{12 + \lambda} B \left\{ \psi'' + \frac{12}{h^2} \psi + Q \right\} \\ U'' - \alpha^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left\{ \varphi'' + \frac{12}{h^2} \varphi + \frac{1}{D} \psi \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

где $\alpha^2 = -\frac{\lambda}{h^2 \left(E + \frac{1}{12} \lambda \right)}$ — диагональная матрица;

$$\left(E + \frac{1}{12} \lambda \right) = BAB;$$

E — единичная матрица,

$$A = \begin{vmatrix} \frac{5}{6}, & \frac{1}{12}, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ \frac{1}{12}, & \frac{5}{6}, & \frac{1}{12}, & 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \dots & \frac{1}{12}, & \frac{5}{6} \end{vmatrix},$$

$$\Psi = \psi_0 + \psi_{n+1}, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_{n+1}, \quad Q = Q_0 + Q_{n+1}, \quad Q_0 (q_0, 0, \dots, 0), \quad Q_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, q_{n+1}).$$

Из (1.9) следует

$$U^{IV} - 2\alpha^2 U'' + \alpha^4 U = \frac{1}{D} Bq + \frac{12}{12+\lambda} BR, \quad (1.10)$$

где

$$R = -\frac{1}{12} \varphi^{IV} - \frac{1}{h^2} \frac{6+\lambda}{6} \frac{12}{12+\lambda} \varphi'' - \frac{1}{h^4} \frac{12}{12+\lambda} \varphi - \frac{1}{Dh^2} \frac{12}{12+\lambda} \psi + \frac{1}{12D} Q.$$

Рассмотрим случай, когда граничные условия на гранях AB и CD (рис. 1) одинаковы. Тогда, как известно, целесообразно внешнюю нагрузку представить суммой нагрузок: симметричной относительно оси y и обратнoсимметричной относительно той же оси, т. е.

$$q = q_{(c)} + q_{(oc)}.$$

В соответствии с этим, пользуясь принципом наложения решений, вместо одной задачи имеем две более простые: симметричную и обратнoсимметричную.

А. Симметричная задача (рис. 2)

Внешняя нагрузка — $q_{(c)}$. В силу симметрии относительно оси y

$$W_0 = W_2, \quad M_0 = M_2, \quad q_0^{(c)} = q_2^{(c)}.$$

Система (1.5) для рассматриваемой задачи приобретает вид

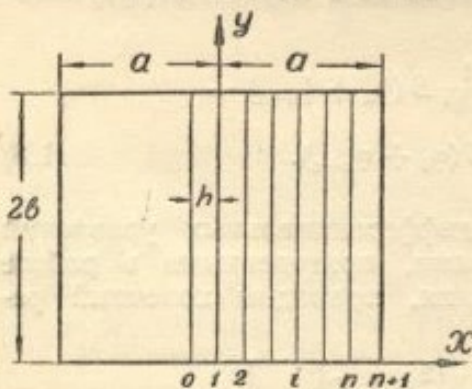


Рис. 2.

$$\left. \begin{aligned} M'' + \frac{1}{h^2} D_c M &= -q_{(c)} - \frac{1}{h^2} \psi_{n+1} \\ W'' + \frac{1}{h^2} D_c W &= -\frac{1}{D} M - \frac{1}{h^2} \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.11)$$

где

$$D_c = \begin{vmatrix} -2, & 2, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ 1, & -2, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & \dots & 0, & 1, & -2 \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести D_c к диагональному виду, необходимо знать ортонормированное преобразование с матрицей B_c и обратное ему преобразование B_c^{-1} . Элементы B_c вычисляются по формуле

$$b_{ks}^{(c)} = (-1)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi(2s-1)(n-k+1)}{2n},$$

($k, s = 1, 2, \dots, n$)

Элементы B_c^{-1} находятся как решение n алгебраических систем:

$$B_c B_c^{-1} = E.$$

Имеем:

$$B_c^{-1} D_c B_c = \lambda_c,$$

откуда

$$D_c = B_c \lambda_c B_c^{-1}, \quad (1.12)$$

где λ_c — диагональная матрица с элементами, которые определяются по формуле

$$(\lambda_c)_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi(2s-1)}{2n} \right), \\ (s = 1, 2, \dots, n).$$

Подставим (1.12) в (1.11). После преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha_c^2 V &= -B_c^{-1} q_{(c)} - \frac{1}{h^2} B_c^{-1} \varphi_{n+1} \\ U'' - \alpha_c^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B_c^{-1} \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.13)$$

где $\alpha_c^2 = -\frac{\lambda_c}{h^2}$, $V = B_c^{-1} M$, $U = B_c^{-1} W$.

Опуская выкладки, приводим систему матричных дифференциальных уравнений для рассматриваемой задачи, полученную с помощью соотношений из [2]

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha_c^2 V &= -B_c^{-1} q_{(c)} - \frac{1}{12 + \lambda_c} B_c^{-1} \left(\psi_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} \psi_{n+1} + Q_{n+1}^{(c)} \right) \\ U'' - \alpha_c^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \lambda_c} B_c^{-1} \left(\varphi_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} \varphi_{n+1} + \frac{1}{D} \psi_{n+1} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (1.14)$$

где $\alpha_c^2 = -\frac{\lambda_c}{h^2} \frac{12}{12 + \lambda_c}$, $V = B_c^{-1} M$, $U = B_c^{-1} W$.

В. Обратносимметричная задача (рис. 3)

Внешняя нагрузка — $q_{(oc)}$. Из-за обратной симметрии относительно оси y

$$W_0 = M_0 = 0.$$

Матрица D_{oc} для рассматриваемой задачи по структуре такая же, как и в системе (1.5). Поэтому при одном и том же числе прямых $D_{oc} = D$, следовательно:

$$B_{oc} = B = B^{-1} = B_{oc}^{-1}, \quad \lambda_{oc} = \lambda.$$

Система матричных дифференциальных уравнений для данной задачи

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= -B q_{(oc)} - \frac{1}{h^2} B \psi_{n+1} \\ U'' - \alpha^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.15)$$

так как $\varphi_0 = \varphi_0'' = \psi_0 = \psi_0'' = 0$.

Если воспользоваться соотношениями из [2], придем к системе

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= -B q_{(oc)} - \frac{1}{12 + \lambda} B \left(\psi_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} \psi_{n+1} + Q_{n+1}^{(oc)} \right) \\ U'' - \alpha^2 U &= -\frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left(\varphi_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} \varphi_{n+1} + \frac{1}{D} \psi_{n+1} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (1.16)$$

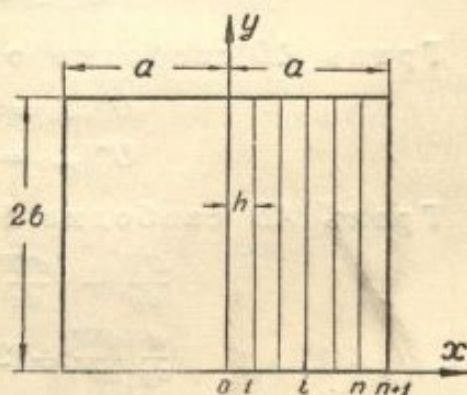


Рис. 3.

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассуждения относим к грани AD . Ради определенности положим, что граничные условия на гранях AB и CD несимметричны относительно оси y .

Грань AD жестко закреплена. На такой грани

$$W_i = 0, \frac{dW_i}{dy} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Но

$$W_i = \sum_{s=1}^n b_{is} U_s, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

Подставив (2.2) в (2.1), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} U_s \Big|_{y=0} &= 0 \\ \frac{d}{dy} \sum_{s=1}^n b_{is} U_s \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

или в матричном виде

$$BU \Big|_{y=0} = 0, \quad BU' \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.4)$$

Детерминант алгебраической системы (2.4) $\|B\| \neq 0$. Поэтому

$$U \Big|_{y=0} = 0, \quad U' \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.5)$$

Грань AD свободно оперта.

$$\left. \begin{aligned} U \Big|_{y=0} &= 0 \\ U'' \Big|_{y=0} = V \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Грань AD свободна. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W}{dy^2} + \nu \frac{d^2 W}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left[\frac{d^2 W}{dy^2} + (2 - \nu) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Из второго дифференциального уравнения системы (1.2) находим

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{1}{D} M - \frac{d^2 W}{dy^2}. \quad (2.8)$$

Посредством (2.8) уравнения системы (2.7) преобразуются к таким:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2 W_i}{dy^2} - \frac{\nu}{D(1-\nu)} M_i \right] \Big|_{y=0} &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left[\frac{d^2 W_i}{dy^2} + \frac{\nu-2}{D(\nu-1)} M_i \right] \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

Подставив в (2.9) функции $W_i = \sum_{s=1}^n b_{is} U_s$ и $M_i = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s$

($i = 1, 2, \dots, n$), с учетом того, что $\|B\| \neq 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} U'' - \frac{\nu}{D(1-\nu)} V \Big|_{y=0} &= 0 \\ U''' + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} V' \Big|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.10)$$

где U и V столбцевые матрицы.

Граничные условия (2.5), (2.6) и (2.10) дают возможность определять постоянные интегрирования для каждой пары независимых функций U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отдельно.

Аналогичное преобразование граничных условий осуществляется без труда и в случае закрепления грани пластины на упруго прогибающейся и упруго скручивающейся балке.

§ 3. «КОНТУРНЫЕ» ФУНКЦИИ

Системы дифференциальных уравнений дискретного метода в своих правых частях содержат столбцевые матрицы: $\varphi_0, \varphi_{n+1}, \psi_0$ и ψ_{n+1} (или некоторые из них). Элементами этих матриц являются «контурные» функции: W_0, W_{n+1}, M_0 и M_{n+1} , которые определяются граничными условиями на гранях AB и CD .

Свободное опирание грани AB (или CD)

На свободно опертой грани AB

$$\begin{aligned} W_{n+1} = W''_{n+1} = W^{IV}_{n+1} &= 0 \text{ и} \\ M_{n+1} = M''_{n+1} &= 0, \text{ так как } \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d^2 W}{dy^2} \Big|_{x=a} = 0. \end{aligned}$$

Обе «контурные» функции определяются. Следовательно, полагая, например, в правой части системы (1.9) $\varphi_{n+1} = \varphi''_{n+1} = \psi_{n+1} = \psi''_{n+1} = 0$, получаем систему, соответствующую задаче с выполненными граничными условиями на грани AB . В случае свободно опертой грани CD

$$\varphi_0 = \varphi''_0 = \psi_0 = \psi''_0 = 0.$$

Жесткое защемление грани AB (или CD)

На грани AB

$$\begin{aligned} W_{n+1} = W''_{n+1} = W^{IV}_{n+1} &= 0, \text{ но} \\ M_{n+1} \neq M''_{n+1} &\neq 0, \text{ так как } \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=a} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_{n+1} = \varphi''_{n+1} = 0, \text{ но } \psi_{n+1} \neq \psi''_{n+1} \neq 0.$$

Аналогично, если жестко защемлена грань CD ,

$$\varphi_0 = \varphi''_0 = 0, \psi_0 \neq \psi''_0 \neq 0.$$

«Контурная» функция M_{n+1} (или M_0) нам неизвестна. Поэтому, если решаемая задача имеет хотя бы одну из граней AB и CD жестко защемленной, интегрирование любой из систем § 1 невозможно. Чтобы получить возможность проинтегрировать систему дифференциальных уравнений дискретного метода для рассматриваемого случая граничных условий, представим «контурную» функцию M_{n+1} в интервале ее изменения степенным полиномом с неизвестными коэффициентами.

Пусть

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-2} d_k^{(n+1)} y^k. \quad (3.1)$$

Соответственно

$$M_0 = \sum_{k=0}^{m-2} d_k^{(0)} y^k. \quad (3.2)$$

Если грани AB и CD жестко заземлены одновременно, тогда:

а) для симметричной задачи $M_0 = M_{n+1}$,

б) для обратносимметричной $M_0 = -M_{n+1}$, т. е. «интерполируется» только одна «контурная» функция.

Грань AB (или CD) свободна

В этом случае

$$W_{n+1} \neq W_{n+1}'' \neq 0 \text{ и } M_{n+1} \neq M_{n+1}'' \neq 0.$$

Поэтому

$$\varphi_{n+1} \neq \varphi_{n+1}'' \neq 0 \text{ и } \psi_{n+1} \neq \psi_{n+1}'' \neq 0.$$

Имеем на свободной грани AB

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \nu \frac{d^2 W}{dy^2} = 0. \quad (3.3)$$

Подставив (2.8) в (3.3), найдем

$$M_{n+1} = -D(1-\nu) \frac{d^2 W_{n+1}}{dy^2}. \quad (3.4)$$

Положим, что

$$W_{n+1} = \sum_{k=0}^m c_k^{(n+1)} y^k. \quad (3.5)$$

Тогда, согласно (3.4),

$$M_{n+1} = D(\nu-1) \sum_{k=0}^m k(k-1) c_k^{n+1} y^{k-2}.$$

Для свободной грани CD

$$\varphi_0 \neq \varphi_0'' \neq \psi_0 \neq \psi_0'' \neq 0, \text{ но}$$

$$M_0 = -D(1-\nu) W_0''.$$

Если

$$W_0 = \sum_{k=0}^m c_k^{(0)} y^k, \quad (3.6)$$

то

$$M_0 = D(\nu-1) \sum_{k=0}^m k(k-1) c_k^{(0)} y^{k-2}.$$

При симметрии граничных условий относительно оси y : а) для симметричной задачи $W_0 = W_{n+1}$, б) для обратносимметричной $W_0 = -W_{n+1}$.

Симметрия граничных условий относительно оси x также позволяет упростить задачу, так как и в этом случае любая внешняя нагрузка может быть представлена суммой

$$q = q_x^{(c)} + q_x^{(oc)}.$$

В соответствии с этим, как и в § 1, вместо одной задачи имеем две более простые: симметричную и обратносимметричную.

Для симметричной задачи половина постоянных интегрирования при несимметричных функциях и коэффициенты при нечетных степенях y в «интерполирующих» полиномах обращаются в нуль. В обратно-симметричной задаче обращаются в нуль постоянные интегрирования при симметричных функциях и коэффициенты «интерполирующих» полиномов при четных степенях y .

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система (1.9), записанная в развернутом виде, имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - \alpha_i^2 V_i &= - \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) - \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)] - \\ &\quad - \frac{1}{12 + \lambda_i} \left[b_{i1} \left(M_0'' + \frac{12}{h^2} M_0 \right) + b_{in} \left(M_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} M_{n+1} \right) \right] \\ U_i'' - \alpha_i^2 U_i &= - \frac{1}{D} V_i - \frac{1}{12 + \lambda_i} \left[b_{i1} \left(W_0'' + \frac{12}{h^2} W_0 + \frac{1}{D} M_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_{in} \left(W_{n+1}'' + \frac{12}{h^2} W_{n+1} + \frac{1}{D} M_{n+1} \right) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Подставим в (4.1) соответствующие степенные полиномы, «интерполирующие» функции M и W на гранях AB и CD . Затем сгруппируем правые части полученной системы относительно степеней y . В результате преобразований система (4.1) переписывается так:

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - \alpha_i^2 V_i &= - q_i^{(r)}(y) - \sum_{k=0}^{m-2} \xi_k^{(i)} y^k \\ U_i'' - \alpha_i^2 U_i &= - \frac{1}{D} V_i - \sum_{k=0}^m \eta_k^{(i)} y^k \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

где коэффициенты $\xi_k^{(i)}$ и $\eta_k^{(i)}$ являются линейными комбинациями коэффициентов «интерполирующих» полиномов. Интегрирование системы (4.2) осуществляется без труда. Опуская подробности, приведем конечные результаты.

$$\begin{aligned} V_i &= A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i y + A_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i y - \frac{1}{\alpha_i} \int_0^y q_i^{(r)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (y-t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m-2} \xi_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(y) = A_1^{(i)} X_1^{(i)} + A_2^{(i)} X_2^{(i)} - V_i^{(r)}(y) - \bar{V}_i(y), \\ U_i &= B_1^{(i)} X_1^{(i)} + B_2^{(i)} X_2^{(i)} - \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{1}{2\alpha_i} y \operatorname{sh} \alpha_i y - \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left(\frac{1}{2\alpha_i} y \operatorname{ch} \alpha_i y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i y \right) + \frac{1}{D\alpha_i} \int_0^y V_i^{(r)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (y-t) dt + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{m-2} \xi_k^{(i)} \chi_k^{(i)}(y) - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^m \eta_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(y) = B_1^{(i)} X_1^{(i)} + B_2^{(i)} X_2^{(i)} - \frac{1}{D} A_1^{(i)} Y_1^{(i)} - \\ &\quad - \frac{1}{D} A_2^{(i)} Y_2^{(i)} + U_i^{(r)}(y) + \bar{U}_i(y), \end{aligned}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

где

$$\varphi_k^{(i)}(y) = \int_0^y t^k \operatorname{sh} \alpha_i(y-t) dt, \quad \chi_k^{(i)}(y) = \int_0^y \varphi_k^{(i)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i(y-t) dt.$$

При любом значении y функции $\varphi_k^{(i)}(y)$ и $\chi_k^{(i)}(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) легко вычисляются, так как связаны рекуррентно. Так, если есть

$$\varphi_0^{(i)}(y) = \frac{1}{\alpha_i} (\operatorname{ch} \alpha_i y - 1) \quad \text{и} \quad \varphi_1^{(i)}(y) = \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_i y}{\alpha_i} - y \right),$$

тогда

$$\varphi_k^{(i)}(y) = \frac{1}{\alpha_i} \left[\frac{k(k-1)}{\alpha_i} \varphi_{k-2}^{(i)} - y^k \right] \quad (k = 2, 3, \dots, m),$$

а

$$\chi_k^{(i)}(y) = \frac{\alpha_i}{2k+2} [y \varphi_{k+1}^{(i)} - \varphi_{k+2}^{(i)}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Частные решения $\bar{V}_i(y)$ и $\bar{U}_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) могут быть найдены и способом неопределенных коэффициентов. В этом случае

$$V_i = A_1^{(i)} X_1^{(i)} + A_2^{(i)} X_2^{(i)} - V_i^{(*)}(y) - \sum_{k=0}^{m-2} \bar{\xi}_k^{(i)} y^k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\sum_{k=0}^{m-2} \bar{\xi}_k^{(i)} y^k$ — частное решение системы

$$V_i'' - \alpha_i^2 V_i = - \sum_{k=0}^{m-2} \bar{\xi}_k^{(i)} y^k \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$U_i = B_1^{(i)} X_1^{(i)} + B_2^{(i)} X_2^{(i)} - \frac{1}{D} A_1^{(i)} Y_1^{(i)} - \frac{1}{D} A_2^{(i)} Y_2^{(i)} + \\ + U_i^{(*)}(y) + \sum_{k=0}^m \bar{\eta}_k^{(i)} y^k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\sum_{k=0}^m \bar{\eta}_k^{(i)} y^k$ — частное решение системы

$$U_i'' - \alpha_i^2 U_i = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{m-2} \bar{\xi}_k^{(i)} y^k - \sum_{k=0}^m \bar{\eta}_k^{(i)} y^k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вычисление коэффициентов $\bar{\xi}_k^{(i)}$ и $\bar{\eta}_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не представляет труда.

Рассмотрим частные интегралы $V_i^{(*)}(y)$ и $U_i^{(*)}(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для некоторых видов внешней нагрузки.

1. Треугольная нагрузка $q = \frac{py}{2b}$

Все $q_i = \frac{py}{2b}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), включая q_0 и q_{n+1} , одинаковы. Поэтому при получении системы (1.9) имеем:

$$-Aq - \frac{1}{12} [Q_0 + Q_{n+1}] = -q = -\frac{py}{2b},$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — столбцевая матрица.

Следовательно, в правой части системы (4.1), вместо

$$- \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) - \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

будет

$$-\frac{12}{12+\lambda_i} \frac{py}{2b} \sum_{s=1}^n b_{is} = -\bar{\beta}_i py \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$V_i^{(*)}(y) = \frac{\bar{\beta}_i py}{a_i^2}, \quad U_i^{(*)}(y) = \frac{\bar{\beta}_i py}{D\alpha_i^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Треугольная нагрузка $q = \frac{p}{2a}(x+a)$

Имеем:

$$q_i = \frac{p}{2a}(x_i+a) = \frac{p}{2a}\bar{x}_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$q_0 = 0, \text{ т. е. } Q_0 = 0; \quad q_{n+1} = p.$$

Значит,

$$-\sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) - \frac{1}{12+\lambda_i} [b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)] =$$

$$= -\frac{p}{2a} \sum_{s=2}^n b_{is} \bar{x}_s - \frac{b_{in} p}{12+\lambda_i} = -\bar{\beta}_i p \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\bar{\beta}_i = \text{const}$.

$$V_i^{(*)} = \frac{\bar{\beta}_i p}{a_i^2}, \quad U_i^{(*)} = \frac{\bar{\beta}_i p}{D\alpha_i^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3. Равномерная нагрузка $q = \text{const}$

$$-Aq - \frac{1}{12} [Q_0 + Q_{n+1}] = -q.$$

где $q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)$. Поэтому в системе (4.1), вместо

$$-\sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) - \frac{1}{12+\lambda_i} [b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

будет

$$-\frac{12q}{12+\lambda_i} \sum_{s=1}^n b_{is} = -\beta_i q \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно,

$$V_i^{(*)} = \frac{\beta_i q}{a_i^2}, \quad U_i^{(*)} = \frac{\beta_i q}{D\alpha_i^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

4. Сосредоточенная сила P на прямой k в точке $y=c$ (рис. 1)

$$V_i^{(*)}(y) = -\frac{1}{a_i} \int_0^y \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) \text{sh } \alpha_i(y-t) dt =$$

$$= -P b_{ik} \frac{1}{a_i} \text{sh } \alpha_i(y-c) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \text{ так как } q_c = q_{n+1} = 0.$$

$$U_i^{(*)}(y) = -\frac{1}{D\alpha_i} \int_c^y V_i^{(*)}(t) \text{sh } \alpha_i(y-t) dt =$$

$$= P b_{ik} \frac{1}{2D\alpha_i^2} \left\{ (y-c) \text{ch } \alpha_i(y-c) - \frac{\text{sh } \alpha_i(y-c)}{\alpha_i} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Интегрирование системы (1.10) также не вызывает затруднений. Ее общие интегралы

$$U_i = \sum_{k=1}^4 C_k^{(i)} Y_k^{(i)} + \frac{1}{D} \int_0^y q_i^{(*)}(t) Y_4^{(i)}(y-t) dt + \bar{U}_i(y) \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

где

$$q_i^{(*)}(y) = \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(y) + \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(y) + b_{in} q_{n+1}(y)];$$

$\bar{U}_i(y)$ — частное решение, зависящее от «контурных» функций:

$$\left. \begin{aligned} Y_1^{(i)} &= \frac{1}{2} (2 \operatorname{ch} \alpha_i y - \alpha_i y \operatorname{sh} \alpha_i y), \\ Y_2^{(i)} &= \frac{1}{2\alpha_i} (3 \operatorname{sh} \alpha_i y - \alpha_i y \operatorname{ch} \alpha_i y), \\ Y_3^{(i)} &= \frac{1}{2\alpha_i^2} (y \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i y), \\ Y_4^{(i)} &= \frac{1}{2\alpha_i^3} (y \alpha_i \operatorname{ch} \alpha_i y - \operatorname{sh} \alpha_i y) \end{aligned} \right\} \text{— фундаментальные нормальные функции [4].}$$

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «КОНТУРНЫХ» ФУНКЦИЙ

Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений дискретного метода и определив постоянные интегрирования из граничных условий на гранях BC и DA , получим дискретные функции U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) выраженными через неизвестные коэффициенты степенных полиномов, «интерполирующих» функции M и W на гранях AB и CD . Чтобы окончательно решить поставленную задачу, необходимо найти неизвестные коэффициенты «интерполирующих» полиномов, т. е. определить «контурные» функции.

Коэффициенты степенных полиномов находятся при совместном решении основной и дополнительной алгебраических систем.

Основная алгебраическая система получается в результате подчинения функций U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) основным граничным условиям на гранях AB и CD (рис. 1) в отдельных точках этих граней. Дополнительная алгебраическая система получается после подчинения функций U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а также и «интерполирующих» полиномов дополнительным условиям в угловых точках A, B, C и D .

Выясним основные граничные условия, рассматривая, например, грань CD . Положим, что закрепление граней пластины относительно оси y несимметричное.

Грань CD жестко закреплена

«Контурная» функция M_0 «интерполируется» степенным полиномом (3.2), а $W_0 = 0$. На грани CD не выполняется условие

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=-a} = 0,$$

которое с помощью односторонней конечно-разностной формулы можно представить, например, так:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=-a} = \frac{1}{12h} (-25W_0 + 48W_1 - 36W_2 + 16W_3 - 3W_4) =$$

$$= \frac{1}{12h} \sum_{k=1}^4 \rho_k W_k = 0, \quad (5.1)$$

потому что $W_0 = 0$.

Подставим в (5.1) функции $W_k = \sum_{s=1}^n b_{ks} U_s$ ($k = 1, 2, \dots, 4$) и сгруппируем коэффициенты относительно функций U_s ($s = 1, 2, \dots, n$). Тогда, вместо (5.1), получим

$$\sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 p_k b_{ks} = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) является основным граничным условием на защемленной грани CD и используется для определения коэффициентов полинома (3.2). Положим в (5.2) $y = y_j$. Это даст нам алгебраическое уравнение, которое выражает собой отсутствие угла поворота на грани CD в одной ее точке. Записывая условие (5.2) в ряде точек на грани CD , т. е. записывая (5.2) при $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$), придем к основной алгебраической системе

$$\left[\sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 p_k b_{ks} \right]_{y=y_j} = 0. \quad (5.3)$$

$(j = 1, 2, \dots, r)$

Грань CD свободна

На такой грани $W_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$. «Контурная» функция W_0 «интерполируется» степенным полиномом (3.6) с неизвестными коэффициентами $c_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m$). В силу отсутствия на грани CD изгибающих моментов M_x

$$M_0 = -D(1-\nu)W_0''.$$

Невыполненным остается условие равенства нулю обобщенных срезающих сил

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]_{x=-a} = 0. \quad (5.4)$$

Из второго дифференциального уравнения (1.2) находим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{1}{D} M - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (5.5)$$

Посредством (5.5) условие (5.4) преобразуется к такому виду:

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{1}{D} \frac{\nu-2}{\nu-1} \frac{\partial M}{\partial x} \right]_{x=-a} = 0. \quad (5.6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=-a} &= \frac{1}{2h^3} (-5W_0 + 18W_1 - 24W_2 + 14W_3 - 3W_4) = \\ &= -\frac{5}{2h^3} W_0 + \frac{1}{2h^3} \sum_{k=1}^4 f_k W_k \end{aligned} \quad (5.7)$$

и

$$\frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=-a} = -\frac{25}{12h} M_0 + \frac{1}{12h} \sum_{k=1}^4 p_k M_k. \quad (5.8)$$

Подставим в (5.7) и (5.8) $W_k = \sum_{s=1}^n b_{ks} U_s$ и $M_k = \sum_{s=1}^n b_{ks} V_s$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и сгруппируем полученные суммы относительно функций U_s и V_s ($s = 1, 2, \dots, n$). С помощью преобразованных формул (5.7) и (5.8)

условие (5.6) запишется так:

$$\begin{aligned} 6 \sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} + \frac{h^2 \nu - 2}{D \nu - 1} \sum_{s=1}^n V_s \sum_{k=1}^4 p_k b_{ks} = \\ = 30W_0 + \frac{h^2 \nu - 2}{D \nu - 1} 25M_0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9), также как и (5.2), принимается нами за основное граничное условие на свободной грани CD и привлекается для определения коэффициентов $c_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m$). Записывая (5.9) в ряде точек j на грани CD , т. е. полагая в (5.9) $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$), получаем основную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \left[6 \sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} + \frac{h^2 \nu - 2}{D \nu - 1} \sum_{s=1}^n V_s \sum_{k=1}^4 p_k b_{ks} - \right. \\ \left. - 30W_0 - \frac{h^2 \nu - 2}{D \nu - 1} 25M_0 \right]_{y=y_j} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$(j = 1, 2, \dots, r)$

Основные условия на грани AB аналогичны приведенным выше с учетом того, что для грани AB

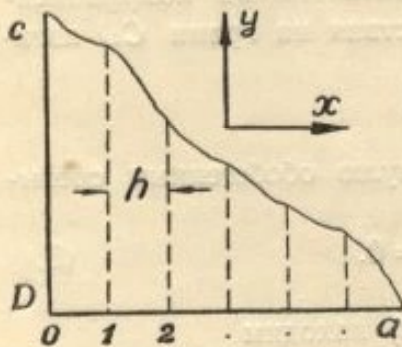


Рис. 4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \frac{25W_{n+1}}{12h} - \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 p_k b_{n+1-k, s}, \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=a} &= \frac{5}{2h^3} W_{n+1} - \frac{1}{2h^3} \sum_{s=1}^n U_s \sum_{k=1}^4 f_k b_{n+1-k, s}. \end{aligned}$$

Выпишем дополнительные условия в точке D в зависимости от условий опирания примыкающих граней Dc и Da (рис. 4).

1. Грань Dc свободно оперта. Условия опирания грани Da любые.

$$W_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

2. Грань Dc жестко закреплена. Грань Da жестко закреплена или свободно оперта.

$$W_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

3. Грань Dc жестко закреплена, Da свободна.

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

4. Грань Dc свободна, Da свободно оперта.

$$W_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

5. Грань Dc свободна, Da жестко закреплена.

$$W_0 = 0, \quad \frac{dW_0}{dy} = 0.$$

6. Грани Dc и Da свободны.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ и } M_0 = 0;$$

$$R = 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] = 0 \\ V_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{a})$$

Подставив в (а) $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, найденные из второго дифференциального уравнения (1.2), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} \frac{\partial M}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} \frac{\partial M}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

На грани Dc

$$M_0 = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}.$$

Поэтому в точке D

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} \frac{\partial M}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M_0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Итак, в точке D

$$M_0 = 0, \quad \frac{dM_0}{dy} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} \frac{\partial M}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0.$$

7. Грани Dc и Da свободны. В углу D — шарнирная опора.

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0.$$

8. Грани Dc и Da свободны. В углу D — жесткое защемление.

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

Дополнительные условия, которые представлены частными производными от W по x , при решении конкретной задачи должны быть записаны с помощью конечно-разностных формул подобно тому, как это делалось выше при рассмотрении основных граничных условий.

Таким образом, наложение на системы функций U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) связей, обусловленных основными и дополнительными алгебраическими системами, дает возможность определить системы функций W_i и M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяющими дискретно тем граничным условиям на гранях AB , CD и в точках A , B , C и D , которые остались невыполненными из-за неопределенности некоторых «контурных» функций.

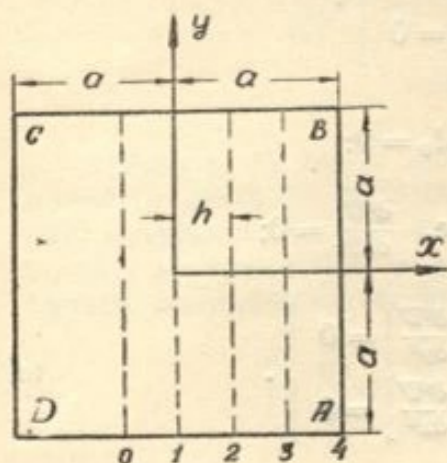


Рис. 5.

Ниже, в таблице, приведены некоторые результаты расчета пластины размерами $2a \times 2a$ (рис. 5), нагруженной равномерной нагрузкой $q = \text{const}$. При решении примеров интегрировалась система (1.14). Число прямых бралось равным трем, т. е. $n = 3$. В случае пластинки с жестко зашумленными гранями «контурная» функция M_4 была представлена степенными полиномом

$$M_4 = \sum d_k y^k = d_0 + d_2 y^2 + d_4 y^4.$$

Для сравнения в таблице приведены также соответствующие данные расчета аналогичных примеров, взятые из работы [5].

 $\nu = 3$

Таблица 1

Граничные условия	Решение	Прогибы в qa^4/D	Моменты в qa^3			
			$M_x _{x=y=0}$	$M_y _{x=y=0}$	$M_x _{y=0}$ $ _{x=a}$	$M_y _{y=a}$ $ _{x=0}$
Жесткое защемление всех граней	По дискретному методу	0,0201	0,0910	0,0910	-0,2120	-0,2115
	По С. П. Тимошенко	0,0202	—	—	-0,2050	-0,2050
Свободное опирание всех граней	По дискретному методу	0,0650	0,1915	0,1915	0	0
	По С. П. Тимошенко	0,0649	0,1916	0,1916	0	0
Грани AB и CD свободно оперты, грани BC и AD жестко зашумлены	По дискретному методу	0,0306	0,0980	0,1328	0	0,2793
	По С. П. Тимошенко	0,0306	0,0960	0,1320	0	0,2800
Грани AB и CD свободно оперты, грани BC и AD свободны	По дискретному методу	0,2094	0,4900	—	0	—
	По С. П. Тимошенко	0,2095	0,4650	—	0	—

ВЫВОДЫ

Дискретный метод позволяет по определенному алгоритму получить несложное решение задачи об изгибе упругой пластины при разнообразных граничных условиях и внешних нагрузках.

Сравнение результатов показывает, что даже небольшое число прямых обеспечивает точность, вполне удовлетворительную для практических расчетов как по прогибам, так и по изгибающим моментам. С введением большего числа прямых, что не усложняет решения задачи, дискретным методом можно пользоваться для более точного исследования напряженно-деформированного состояния упругих пластин.

Дискретный метод легко распространяется на решение задач об изгибе упругих круглых пластин, секториальных, лежащих на упругом основании, ортотропных, трапецевидных и др.

Приведенное в работе упрощение интегрирования систем дифференциальных уравнений дискретного метода расширяет область его успешного использования при расчетах и исследовании многих практически важных задач строительной механики сплошных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Винокуров. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Изд-во Харьковского Гос. ун-та, 1956.
2. М. Г. Слободянский. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикладная математика и механика, т. 3, в. 1, 1939.
3. В. Н. Фадеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды математического ин-та АН СССР им. Стеклова, т. 28, 1949.
4. И. А. Биргер. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.
5. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.