

Ю. П. Петров

РАСЧЕТ НА ИЗГИБ УПРУГИХ НЕПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН
ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

Непрямоугольные пластины, имеющие форму трапеции, параллелограмма, треугольника, широко применяются в конструкциях промышленного и гражданского строительства: авиастроения, судостроения, транспортного машиностроения и др. Поэтому расчет на изгиб упругих непрямоугольных пластин привлекает внимание многих исследователей как в СССР, так и за рубежом.

Поставленная задача решается дискретным методом [1] (методом «прямых» [8]).

Цель данной статьи — попытаться разработать единую методику расчета на изгиб упругих непрямоугольных пластин, основанную на дискретном методе.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат XOY пластину, у которой грани AD и BC параллельны, а AB и CD — очерчены плавными кривыми $S_1 = f_1(s)$ и $S_2 = f_2(s)$ (рис. 1). Такую пластину назовем трапецеидальной, в отличие от пластины, имеющей форму трапеции.

Изогнутая поверхность пластины описывается дифференциальным уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2W(x, y) = q(x, y),$$

интегрирование которого с помощью дискретного метода приводит к громоздким системам линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка. Решение значительно упрощается, если дискретный метод применить к системе

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 M(x, y) &= q(x, y) \\ D\nabla^2 W(x, y) &= M(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$M = -\frac{1}{1+\nu}(M_x + M_y)$ — функция приведенных изгибающих моментов;

M_x и M_y — изгибающие моменты в сечениях пластины, параллельных соответственно осям Y и X ;

$W(x, y)$ — функция прогибов пластины;

$q(x, y)$ — внешняя нагрузка на пластину;

D — цилиндрическая жесткость пластины;

ν — коэффициент Пуассона.

В таком случае:

1) повышается точность решения задачи, поскольку для получения систем дифференциальных уравнений дискретного метода привлекаются

только конечно-разностные формулы численного дифференцирования для вторых производных, более точные, чем формулы для производных выше второго порядка;

2) структура систем дифференциальных уравнений дискретного метода получается такой, что после определенных упрощений они легко интегрируются с помощью методов матричного исчисления;

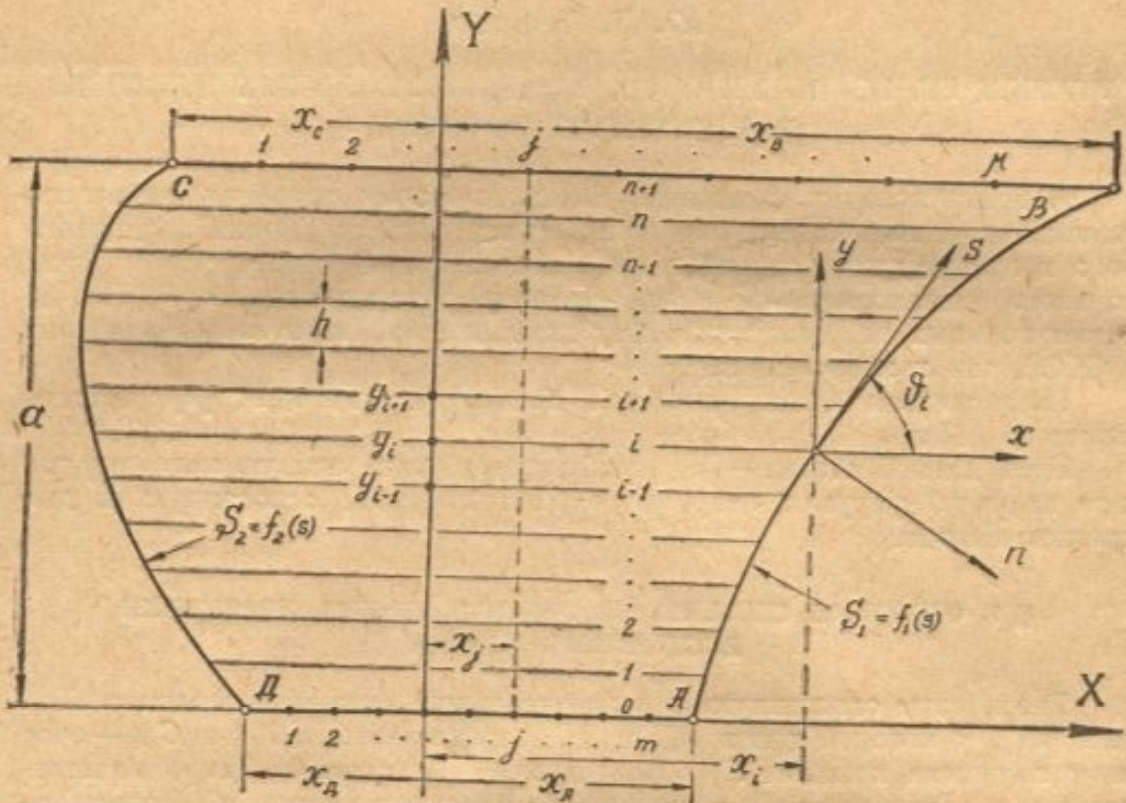


Рис. 1.

3) изгибающие моменты M_x и M_y вычисляются без использования формул численного дифференцирования.

Рассмотрим три задачи.

А. Несимметричная задача относительно осей X и Y

Разделим пластину (рис. 1) на $n+1$ полос одинаковой ширины $h = \frac{a}{n+1}$, проведя параллельно оси X $n+2$ прямых (прямые 0 и $n+1$ проходят по граням AD и BC).

При $y = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) соотношения для функций $W(x, y)$ и $M(x, y)$, приведенные в работе [8], запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_{i+1}} + 10 \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_i} + \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_{i-1}} - \\ & - \frac{12}{h^2} \{ M(x, y) \Big|_{y=y_{i+1}} - 2M(x, y) \Big|_{y=y_i} + M(x, y) \Big|_{y=y_{i-1}} \} = 0 \\ & \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_{i+1}} + 10 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_i} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_{i-1}} - \\ & - \frac{12}{h^2} \{ W(x, y) \Big|_{y=y_{i+1}} - 2W(x, y) \Big|_{y=y_i} + W(x, y) \Big|_{y=y_{i-1}} \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Каждая тройка функций

$$M(x, y)|_{y=y_{i-1}} = M_{i-1}, \quad M(x, y)|_{y=y_i} = M_i, \quad M(x, y)|_{y=y_{i+1}} = M_{i+1} \text{ и}$$

$$W(x, y)|_{y=y_{i-1}} = W_{i-1}, \quad W(x, y)|_{y=y_i} = W_i, \quad W(x, y)|_{y=y_{i+1}} = W_{i+1}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

будет удовлетворять уравнениям (1.2).

Полагая в (1.1) $y = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), найдем:

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_i} = \frac{\partial^2 M_i}{\partial y^2} = q(x, y)|_{y=y_i} - \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{y=y_i} = q_i - \frac{\partial^2 M_i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y_i} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} = \frac{1}{D} M(x, y)|_{y=y_i} - \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{y=y_i} = \frac{1}{D} M_i - \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}.$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Подставив $\frac{\partial^2 M_i}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в систему (1.2) и записывая результат в матричном виде, получим:

$$\left. \begin{aligned} AM'' + \frac{1}{h^2} DM &= Aq - \frac{1}{12} \{(\psi_0 + \psi_{n+1}) + \frac{12}{h^2}(\psi_0 + \psi_{n+1}) - \\ &\quad (Q_0 + Q_{n+1})\} \\ AW'' + \frac{1}{h^2} DW &= \frac{1}{D} AM - \frac{1}{12} \{(\varphi_0 + \varphi_{n+1}) + \frac{12}{h^2} \varphi_0 + \varphi_{n+1} - \\ &\quad - \frac{1}{D} (\psi_0 + \psi_{n+1})\}, \end{aligned} \right\} (1.3)$$

где $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$, $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$,
 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\psi_0 = (M_0, 0, \dots, 0)$,
 $\psi_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, M_{n+1})$, $\varphi_0 = (W_0, 0, \dots, 0)$,
 $\varphi_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, W_{n+1})$, $Q_0 = (q_1, 0, \dots, 0)$,
 $Q_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, q_{n+1})$ — столбцовые матрицы;

$$A = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$A = E + \frac{1}{12} D$, E — единичная матрица.

Ортонормированным преобразованием с матрицей B , элементы которой

$$b_{is} = (-1)^{i+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi is}{n+1}$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, n$; n — число прямых), матрицы A и D приводятся одновременно к диагональному виду, т. е.

$$\left. \begin{aligned} BDB^{-1} &= \lambda \\ BAB^{-1} &= E + \frac{1}{12} \lambda \end{aligned} \right\}, \text{ откуда}$$

$$\left. \begin{aligned} D &= B^{-1} \lambda B \\ A &= B^{-1} \left(E + \frac{1}{12} \lambda \right) B \end{aligned} \right\} (1.4)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{n+1} \right) (s = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив (1.4) в (1.3) и учитывая, что $B = B^{-1}$ (из-за симметрии матрицы D), после несложных преобразований придем к основной системе матричных дифференциальных уравнений дискретного метода

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= Bq - \frac{1}{12 + \lambda} B \left(\psi'' + \frac{12}{h^2} \psi - Q \right) \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left(\varphi'' + \frac{12}{h^2} \varphi - \frac{1}{D} \psi \right) \end{aligned} \right\}, \quad (1.5)$$

где $\alpha^2 = -\frac{12}{h^2(12 + \lambda)}$ — диагональная матрица;

$$\psi = \psi_0 + \psi_{n+1}, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_{n+1}, \quad Q = Q_0 + Q_{n+1},$$

$V = BM$, $U = BW$ — столбцевые матрицы.

Более простую основную систему матричных дифференциальных уравнений дискретного метода можно получить, воспользовавшись «скользящей» интерполяцией функций $M(x, y)$ и $W(x, y)$ степенным полиномом 2-ой степени [1]. Опуская промежуточные выкладки, приводим конечный результат

$$\left. \begin{aligned} V'' + \frac{\lambda}{h^2} V &= Bq - \frac{1}{h^2} B\psi \\ U'' + \frac{\lambda}{h^2} U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{h^2} B\varphi \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Предположим теперь, что криволинейные грани AB и CD симметричны относительно оси X (рис. 2). Если симметричны относительно оси X и граничные условия на параллельных гранях AD и BC , внешнюю нагрузку на пластину $q(x, y)$ целесообразно представить суммой, т. е.

$$q(x, y) = q_c(x, y) + q_{oc}(x, y) = \bar{q}(x, y) + \bar{\bar{q}}(x, y),$$

где $\bar{q}(x, y)$ и $\bar{\bar{q}}(x, y)$ — симметричная и обратно симметричная составляющие внешней нагрузки $q(x, y)$ относительно оси X . В соответствии с этим для подобных пластин имеем симметричную и обратно симметричную задачи.

В. Симметричная задача (рис. 2)

Внешняя нагрузка на пластину $q_c(x, y) = \bar{q}(x, y) = \bar{q}$. Криволинейные грани пластины и граничные условия на ее параллельных гранях симметричны относительно оси X :

$$\begin{aligned} W(x, y)|_{y=y_0} &= W_0 = W(x, y)|_{y=y_n} = W_2, \\ M(x, y)|_{y=y_0} &= M_0 = M(x, y)|_{y=y_n} = M_2, \\ \bar{\bar{q}}(x, y)|_{y=y_0} &= \bar{\bar{q}}_0 = \bar{\bar{q}}(x, y)|_{y=y_n} = \bar{\bar{q}}_2. \end{aligned}$$

При таких условиях система (1.3) получает вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}M'' + \frac{1}{h^2} \bar{D}M &= \bar{A}\bar{q} - \frac{1}{12} \left\{ \psi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \psi_{n+1} - \bar{Q}_{n+1} \right\} \\ \bar{A}W'' + \frac{1}{h^2} \bar{D}W &= \frac{1}{D} \bar{A}M - \frac{1}{12} \left\{ \varphi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \varphi_{n+1} - \frac{1}{D} \psi_{n+1} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (1.7)$$

где $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$,

$W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$,

$\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$,

$\psi_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, M_{n+1})$,

$\varphi_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, W_{n+1})$,

$\bar{Q}_{n+1} = (0, \dots, 0, \bar{q}_{n+1})$ — столбцевые матрицы;

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \dots \end{vmatrix}; \quad \bar{D} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & \dots \end{vmatrix};$$

$$\bar{A} = E + \frac{1}{12} \bar{D}.$$

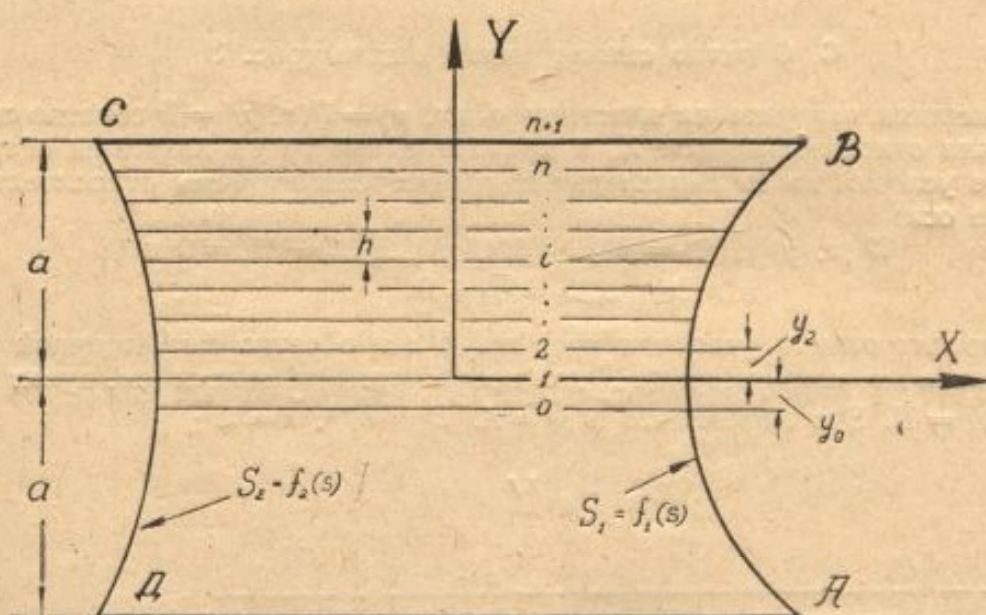


Рис. 2.

Как и выше, матрицы \bar{A} и \bar{D} одновременно приводятся к диагональному виду одним ортонормированным преобразованием \bar{B} , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^{-1} \bar{D} \bar{B} &= \bar{\lambda} \\ \bar{B}^{-1} \bar{A} \bar{B} &= E + \frac{1}{12} \bar{\lambda} \end{aligned} \right\}, \text{ откуда}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{D} &= \bar{B} \bar{\lambda} \bar{B}^{-1} \\ \bar{A} &= \bar{B} \left(E + \frac{1}{12} \bar{\lambda} \right) \bar{B}^{-1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.8)$$

где $\bar{\lambda}$ — диагональная матрица с элементами

$$\bar{\lambda}_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi(2s-1)}{2n} \right) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

$$\bar{B} = |\bar{b}_{is}| = |(-1)^{i+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi(2s-1)(i-1)}{2n}|$$

($i, s = 1, 2, \dots, n$; n — число прямых),

а матрица \bar{B}^{-1} находится как решение n алгебраических систем

$$\bar{B}^{-1} \bar{B} = E.$$

Подставив (1.8) в (1.7) и выполнив несложные преобразования, получим основную систему матричных дифференциальных уравнений дискретного метода для симметричной задачи

$$\left. \begin{aligned} V'' - \bar{\alpha}^2 V &= \bar{B}^{-1} \bar{q} - \frac{1}{12 + \bar{\lambda}} \bar{B}^{-1} \left\{ \psi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \psi_{n+1} - \bar{Q}_{n+1} \right\} \\ U'' - \bar{\alpha}^2 U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \bar{\lambda}} \bar{B}^{-1} \left\{ \varphi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \varphi_{n+1} - \frac{1}{D} \psi_{n+1} \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

где $\bar{\alpha}^2 = -\frac{12\bar{\lambda}}{h^2(12 + \bar{\lambda})}$ — диагональная матрица, $U = \bar{B}^{-1} W$, $V = \bar{B}^{-1} M$ — столбцовые матрицы.

С. Обратносимметричная задача (рис. 3)

Внешняя нагрузка на пластину $q_{oc}(x, y) = \bar{q}(x, y) = \bar{q}$ обратносимметрична относительно оси X , а криволинейные грани пластины и граничные условия на ее параллельных гранях симметричны относительно той же оси:

$$\begin{aligned} W(x, y)|_{y=y_0=0} = W_0 = M(x, y)|_{y=y_0=0} = M_0 = 0 \text{ и} \\ \bar{q}(x, y)|_{y=y_0=0} = \bar{q}_0 = 0. \end{aligned}$$

При прочих равных условиях матрица \bar{D} для обратносимметричной задачи такая же, как и матрица D для несимметричной задачи (см. пункт А), т. е. $\bar{D} = D$. Это значит, что и $\bar{A} = A$, $\bar{B} = B^{-1}$, $\bar{\lambda} = \lambda$.

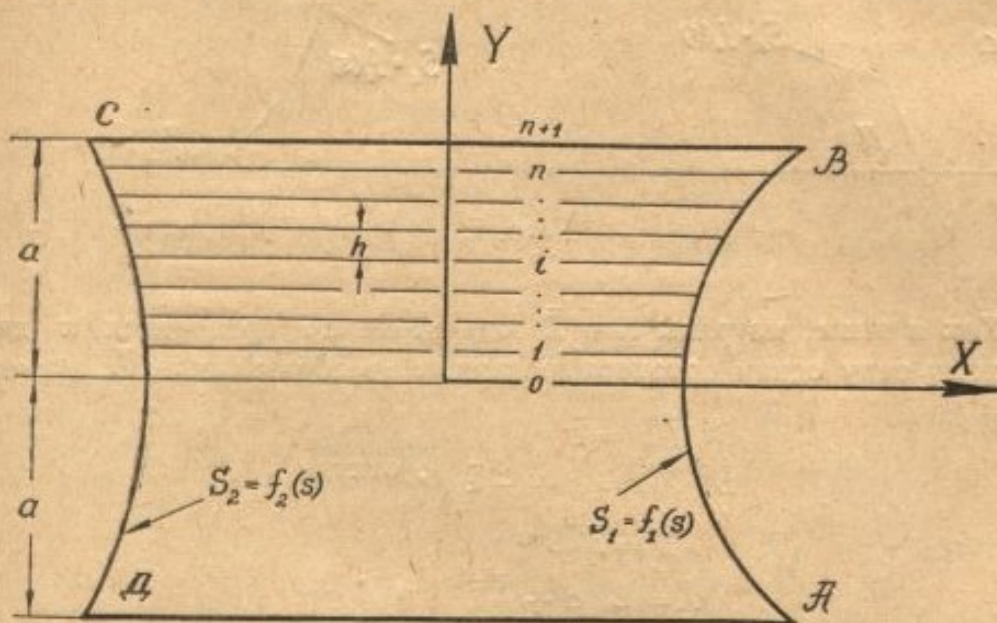


Рис. 3.

Поэтому при одинаковом числе прямых основная система матричных дифференциальных уравнений дискретного метода для обратносимметричной задачи отличается от системы (1.5) только своей правой частью и имеет вид

$$\left. \begin{aligned} V'' - \alpha^2 V &= B\bar{q} - \frac{1}{12 + \lambda} B \left\{ \psi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \psi_{n+1} - \bar{Q}_{n+1} \right\} \\ U'' - \alpha^2 U &= \frac{1}{D} V - \frac{1}{12 + \lambda} B \left\{ \varphi_{n+1} + \frac{12}{h^2} \varphi_{n+1} - \frac{1}{D} \psi_{n+1} \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (1.10)$$

где $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$, $\bar{Q}_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, \bar{q}_{n+1})$ — столбцовые матрицы.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведенные выше основные системы матричных дифференциальных уравнений дискретного метода состоят из n независимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых содержит по два дифференциальных уравнения 2-го порядка. Это значительно облегчает интегрирование основных систем дифференциальных уравнений дискретного метода.

Для прямой с номером i в общем случае несимметричной задачи имеем:

$$\left. \begin{aligned} V_i - \alpha_i^2 V_i &= \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(x) - \frac{1}{12 + \lambda_i} \left\{ b_{i1} \left(M_0 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{12}{h^2} M_0 - q_0 \right) + b_{in} \left(M_{n+1} + \frac{12}{h^2} M_{n+1} - q_{n+1} \right) \left. \right\} \\ U_i - \alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i - \frac{1}{12 + \lambda_i} \left\{ b_{i1} \left(W_0 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{12}{h^2} W_0 - \frac{1}{D} M_0 \right) + b_{in} \left(W_{n+1} + \frac{12}{h^2} W_{n+1} - \frac{1}{D} M_{n+1} \right) \left. \right\} \\ &(i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где $q_s(x) = q(x, y)|_{y=y_s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$).

В правых частях системы (2.1) содержатся функции:

$$\begin{aligned} M(x, y)|_{y=0} &= M_0(x), & W(x, y)|_{y=0} &= W_0(x), \\ M(x, y)|_{y=a} &= M_{n+1}(x), & W(x, y)|_{y=a} &= W_{n+1}(x), \end{aligned}$$

ниже именуемые «контурными».

Система (2.1) непосредственно не интегрируется, так как «контурные» функции неизвестны. Однако можно заранее сказать, что при любой внешней нагрузке на пластину они будут плавными и непрерывными. Учтя это обстоятельство, представим все «контурные» функции приближенно степенными полиномами с неизвестными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} W_0 &\cong \tilde{W}_0 = \sum_k c_k^{(0)} x^k \\ M_0 &\cong \tilde{M}_0 = \sum_k d_k^{(0)} x^k \\ W_{n+1} &\cong \tilde{W}_{n+1} = \sum_k c_k^{(n+1)} x^k \\ M_{n+1} &\cong \tilde{M}_{n+1} = \sum_k d_k^{(n+1)} x^k \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

которые будем называть «контурными» полиномами. Подставим эти полиномы в правую часть системы (2.1) и сгруппируем их коэффициенты относительно степеней переменной x . Тогда система (2.1) записывается компактно:

$$\left. \begin{aligned} V_i - \alpha_i^2 V_i &= \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(x) + \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(x) + \\ &+ b_{in} q_{n+1}(x)] - \sum_k d_k^{(i)} x^k \\ U_i - \alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i - \sum_k c_k^{(i)} x^k \\ &(i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\}, \quad (2.3)$$

где коэффициенты $d_k^{(i)}$ и $c_k^{(i)}$ линейно выражаются через коэффициенты $c_k^{(0)}$, $d_k^{(0)}$, $c_k^{(n+1)}$ и $d_k^{(n+1)}$.

Система (2.3) поддается последовательному интегрированию. Сначала интегрируется первое дифференциальное уравнение. Полученное решение подставляем во второе дифференциальное уравнение и интегрируем его.

Результаты интегрирования системы (2.3):

$$V_i \cong \tilde{V}_i = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + A_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \\ + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^x \left\{ \sum_{s=1}^n b_{is} q_s(t) + \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(t) + b_{in} q_{n+1}(t)] \right\} \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt - \\ \frac{1}{\alpha_i} \sum_k d_k^{(i)} \beta_k^{(i)} = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + A_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + V_i^{(p)} - V_i^{(*)}; \quad (2.4)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

$$U_i \cong \tilde{U}_i = B_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + B_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \\ + \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \alpha_i x}{2\alpha_i} + \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left(\frac{x \operatorname{ch} \alpha_i x}{2\alpha_i^2} - \frac{1}{2\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x \right) + \\ + \frac{1}{D\alpha_i} \int_0^x V_i^{(p)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt - \frac{1}{\alpha_i^2} \sum_k d_k^{(i)} \beta_k^{(i)} - \frac{1}{\alpha_i} \sum_k c_k^{(i)} \beta_k^{(i)} = \\ = B_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + B_2^{(i)} \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x + \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \alpha_i x}{2\alpha_i} + \\ + \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left(\frac{x \operatorname{ch} \alpha_i x}{2\alpha_i^2} - \frac{1}{2\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i x \right) + \frac{1}{D} U_i^{(p)} - U_i^*, \quad (2.5)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

где $V_i^{(p)}$ и $U_i^{(p)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — частные интегралы, зависящие от вида внешней нагрузки на пластину;

$V_i^{(*)}$ и $U_i^{(*)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — частные интегралы, зависящие от «контурных» полиномов, т. е. от условий опирания параллельных краев пластины: АД и ВС (рис. 1);

$$\alpha_i \int_0^x \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt = \alpha_i \beta_0^{(i)} = \operatorname{ch} \alpha_i x - 1, \\ \alpha_i \int_0^x t \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt = \alpha_i \beta_1^{(i)} = \frac{\operatorname{sh} \alpha_i x}{\alpha_i} - x, \\ \alpha_i \int_0^x t^2 \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt = \alpha_i \beta_2^{(i)} = \frac{2\alpha_i \beta_0^{(i)}}{\alpha_i^2} - x^2, \\ \alpha_i \int_0^x t^3 \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt = \alpha_i \beta_3^{(i)} = \frac{6\alpha_i \beta_1^{(i)}}{\alpha_i^3} - x^3, \\ \dots \\ \alpha_i \int_0^x t^k \operatorname{sh} \alpha_i (x-t) dt = \alpha_i \beta_k^{(i)} = \frac{k(k-1) \alpha_i \beta_{k-2}^{(i)}}{\alpha_i^2} - x^k \quad (k = 2, 3, \dots, k),$$

$$\int_0^x \beta_0^{(i)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i(x-t) dt = \theta_0^{(i)} = \frac{1}{2} [x \alpha_i \beta_{i1}^{(i)} - \alpha_i \beta_{i2}^{(i)}],$$

.....

$$\int_0^x \beta_k^{(i)}(t) \operatorname{sh} \alpha_i(x-t) dt = \theta_k^{(i)} = \frac{1}{2k+2} [x \alpha_i \beta_{k+1}^{(i)} - \alpha_i \beta_{k+2}^{(i)}] \quad (k = 0, 1, \dots, k).$$

Функции $\beta_k^{(i)}$ и $\theta_k^{(i)}$ связаны рекуррентной зависимостью и легко табулируются. Дифференцирование функций $\beta_k^{(i)}$, $\theta_k^{(i)}$ и вычисление величин их производных также не вызывает затруднений, так как

$$\frac{d}{dx} (\alpha_i \beta_k^{(i)}) = k \alpha_i \beta_{k-1}^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, k),$$

$$\frac{d}{dx} (\theta_k^{(i)}) = k \theta_{k-1}^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, k).$$

Таким образом, в общем случае, системы дискретных решений \tilde{V}_i и \tilde{U}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. общие интегралы (2.4) и (2.5), зависят:

- а) от вида внешней нагрузки на пластину;
- б) от постоянных интегрирования;
- в) от неизвестных коэффициентов «контурных» полиномов.

Рассмотрим частные интегралы $V_i^{(p)}$ и $U_i^{(p)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для некоторых видов внешней нагрузки на пластину.

1. Равномерно распределенная нагрузка $p = \text{const}$ (рис. 4)

$$q_0 = q_{n+1} = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) = p,$$

$$Aq + \frac{1}{12}(Q_0 + Q_{n+1}) = q,$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) = \underbrace{(p, p, \dots, p)}_A$.

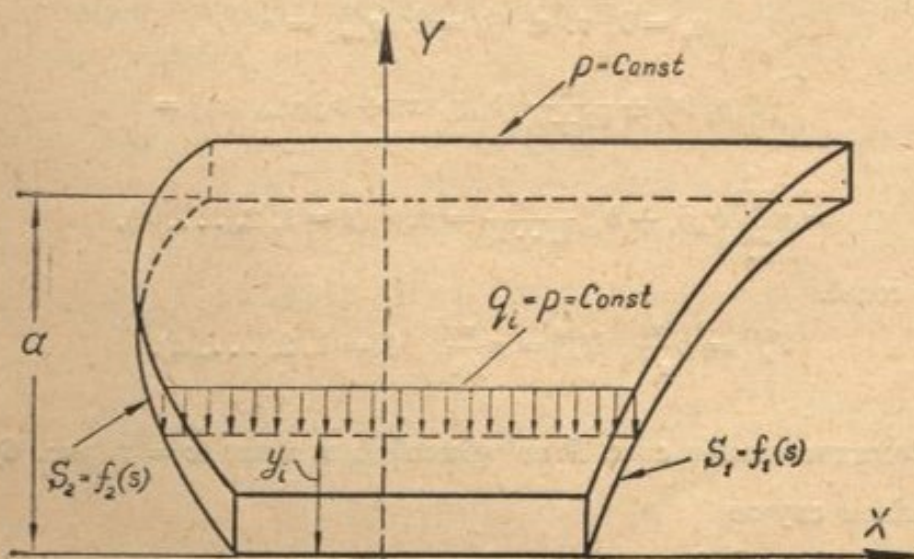


Рис. 4.

В системе (2.3) вместо

$$\sum_{s=1}^n b_{is} q_s(x) + \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(x) + b_{in} q_{n+1}(x)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

получаем

$$p \frac{12}{12 + \lambda_i} \sum_{s=1}^n b_{is} = \gamma_i p \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно,

$$V_i^{(p)} = \frac{\gamma_i}{\alpha_i^2} p, \quad U_i^{(p)} = \frac{\gamma_i}{D\alpha_i^4} p \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Треугольная нагрузка $q = \frac{py}{a}$ (рис. 5)

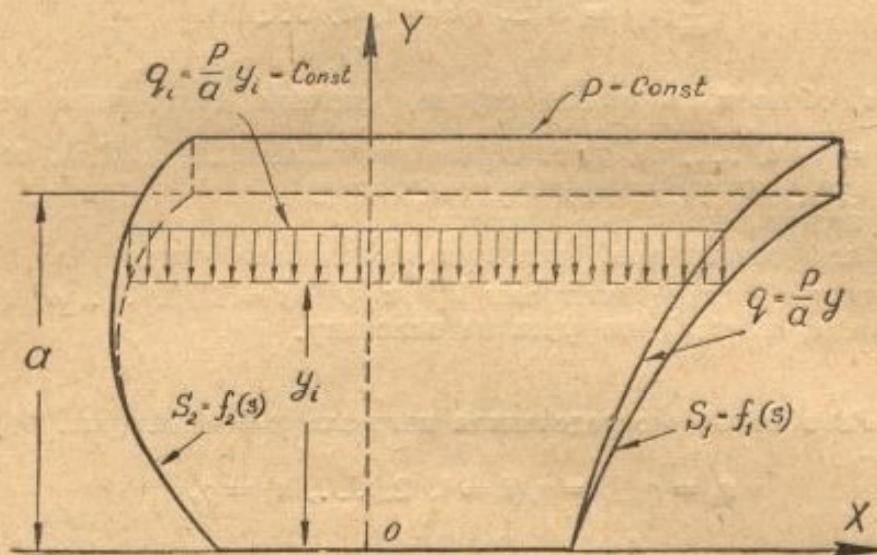


Рис. 5.

$$q_i = \frac{py_i}{a} = p\bar{y}_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$q_0 = 0, \text{ т. е. } Q_0 = 0; \quad q_{n+1} = p.$$

$$\sum_{s=1}^n b_{is} q_s(x) + \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{i1} q_0(x) + b_{in} q_{n+1}(x)] =$$

$$= p \sum_{s=1}^n b_{is} \bar{y}_s + b_{in} \frac{p}{12 + \lambda_i} = p x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $x_i = \text{const}$.

$$V_i^{(p)} = p \frac{x_i}{\alpha_i^2}, \quad U_i^{(p)} = p \frac{x_i}{D\alpha_i^4} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3. Сосредоточенная сила P на прямой k в точке $x = c$ (рис. 6)

В данном случае

$$q = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, q_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}), \quad q_0 = q_{n+1} = 0.$$

Принимаем, что $q_h = p = \frac{\bar{P}}{\Delta c}$ — равномерно распределенная нагрузка на участке Δc . Причем, когда $\Delta c \rightarrow 0$, $p \rightarrow \bar{P}$. Тогда

$$V_i^{(p)} = \frac{1}{a_i} \int_c^{c+\Delta c} \left(\sum_{s=1}^n b_{is} q_s \right) \text{sh } \alpha_i (x-t) dt = \bar{P} b_{in} \frac{1}{a_i} \text{sh } \alpha_i (x-c)$$

($i = 1, 2, \dots, n$), так как

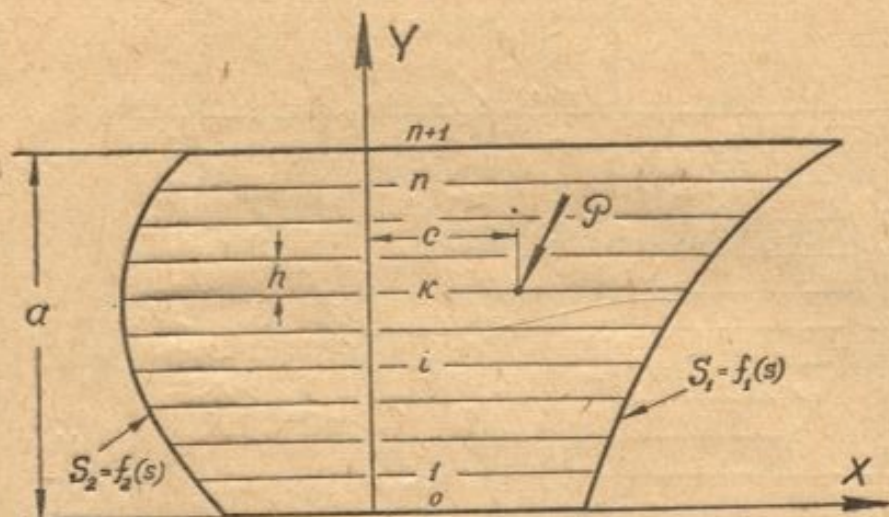


Рис. 6.

только $q_h = p \neq 0$.

$$U_i^{(p)} = \bar{P} b_{in} \frac{1}{a_i} \int_0^x \text{sh } \alpha_i (t-c) \text{sh } \alpha_i (x-t) dt =$$

$$= \bar{P} \frac{b_{in}}{2a_i} \left[(x-c) \text{ch } \alpha_i (x-c) - \frac{1}{a_i} \text{sh } \alpha_i (x-c) \right].$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

Под \bar{P} следует понимать равномерно распределенную нагрузку $\frac{P}{\Delta y}$, где Δy — малая величина, например, $\Delta y = h$.

4. Равномерно распределенная сосредоточенная нагрузка $p = \text{const}$ по прямой $x = c$ (рис. 7)

$$q_0(x) = q_{n+1}(x) = q(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$Aq \div \frac{1}{12} (Q_0 + Q_{n+1}) = q, \text{ где } q = (q_1, q_2, \dots, q_n).$$

В системе (2.3) вместо

$$\sum_{s=1}^n b_{is} q_s(x) \div \frac{1}{12 + \lambda_i} [b_{in} q_0(x) \div b_{in} q_{n+1}(x)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

получим

$$q_i(x) \frac{12}{12 + \lambda_i} \sum_{s=1}^n b_{is} = q(x) \gamma_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Положим, что $q_i(x) = \bar{p} = p/\Delta c$ ($i = 1, 2, \dots, n$). При этом, когда $\Delta c \rightarrow 0$, $\bar{p} \rightarrow p$. Тогда

$$\begin{aligned} V_i^{(p)} &= \frac{1}{\alpha_i} \int_c^{c+\Delta c} \gamma_i q_i \operatorname{sh} \alpha_i(x-t) dt = \\ &= p \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i(x-c) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

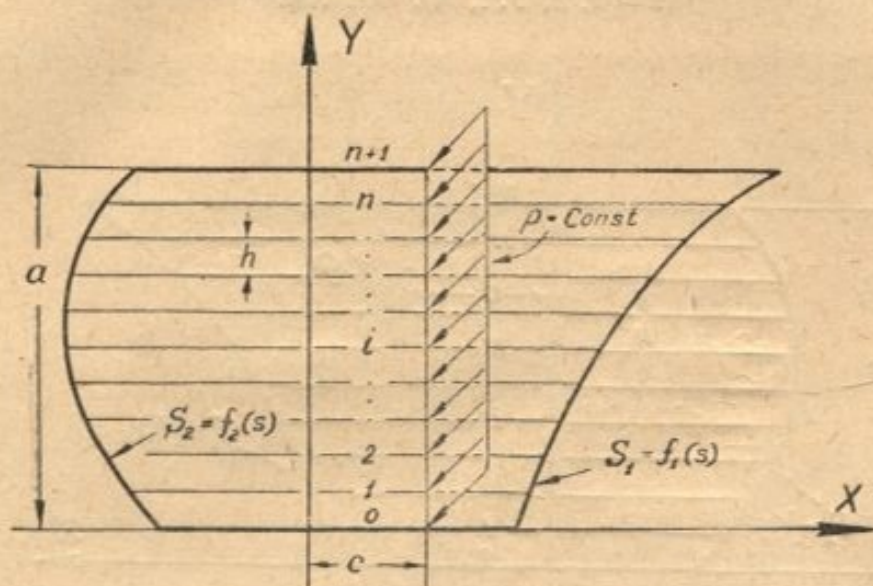


Рис. 7.

$$U_i^{(p)} = p \frac{\gamma_i}{2\alpha_i^2} \left[(x-c) \operatorname{ch} \alpha_i(x-c) - \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{sh} \alpha_i(x-c) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

5. Равномерно распределенная нагрузка $p = \text{const}$ по площади прямоугольника (рис. 8)

$$\begin{aligned} q &= (0, 0, \dots, 0, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, 0, \dots, 0), \\ q_0 &= q_{n+1} = 0, \quad q_{k-1} = q_k = q_{k+1} = \text{const} = p, \\ \sum_{s=1}^n b_{is} q_s &= p \sum_{s=k-1}^{k+1} b_{is} = p \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

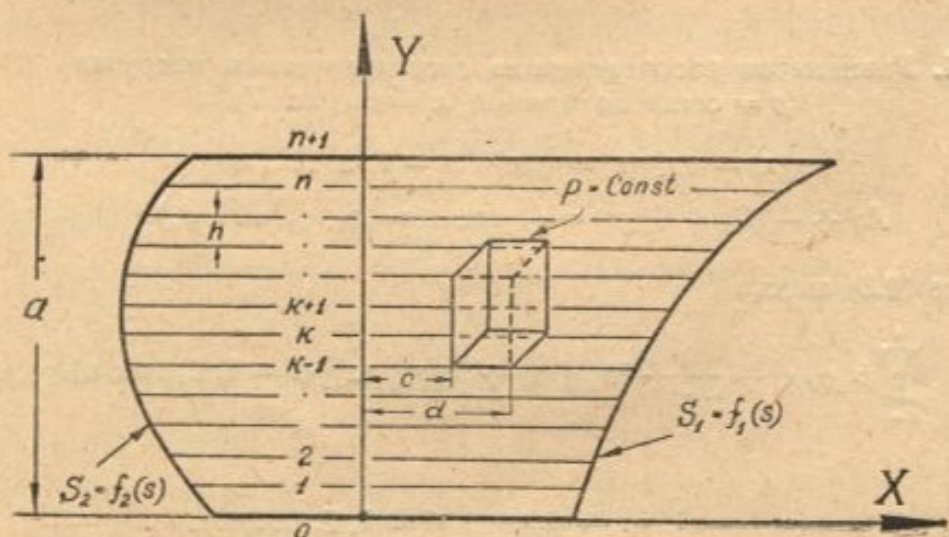


Рис. 8.

Поскольку нагрузка p распределена только на отрезке от c до d ,

$$\begin{aligned}
 V_i^{(p)} &= p \frac{\xi_i}{\alpha_i} \left[\int_c^x \text{sh } \alpha_i (x-t) dt - \int_d^x \text{sh } \alpha_i (x-t) dt \right] = \\
 &= p \frac{\xi_i}{\alpha_i} \left\{ \underbrace{[\text{ch } \alpha_i (x-c) - 1]}_{x \geq c} - \underbrace{[\text{ch } \alpha_i (x-d) - 1]}_{x \geq d} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\
 U_i^{(p)} &= p \frac{\xi_i}{2\alpha_i^3} \left\{ \underbrace{\left[(x-c) \text{sh } \alpha_i (x-c) + \frac{2}{\alpha_i} - \frac{2}{\alpha_i} \text{ch } \alpha_i (x-c) \right]}_{x \geq c} - \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\left[(x-d) \text{sh } \alpha_i (x-d) + \frac{2}{\alpha_i} - \frac{2}{\alpha_i} \text{ch } \alpha_i (x-d) \right]}_{x \geq d} \right\}. \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

§ 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГРАНЯХ ПЛАСТИНЫ

Рассуждения относим к точке пересечения грани AB , очерченной кривой S_i , с прямой i (рис. 9). Очевидно, что все нижеследующее будет справедливо и для второй криволинейной грани пластины (на рис. 10 не показана).

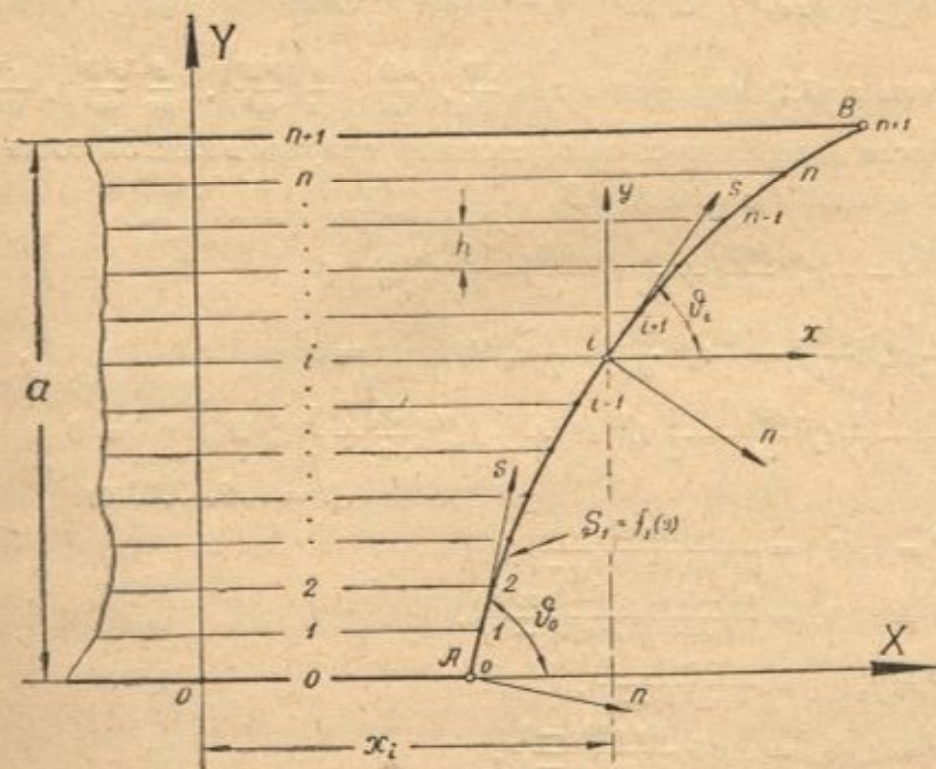


Рис. 9.

1. Грань AB свободна

На такой грани (см. [4])

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 W - (1 - \nu) \left\{ \frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} \frac{dW}{ds} - \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial W}{\partial n} \right\} &= 0 \\
 \nabla^2 W - (1 - \nu) \left\{ \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial n} \right\} &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

где ρ — радиус кривизны кривой S_i .

Остановимся, ради упрощения выкладок, только на случае, когда $\rho = \text{const}$. Тогда граничные условия (3.1) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{D} M + (1-\nu) \frac{d^2 W}{ds^2} \right] - \frac{1-\nu}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} &= 0 \\ \frac{1}{D} M - (1-\nu) \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1-\nu}{\rho} \frac{dW}{dn} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = \frac{1}{D} M$.

В осях координат (n, s)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n} &= \frac{\partial W}{\partial x} \sin \vartheta - \frac{\partial W}{\partial y} \cos \vartheta, & \frac{\partial M}{\partial n} &= \frac{\partial M}{\partial x} \sin \vartheta - \frac{\partial M}{\partial y} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial W}{\partial s} &= \frac{\partial W}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \vartheta, & \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \sin 2\vartheta, \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) \sin \vartheta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (1.1) по x и y , найдем:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^3} = \frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y}.$$

Подставим в (3.2) выражения для $\frac{\partial W}{\partial n}$, $\frac{\partial M}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y^3}$. После элементарных преобразований получим в каждой точке пересечения прямой i с гранью AB

$$\left. \begin{aligned} \left[\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} t_1^{(i)} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{1}{D} t_2^{(i)} \frac{\partial M_i}{\partial x} - \frac{1}{D\rho} t_3^{(i)} M_i \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[t_4^{(i)} \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} t_5^{(i)} \frac{\partial W_i}{\partial x} - \frac{1}{D} t_6^{(i)} M_i \right] \right]_{x=x_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} t_1^{(i)} \frac{\partial W_i}{\partial x} - \frac{1}{D} t_2^{(i)} M_i + \frac{\partial}{\partial y} \left[t_3^{(i)} \frac{\partial W_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho} t_4^{(i)} W_i \right] \right]_{x=x_i} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

$(t = 1, 2, \dots, n)$

где $t_1^{(i)} = t_1(\vartheta_i) = \frac{\cos 2\vartheta_i}{\sin \vartheta_i (4 \cos^2 \vartheta_i - 1)}$,

$$t_2^{(i)} = t_2(\vartheta_i) = \frac{1 + (1-\nu)(1-3\cos^2 \vartheta_i)}{(1-\nu)(4 \cos^2 \vartheta_i - 1)},$$

$$t_3^{(i)} = t_3(\vartheta_i) = \frac{\sin \vartheta_i}{4 \cos^2 \vartheta_i - 1},$$

$$t_4^{(i)} = t_4(\vartheta_i) = \text{ctg } \vartheta_i \frac{4 \sin^2 \vartheta_i - 1}{4 \cos^2 \vartheta_i - 1},$$

$$t_5^{(i)} = t_5(\vartheta_i) = \frac{2 \cos \vartheta_i}{4 \cos^2 \vartheta_i - 1},$$

$$t_6^{(i)} = t_6(\vartheta_i) = \text{ctg } \vartheta_i \frac{1 + (1-\nu) \sin^2 \vartheta_i}{(1-\nu)(4 \cos^2 \vartheta_i - 1)},$$

$$l_1^{(i)} = l_1(\vartheta_i) = \frac{\sin \vartheta_i}{\cos 2\vartheta_i}, \quad l_2^{(i)} = l_2(\vartheta_i) = \frac{\cos^2 \vartheta_i + \nu \sin^2 \vartheta_i}{(1-\nu) \cos 2\vartheta_i},$$

$$l_3^{(i)} = l_3(\vartheta_i) = \frac{\sin 2\vartheta_i}{\cos 2\vartheta_i}, \quad l_4^{(i)} = l_4(\vartheta_i) = \frac{\cos \vartheta_i}{\cos 2\vartheta_i}$$

— значения функций t_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) и l_k ($k = 1, 2, 3, 4$) при $\vartheta = \vartheta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Выразим все производные и функции, входящие в систему (3.3), через функции U_i и V_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
 W_i &= \sum_{s=1}^n b_{is} U_s, \quad M_i = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s \quad (i = 1, 2, \dots, n). \\
 \frac{dM_i}{dx} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{s=1}^n b_{is} V'_s \Big|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^n b_{is} V'_s(x), \\
 M_i \Big|_{x=x_i} &= \sum_{s=1}^n b_{is} V_s \Big|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s(x), \\
 W_i \Big|_{x=x_i} &= \sum_{s=1}^n b_{is} U_s(x), \quad \frac{dW_i}{dx} \Big|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^n b_{is} U'_s(x), \\
 \frac{d^2 W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{s=1}^n b_{is} U''_s(x), \quad \frac{d^3 W_i}{dx^3} \Big|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^n b_{is} U'''_s(x), \\
 \frac{dW_i}{dy} \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{12h} (-W_{i+2} + 8W_{i+1} - 8W_{i-1} + W_{i-2}) \Big|_{x=x_i} = \\
 &= \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n (-b_{i+2,s} + 8b_{i+1,s} - 8b_{i-1,s} + b_{i-2,s}) U_s \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} U_s(x), \\
 \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} U'_s(x), \quad \frac{\partial^3 W_i}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} U''_s(x), \\
 \frac{\partial M_i}{\partial y} \Big|_{x=x_i} &= \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} V_s(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

С учетом этих выражений граничные условия (3.3) запишутся в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 12h \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U''_s(x_i) - \frac{1}{\rho} t_1^{(i)} U'_s(x_i) + \frac{1}{D} t_2^{(i)} V'_s(x_i) - \frac{1}{D\rho} t_3^{(i)} V_s(x_i) \right] + \\
 + \sum_{s=1}^n \Delta_{is} \left[t_4^{(i)} U'_s(x_i) - \frac{1}{\rho} t_5^{(i)} U'_s(x_i) - \frac{1}{D} t_6^{(i)} V_s(x_i) \right] = 0 \\
 12h \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U'_s(x_i) - \frac{1}{\rho} t_1^{(i)} U'_s(x_i) - \frac{1}{D} t_2^{(i)} V_s(x_i) \right] + \\
 + \sum_{s=1}^n \Delta_{is} \left[t_3^{(i)} U'_s(x_i) + \frac{1}{\rho} t_4^{(i)} U_s(x_i) \right] = 0
 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

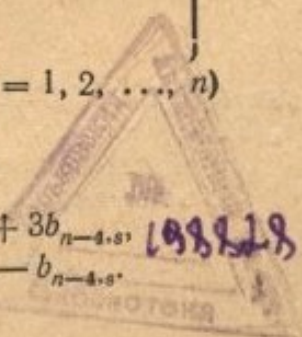
$(i = 1, 2, \dots, n)$

При этом $\Delta_{1s} = -25b_{1s} + 48b_{2s} - 36b_{3s} + 16b_{4s} - 3b_{5s}$,

$$\Delta_{2s} = -3b_{1s} - 10b_{2s} + 18b_{3s} - 6b_{4s} + b_{5s},$$

$$\Delta_{ns} = 25b_{ns} - 48b_{n-1,s} + 36b_{n-2,s} - 16b_{n-3,s} + 3b_{n-4,s},$$

$$\Delta_{n-1,s} = 3b_{ns} + 10b_{n-1,s} - 18b_{n-2,s} + 6b_{n-3,s} - b_{n-4,s}.$$



Числа Δ_{1s} , Δ_{2s} , Δ_{ns} и $\Delta_{n-1,s}$ получаются в результате использования для первых производных по y (в точках 1, 2, n и $n-1$ на грани AB) односторонних пятичленных формул численного дифференцирования, взятых нами из монографии [5].

Частными случаями трапециевидальной пластины являются: трапеция, параллелограмм, треугольник, прямоугольник. Граничные условия на сво-

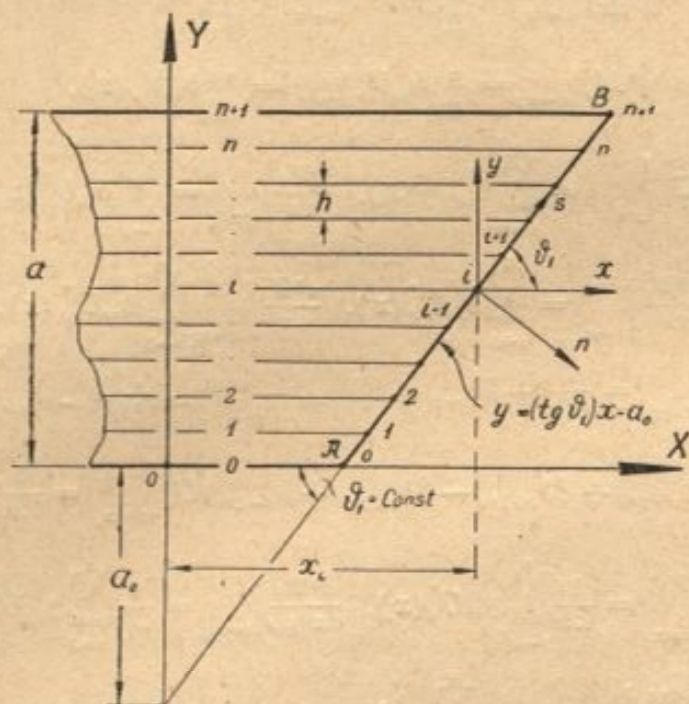


Рис. 10.

бодных боковых гранях этих пластин получаются из условий (3.2) как частные случаи. Рассмотрим их.

а) Грань AB прямолинейна и наклонена под углом ϑ_1 к оси X (рис. 10). Это может быть грань трапеции, параллелограмма или треугольника.

Положив в (3.4) $\rho = \infty$ и $\vartheta_i = \vartheta_1 = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), получим

$$12h \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U_s''(x_i) + \frac{t_2(\vartheta_1)}{D} V_s'(x_i) \right] + \sum_{s=1}^n \Delta_{is} \left[t_4(\vartheta_1) U_s'(x_i) - \frac{1}{D} t_6(\vartheta_1) V_s(x_i) \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$12h \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U_s'(x_i) - \frac{l_2(\vartheta_1)}{D} V_s(x_i) \right] + l_3(\vartheta_1) \sum_{s=1}^n \Delta_{is} U_s(x_i) = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

где $t_2(\vartheta_1)$, $t_4(\vartheta_1)$, $t_6(\vartheta_1)$, $l_2(\vartheta_1)$ и $l_3(\vartheta_1)$ — значения функций $t_2(\vartheta)$, $t_4(\vartheta)$, $t_6(\vartheta)$, $l_2(\vartheta)$ и $l_3(\vartheta)$ при $\vartheta = \vartheta_1$.

б) Грань AB прямолинейна и перпендикулярна к оси X (рис. 11). В этом случае $\rho = \infty$, $\vartheta = 90^\circ$,

$$t_2 = \frac{2-\nu}{\nu-1}, \quad t_4 = 0, \quad t_6 = 0, \quad l_2 = \frac{\nu}{\nu-1}, \quad l_3 = 0,$$

и система (3.4) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U_s''(x_i) - \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{1}{D} V_s'(x_i) \right] &= 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} \left[U_s'(x_i) + \frac{\nu}{D(1-\nu)} V_s(x_i) \right] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.6)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

где все $x_i = b$.

Детерминант системы (3.6) $\|b_{is}\| \neq 0$ ($i, s = 1, 2, \dots, n$). Поэтому из системы (3.6) следует система независимых граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \left[U_i'' - \frac{2-\nu}{D(1-\nu)} V_i' \right]_{x=b} &= 0 \\ \left[U_i' + \frac{\nu}{D(1-\nu)} V_i \right]_{x=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

2. Грань AB свободно оперта

На свободно опертой криволинейной грани (см. [4])

$$\left. \begin{aligned} M - \frac{D(1-\nu)}{\rho} \frac{\partial W}{\partial n} &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

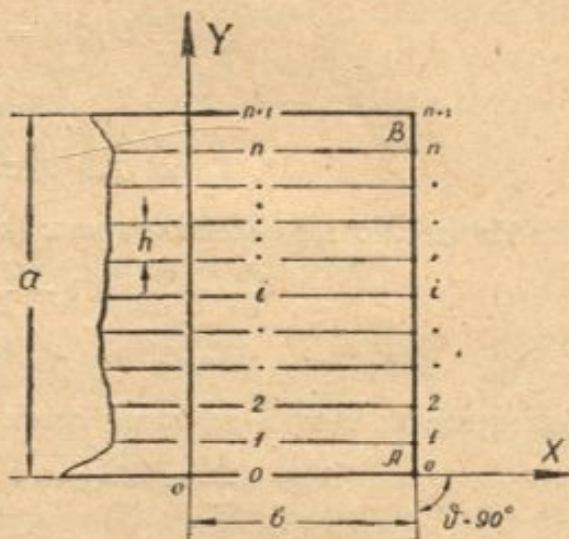


Рис. 11.

Поскольку на грани $W = 0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} &= \frac{\partial W}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \vartheta = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial n} &= \frac{\partial W}{\partial x} \sin \vartheta - \frac{\partial W}{\partial y} \cos \vartheta \end{aligned} \right\},$$

откуда $\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial x}$, а значит, $\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial x}$.

Учитывая это, запишем условия (3.8) в каждой точке пересечения прямой i с гранью AB:

$$\left. \begin{aligned} M_i - \frac{D(1-\nu)}{\rho \sin \vartheta_i} \frac{\partial W_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= 0 \\ W_i \Big|_{x=x_i} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

или

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} \left[V_s(x_i) - \frac{D(1-\nu)}{\rho \sin \vartheta_i} U_s'(x_i) \right] &= 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} U_s(x_i) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.9)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

Для боковой грани AB трапецевидной пластины (рис. 10) система (3.9) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} V_s(x_i) = 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} U_s(x_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Если грань AB прямолинейна и перпендикулярна к оси X (рис. 11), все $x_i = b$ ($i = 1, 2, \dots, n$), и из системы (3.10) следует система независимых граничных условий

$$\left. \begin{aligned} V_i|_{x=b} = 0 \\ U_i|_{x=b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

3. Грань AB жестко закреплена

На жестко закрепленной грани (криволинейной)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x} \sin \vartheta - \frac{\partial W}{\partial y} \cos \vartheta = 0 \\ W = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Одновременно с этим на такой грани и

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \vartheta = 0,$$

так как $W = 0$. Поэтому условие $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$ равносильно условиям:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Одно из этих условий является независимым. Таким образом, приходим к следующим граничным условиям на криволинейной жестко закрепленной грани AB :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ W = 0 \end{aligned} \right\}.$$

В дискретном виде эти условия запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = 0 \\ W_i \Big|_{x=x_i} = 0 \end{aligned} \right\},$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n b_{is} U'_s(x_i) = 0 \\ \sum_{s=1}^n b_{is} U_s(x_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Такой же результат сохраняется и для боковой грани AB трапециевидной пластины (рис. 10). Если же грань AB нормальна к оси X (рис. 11), вместо (3.12) получим

$$\left. \begin{aligned} U'_i|_{x=b} &= 0 \\ U_i|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Присоединяя к \tilde{U}_i и \tilde{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) соответствующие системы дискретных граничных условий на гранях AB и CD (рис. 1), получим систему из $4n$ (n — число прямых) алгебраических уравнений. Ее правая часть будет линейно зависеть от внешней нагрузки на пластину и от неизвестных коэффициентов «контурных» полиномов. Решив такую систему относительно постоянных интегрирования $A_1^{(i)}$, $A_2^{(i)}$, $B_1^{(i)}$ и $B_2^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), найдем их выраженными через внешнюю нагрузку и через коэффициенты «контурных» полиномов. Принимая это во внимание, в дальнейшем будем считать, что система решений \tilde{U}_i и \tilde{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) зависит линейно только от внешней нагрузки на пластину и от неизвестных коэффициентов «контурных» полиномов.

§ 4. «КОНТУРНЫЕ» ФУНКЦИИ И СИСТЕМЫ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ «КОНТУРНЫХ» ПОЛИНОМОВ

«Контурные» функции зависят от граничных условий на параллельных гранях AD и BC (рис. 1). Число неизвестных и известных нам «контурных» функций при решении конкретной задачи также зависит от условий закрепления этих граней. Поэтому и коэффициенты «контурных» полиномов, которыми представлены неизвестные «контурные» функции, должны определяться из соответствующих граничных условий на гранях AD и BC .

1. Грани AD и BC закреплены на упруго прогибающихся и упруго скручивающихся балках (общий случай)

В данном случае

$$W_0 \neq 0, \quad W_{n+1} \neq 0, \quad M_0 \neq 0, \quad M_{n+1} \neq 0.$$

Следовательно, «контурными» полиномами

$$\tilde{W}_0, \quad \tilde{W}_{n+1}, \quad \tilde{M}_0 \quad \text{и} \quad \tilde{M}_{n+1}$$

необходимо представить все «контурные» функции. На грани AD

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] &= - \frac{EJ_1}{D} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= - \frac{GJ_p^{(1)}}{D} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где $GJ_p^{(1)}$ — жесткость контурной балки на кручение, а EJ_1 — жесткость ее на изгиб.

Из второго уравнения системы (1.1):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{D} M - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}.$$

Подстановка этих производных в (4.1) дает

$$\left. \begin{aligned} (\nu - 1) \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{1}{D} (2 - \nu) \frac{\partial M}{\partial y} &= - \frac{EJ_1}{D} \frac{d^4 W_0}{dx^4} \\ \frac{1}{D} M_0 + (\nu - 1) \frac{d^2 W_0}{dx^2} &= - \frac{GJ_p^{(1)}}{D} \left[\frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right)_{y=0} &= - \frac{EJ_1}{D} \frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{D(2-\nu)}{GJ_p^{(1)}} \left[\frac{1}{D} M_0 + (\nu - 1) \frac{d^2 W_0}{dx^2} \right] \\ \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{y=0} &= - EJ_1 \frac{d^4 W_0}{dx^4} - \frac{D(\nu-1)}{GJ_p^{(1)}} \left[M_0 + D(\nu-1) \frac{d^2 W_0}{dx^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

С помощью односторонних формул численного дифференцирования (см. [5]) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right)_{y=0} &\cong \frac{1}{2h^3} [-5W_0 + 18W_1 - 24W_2 + 14W_3 - 6W_4] = \\ &= - \frac{5W_0}{2h^3} + \frac{1}{2h^3} \sum_{s=1}^n (18b_{1s} - 24b_{2s} + 14b_{3s} - 6b_{4s}) U_s = \\ &= - \frac{5W_0}{2h^3} + \frac{1}{2h^3} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{ks} \right) U_s, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{y=0} &\cong \frac{1}{12h} (-25M_0 + 48M_1 - 36M_2 + 16M_3 - 3M_4) = \\ &= - \frac{25M_0}{12h} + \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) V_s, \quad \text{так как} \\ W_k &= \sum_{s=1}^n b_{ks} U_s, \quad M_k = \sum_{s=1}^n b_{ks} V_s \quad (k = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

С учетом этих выражений граничные условия (4.3) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{ks} \right) U_s &= 5W_0 - 2h^3 \left\{ \frac{EJ_1}{D} \frac{d^4 W_0}{dx^4} - \right. \\ &\left. - \frac{D(2-\nu)}{GJ_p^{(1)}} \left[\frac{1}{D} M_0 + (\nu - 1) \frac{d^2 W_0}{dx^2} \right] \right\} = P_1^{(0)}(x) \\ \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) V_s &= 25M_0 - 12h \left\{ EJ_1 \frac{d^4 W_0}{dx^4} + \right. \\ &\left. + \frac{D(\nu-1)}{GJ_p^{(1)}} \left[M_0 + D(\nu-1) \frac{d^2 W_0}{dx^2} \right] \right\} = P_2^{(0)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

На грани BC

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right)_{y=a} &= - \frac{EJ_2}{D} \frac{d^4 W_{n+1}}{dx^4} + \frac{D(2-\nu)}{GJ_p^{(2)}} \left[\frac{1}{D} M_{n+1} + (\nu - 1) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2} \right] \\ \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{y=a} &= - EJ_2 \frac{d^4 W_{n+1}}{dx^4} - \frac{D(\nu-1)}{GJ_p^{(2)}} \left[M_{n+1} + D(\nu-1) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где EJ_2 и $GJ_p^{(2)}$ — жесткости контурной балки на изгиб и кручение.

Как и выше, посредством односторонних формул численного дифференцирования, граничные условия (4.5) приближенно записываются в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{n-k+1,s} \right) U_s &= 5W_{n+1} + 2h^3 \left\{ \frac{EJ_2}{D} \frac{d^4 W_{n+1}}{dx^4} - \right. \\ &\left. - \frac{D(2-\nu)}{GJ_p^{(2)}} \left[\frac{1}{D} M_{n+1} + (\nu-1) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2} \right] \right\} = P_1^{(n+1)}(x) \\ \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1,s} \right) V_s &= 25M_{n+1} + 12h \left\{ EJ_2 \frac{d^4 W_{n+1}}{dx^4} + \right. \\ &\left. + \frac{D(\nu-1)}{GJ_p^{(2)}} \left[M_{n+1} + D(\nu-1) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2} \right] \right\} = P_2^{(n+1)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

так как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right)_{y=a} &= \frac{5W_{n+1}}{2h^3} - \frac{1}{2h^3} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{n-k+1,s} \right) U_s, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{y=a} &= \frac{25M_{n+1}}{12h} - \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1,s} \right) V_s. \end{aligned}$$

Системы (4.4) и (4.5) с определенной точностью эквивалентны рассматриваемым граничным условиям на гранях AD и BC и связывают системы дискретных функций U_i, V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с «контурными» функциями W_0, W_{n+1}, M_0 и M_{n+1} .

Поскольку число искомых коэффициентов полиномов $\tilde{W}_0, \tilde{W}_{n+1}, \tilde{M}_0$ и \tilde{M}_{n+1} конечное, условия (4.4) и (4.5) записываем в отдельных точках граней AD и BC (рис. 1). Пусть на грани AD необходимо взять m точек, а на грани BC — μ точек. В соответствии с этим имеем систему условий:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{ks} \right) U_s - P_1^{(0)}(x)|_{x=x_j} &= 0 \\ \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) V_s - P_2^{(0)}(x)|_{x=x_j} &= 0 \\ (j = 1, 2, 3, \dots, m) & \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{n-k+1,s} \right) U_s - P_1^{(n+1)}(x)|_{x=x_j} &= 0 \\ \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1,s} \right) V_s - P_2^{(n+1)}(x)|_{x=x_j} &= 0 \\ (j = 1, 2, 3, \dots, \mu) & \end{aligned} \right\}$$

Число точек $m + \mu$ назначается с учетом числа неизвестных коэффициентов и числа условий закрепления пластины в ее угловых точках A, B, C и D . Последние назовем дополнительными условиями.

Дополнительные условия зависят как от граничных условий на гранях AD и BC , так и от условий закрепления граней AB и BC .

Рассмотрим, например, дополнительные условия в угловой точке A .

а) Грань AB жестко закреплена:

$$W_0|_{x=x_A} = 0, \quad \frac{dW_0}{dx}|_{x=x_A} = 0.$$

б) Грань AB свободно оперта:

$$\left. \begin{aligned} W_0|_{x=x_A} &= 0 \\ M|_{\substack{x=x_A \\ y=0}} &= D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=x_A \\ y=0}} = 0 \end{aligned} \right\},$$

или

$$\left. \begin{aligned} W|_{x=x_A} &= 0 \\ 12h^2 \frac{d^2 W_0}{dx^2} + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 e_k b_{ks} \right) U_s|_{x=x_A} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

так как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=x_A \\ y=0}} &\cong \frac{1}{12h^2} (35W_0 - 104W_1 + 114W_2 - 56W_3 + 11W_4) = \\ &= \frac{1}{12h^2} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 e_k b_{ks} \right) U_s. \end{aligned}$$

Односторонняя формула численного дифференцирования для $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=x_A \\ y=0}}$ взята из [5].

Система (4.7) и дополнительные условия в угловых точках A , B , C и D взятые вместе представляют собой полную систему условий для определения всех коэффициентов «контурных» полиномов: \tilde{W}_0 , \tilde{W}_{n+1} , \tilde{M}_0 и \tilde{M}_{n+1} . Подставив в эту систему \tilde{U}_i , \tilde{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и \tilde{W}_0 , \tilde{W}_{n+1} , \tilde{M}_0 , \tilde{M}_{n+1} , приходим к системе алгебраических уравнений, из которой и найдем все неизвестные коэффициенты, т. е. приближенно определим «контурные» функции:

$$W_0, W_{n+1}, M_0 \text{ и } M_{n+1}.$$

Ниже все граничные условия рассматриваем только на грани AD (или только на грани BC), так как, согласно вышеизложенному, все относящееся к грани AD (или BC) легко может быть распространено и на грань BC (или AD).

2. Грань AD свободно оперта на упруго прогибающуюся балку

Этот случай граничных условий является частным случаем граничных условий (4.2). Полагая в (4.2) $GJ_p^{(1)} = 0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{1}{D} \frac{\partial M}{\partial y} &= - \frac{EJ_1}{D(1-\nu)} \frac{d^4 W_0}{dx^4} \\ M_0 - D(1-\nu) \frac{d^2 W_0}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.8)$$

Из второго уравнения системы (4.8) следует:

$$M_0 = D(1-\nu) \frac{d^2 W_0}{dx^2}.$$

Поэтому «контурным» полиномом необходимо представить только «контурную» функцию W_0 . Положим, что

$$W_0 \cong \tilde{W}_0 = \sum_k C_k^{(0)} x^k, \text{ тогда } \tilde{M}_0 = D(1-\nu) \sum_k k(k-1) C_k^{(0)} x^{k-2}.$$

Второе уравнение системы (4.8) удовлетворяется на грани АД тождественно, а первое — остается невыполненным. В соответствии с этим для определения коэффициентов $C_k^{(0)}$ имеем систему условий:

$$\left[6 \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 r_k b_{ks} \right) U_s - \frac{h^2(2-\nu)}{D(1-\nu)} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) V_s \right]_{x=x_j} =$$

$$= -\frac{12h^2 EJ_1}{D(1-\nu)} \frac{d^4 W_0}{dx^4} - 25h^2(2-\nu) \frac{d^2 W_0}{dx^2} + 30W_0|_{x=x_j}. \quad (4.9)$$

($j = 1, 2, \dots, m$)

Условия в точках А и Д аналогичны приведенным выше, в предыдущем пункте. При $EJ_1 = 0$ из (4.8) и (4.9) получаем соответствующие условия для свободной грани АД.

3. Грань ВС упруго защемлена на непрогибающейся балке

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= -\frac{GJ_p^{(2)}}{D} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right\}, \quad (4.10)$$

так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$.

Таким образом, $W_{n+1} = 0$, но $M_{n+1} \neq 0$, потому что на грани ВС

$$\frac{1}{D} M|_{y=a} = \frac{1}{D} M_{n+1} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=a} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \neq 0.$$

В связи с этим только M_{n+1} следует представить полиномом \tilde{M}_{n+1} . Тогда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \cong \frac{1}{D} \tilde{M}_{n+1}.$$

Для определения коэффициентов полинома \tilde{M}_{n+1} остается второе условие из (4.10). Соответствующая система условий имеет вид

$$GJ_p^{(2)} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1, s} \right) U_s - 12hM_{n+1}|_{x=x_j} = 0. \quad (4.11)$$

($j = 1, 2, \dots, p$)

Дополнительные условия в точках В и С, для рассматриваемых граничных условий на грани ВС, зависят: во-первых, от граничных условий на гранях АВ и СД, во-вторых, от условий закрепления контурной балки в точках В и С и, в-третьих, от того, какими являются углы АВС и ВСД — тупыми или острыми.

Положим, что в точках В и С контурная балка закреплена от поворота в направлении оси Y, и рассмотрим дополнительные условия в угловой точке В (угол АВС — острый).

а) Грань АВ жестко защемлена или свободно опира:

$$M_{n+1}|_{x=x_B} = 0, \text{ так как } M_x|_{x=x_B} = M_y|_{y=a} = 0.$$

б) Грань AB свободна:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{x=x_B} = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1, s}\right) U_s |_{x=x_B} = 0,$$

так как $W_{n+1}|_{x=x_B} = 0$.

При любых граничных условиях на грани CD дополнительное условие в угловой точке C (угол BCD — тупой) будет

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{x=x_C} = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1, s}\right) U_s |_{x=x_C} = 0,$$

так как $W_{n+1}|_{x=x_C} = 0$.

4. Грань BC жестко закреплена

В данном случае

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.12)$$

Значит, $W_{n+1} = 0$. Но $M|_{y=a} = M_{n+1} = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=a} =$
 $= D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \neq 0$.

Поэтому и здесь только M_{n+1} подлежит представлению «контурным» полиномом \tilde{M}_{n+1} . Для определения коэффициентов полинома \tilde{M}_{n+1} имеем дополнительные условия в угловых точках B, C и систему условий

$$\sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1, s}\right) U_s \Big|_{x=x_j} = 0,$$

$(j = 1, 2, \dots, p)$

которая отвечает второму граничному условию из (4.12). Дополнительные условия в точках B и C аналогичны условиям, которые приведены выше, в предыдущем пункте.

5. Грань AD свободно оперта

На такой грани

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.13)$$

Поскольку на грани $W = 0$,

$$\frac{1}{D} M = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому условия (4.13) можем заменить условиями

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.14)$$

Следовательно, на грани AD обе «контурные» функции известны:

$$W_0 = 0, \quad M_0 = 0.$$

Полученные результаты показывают, что только при закреплении параллельных граней пластины на упруго прогибающихся и упруго скручивающихся балках все четыре «контурные» функции W_0, W_{n+1}, M_0 и M_{n+1} не равны нулю и являются независимыми. В остальных же случаях закрепления параллельных граней пластины число «контурных» функций уменьшается до двух (за исключением случая свободного опирания параллельных граней, когда все «контурные» функции равны нулю). Следовательно, при расчете на изгиб непрямоугольной пластины в большинстве случаев граничных условий на ее параллельных гранях необходимо представлять «контурным» полиномом только две «контурные» функции. Это существенно облегчает расчет, так как число подлежащих определению неизвестных коэффициентов уменьшается вдвое.

Итак, план расчета трапецидальной пластины состоит в следующем:

1) для выбранного числа прямых n записывается основная система дифференциальных уравнений дискретного метода и по соответствующим формулам вычисляются матрицы: B, B^{-1}, λ и α^2 ;

2) в соответствии с граничными условиями на параллельных гранях вместо «контурных» функций в основную систему дифференциальных уравнений подставляем «контурные» полиномы, в которых удерживается определенное число членов с неизвестными коэффициентами;

3) интегрируя основную систему дифференциальных уравнений, получаем системы решений \bar{U}_i и \bar{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), содержащих коэффициенты «контурных» полиномов;

4) Подставив \bar{U}_i и \bar{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в системы дискретных граничных условий на криволинейных гранях AB и CD , получаем систему алгебраических уравнений, из которой определяем все постоянные интегрирования;

5) для определения коэффициентов «контурных» полиномов составляется система алгебраических уравнений, соответствующая граничным условиям на параллельных гранях и дополнительным условиям в угловых точках A, B, C и D .

В заключение отметим, что приближенный способ, которым интегрировалась основная система дифференциальных уравнений (1.5), примыкает к способу, предложенному в работе [6].

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОГИБОВ И УСИЛИЙ В СЕЧЕНИЯХ ТРАПЕЦИДАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

«Контурные» полиномы $\bar{W}_0, \bar{M}_0, \bar{W}_{n+1}$ и \bar{M}_{n+1} представляют собой прогибы и приведенные моменты на граничных прямых 0 и $n+1$. Прогибы и приведенные моменты на внутренних прямых вычисляются по формулам:

$$W_i = \sum_{s=1}^n b_{is} U_s, \quad M_i = \sum_{s=1}^n b_{is} V_s \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

С помощью функции

$$\frac{1}{D} M = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

изгибающие моменты M_x и M_y преобразуются к виду:

$$M_x = -\nu M - D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad M_y = -M - D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Следовательно,

$$M_x^{(i)} = - \sum_{s=1}^n b_{is} [\nu V_s + D(1-\nu)U_s'] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$M_y^{(i)} = - \sum_{s=1}^n b_{is} [V_s + D(1-\nu)U_s'] \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

На грани AD

$$M_x^{(0)} = -\nu M_0 - D(1-\nu) \frac{d^2 W_0}{dx^2}, \quad M_y^{(0)} = -M_0 - D(1-\nu) \frac{d^2 W_0}{dx^2}.$$

На грани BC

$$M_x^{(n+1)} = -\nu M_{n+1} - D(1-\nu) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2}, \quad M_y^{(n+1)} = -M_{n+1} - D(1-\nu) \frac{d^2 W_{n+1}}{dx^2}.$$

Таким образом, изгибающие моменты вдоль прямых i ($i = 1, 2, \dots, n$), 0 и $n+1$ вычисляются без использования формул численного дифференцирования.

Поперечные силы Q_x , как и M_x и M_y , вычисляются также без применения формул численного дифференцирования, а именно:

$$Q_x^{(i)} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 W)_{y=y_i} = - \frac{\partial M_i}{\partial x} = - \sum_{s=1}^n b_{is} V_s' \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$Q_x^{(0)} = - \frac{\partial M_0}{\partial x} \quad \text{и} \quad Q_x^{(n+1)} = - \frac{\partial M_{n+1}}{\partial x}.$$

Поперечные силы Q_y определяются с помощью формул численного дифференцирования. Например,

$$Q_y^{(i)} = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 W)_{y=y_i} = - \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{y=y_i} = - \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} V_s \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

обозначения Δ_{is} ($i = 1, 2, \dots, n$), Δ_{1s} , Δ_{2s} , $\Delta_{n-1,s}$ и Δ_{ns} уже применялись в § 2.

$$Q_y^{(0)} = \frac{25M_0}{12h} - \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) V_s,$$

$$Q_y^{(n+1)} = - \frac{25M_{n+1}}{12h} + \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1,s} \right) V_s.$$

Таким же образом вычисляются и крутящие моменты:

$$M_{xy}^{(i)} = D(1-\nu) \frac{1}{12h} \sum_{s=1}^n \Delta_{is} U_s' \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$M_{xy}^{(0)} = \frac{D(1-\nu)}{12h} \left\{ -25 \frac{dW_0}{dx} + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) U_s' \right\},$$

$$M_{xy}^{(n+1)} = \frac{D(1-\nu)}{12h} \left\{ 25 \frac{dW_{n+1}}{dx} - \frac{dW_{n+1}}{dx} \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{n-k+1,s} \right) U_s' \right\}.$$

Обобщенная опорная реакция вдоль грани AD

$$\begin{aligned} R_{AD} &= Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=0} = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right\} \Big|_{y=0} = \\ &= D(1-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - (2-\nu) \frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned}$$

определяется с помощью односторонних формул численного дифференцирования, например, формул, приведенных в § 4. То же самое относится и к вычислению обобщенной опорной реакции R_{BC} .

В точке пересечения прямой i ($i = 1, 2, \dots, n$) с криволинейной гранью AB обобщенная опорная реакция в системе координат n, s (рис. 9)

$$R_{AB}^{(i)} = Q_n^{(i)} - \frac{\partial M_{ns}^{(i)}}{\partial s} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а опорный изгибающий момент

$$M_n^{(i)} = M_x^{(i)} \sin^2 \vartheta_i + M_y^{(i)} \cos^2 \vartheta_i + M_{xy}^{(i)} \sin 2\vartheta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

При этом

$$Q_n^{(i)} = -D \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 W)_{y=y_i} = Q_x^{(i)} \sin \vartheta_i - Q_y^{(i)} \cos \vartheta_i,$$

$$M_{ns}^{(i)} = [M_y^{(i)} - M_x^{(i)}] \sin \vartheta_i \cos \vartheta_i - M_{xy}^{(i)} \cos 2\vartheta_i.$$

Следовательно, располагая формулами для вычисления $Q_x^{(i)}$, $Q_y^{(i)}$, $M_x^{(i)}$, $M_y^{(i)}$ и $M_{xy}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), которые приведены выше, можно определить и значения $Q_n^{(i)}$, $M_{ns}^{(i)}$ и $M_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

После вычисления дискретных значений $M_{ns}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) значения $\frac{\partial M_{ns}^{(i)}}{\partial s}$ находим по формуле

$$\frac{\partial M_{ns}^{(i)}}{\partial s} \cong \frac{M_{ns}^{(i+1)} s_{i+1}^2 - M_{ns}^{(i)} (s_{i+1}^2 - s_{i-1}^2) - M_{ns}^{(i-1)} s_{i-1}^2}{(s_{i+1} + s_{i-1}) s_{i+1} s_{i-1}},$$

где $M_{ns}^{(i+1)}$, $M_{ns}^{(i)}$, $M_{ns}^{(i-1)}$ — значения M_{ns} на грани AB соответственно в точках $i+1$, i и $i-1$; s_{i+1} и s_{i-1} — длины дуг от точки i до точек $i+1$ и $i-1$.

Эта формула получается в результате «скользящей» интерполяции [1] функции $M_{ns}(s)$ полиномом второй степени.

Если грани AB и AD свободно оперты, в угловой точке A (рис. 9) возникает реакция

$$R_A = M_{xy} + M_{ns} = D(1-\nu)(1 - \cos 2\vartheta_0) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Значение R_A может быть вычислено, например, по формуле

$$R_A \cong D(1-\nu)(1 - \cos 2\vartheta_0) \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=1}^4 f_k b_{ks} \right) U'_s.$$

§ 6. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Равносторонняя свободно оперта по контуру треугольная пластина, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой $p = \text{const}$ (рис. 12).

Принимаем $n = 5$. Тогда $h = \frac{a}{3}$. «Контурные» функции $W_0 = M_0 = W_0 = M_0 = 0$. Система (1.5) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} V_i - \alpha_i^2 V_i &= \frac{12p}{12 + \lambda_i} \sum_{s=1}^5 b_{is} = p \gamma_i \\ U_i - \alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

где $b_{is} = (-1)^{i+s} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi is}{6}$ ($i, s = 1, 2, \dots, 5$),

$$\lambda_i = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi i}{6} \right), \quad \alpha_i^2 = -\frac{12\lambda_i}{h^2(12 + \lambda_i)}.$$

Интегрируя (6.1), получаем:

$$V_i = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + A_2^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_i x - \frac{P_i}{\alpha_i^2},$$

$$U_i = B_1^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_i x + B_2^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_i x + A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \alpha_i x}{2D\alpha_i} +$$

$$+ \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left\{ \frac{x \operatorname{ch} \alpha_i x}{2\alpha_i} - \frac{1}{2\alpha_i^2} \operatorname{sh} \alpha_i x \right\} + \frac{P_i}{D\alpha_i^4} \quad (i = 1, 2, \dots, 5).$$

Принимая во внимание симметрию W_i и M_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) относительно оси Y , имеем:

$$A_2^{(i)} = B_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5).$$

Постоянные интегрирования $A_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) определяются из алгебраической системы

$$M_i|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^5 b_{is} V_s|_{x=x_i} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.2)$$

постоянные интегрирования $B_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) — из алгебраической системы

$$W_i|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^5 b_{is} U_s|_{x=x_i} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, 5) \quad (6.3)$$

Системы (6.2) и (6.3) отличаются друг от друга только своими пра-

выми частями и легко решаются последовательно. Сначала из (6.2) находятся $A_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), которые затем подставляются в правую часть системы (6.3).

Результаты расчета приведены в табл. 1, где для сравнения выписаны данные точного решения из [10]. Числа в сопоставлении не нуждаются.

Таблица 1

Прогибы в $\frac{pa^4}{D}$, M и моменты в pa^2 , $\nu = 0,3$

y	$-\frac{1}{3}a$	0	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	a
Дискретный метод					
W	0,01204	0,01645	0,01301	0,00615	0,00116
M	-0,1157	-0,1481	-0,1250	-0,0735	-0,0258
M_x	—	0,09626	—	—	—
M_y	—	0,09626	—	—	—
Точное решение					
W	0,01206	0,01646	0,01302	0,00617	0,00112
M	-0,1157	-0,1481	-0,1250	-0,0741	-0,0231
M_x	—	0,09628	—	—	—
M_y	—	0,09628	—	—	—

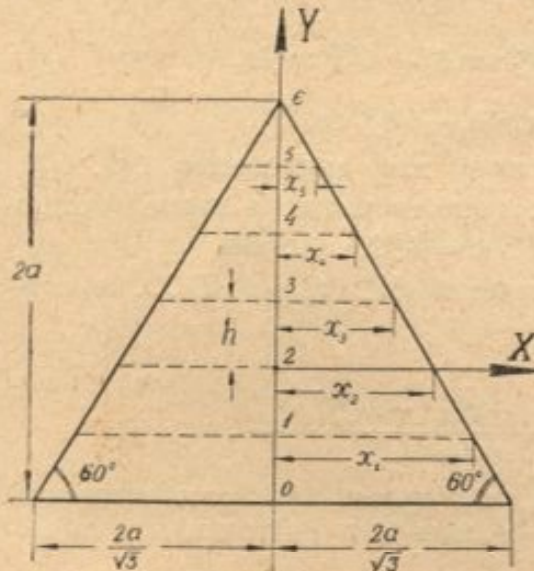


Рис. 12.

Пример 2. Свободно опертая ромбовидная пластина с углом скоса $\vartheta = 45^\circ$, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой $p = \text{const}$ (рис. 13).

Принимаем $n = 5$. Высота пластины равна $2a \sin \vartheta$. Поэтому $h = h^* \sin \vartheta$, где $h^* = \frac{a}{3}$.

$$W_0 = M_0 = W_6 = M_6 = 0.$$

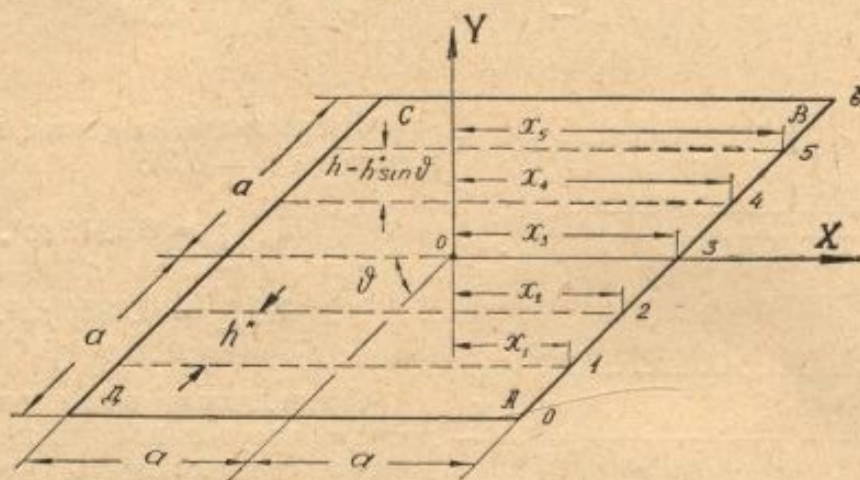


Рис. 13.

Система (1.5) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - 2\alpha_i^2 V_i &= p \frac{12}{12 + \lambda_i} \sum_{s=1}^5 b_{is} = p \gamma_i, \\ U_i'' - 2\alpha_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i, \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

$$V_i = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \sqrt{2}\alpha_i x + A_2^{(i)} \operatorname{sh} \sqrt{2}\alpha_i x - \frac{p \gamma_i}{2\alpha_i^2},$$

$$U_i = B_1^{(i)} \operatorname{ch} \sqrt{2}\alpha_i x + B_2^{(i)} \operatorname{sh} \sqrt{2}\alpha_i x + \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \sqrt{2}\alpha_i x}{2\sqrt{2}\alpha_i} + \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left\{ \frac{x \operatorname{ch} \sqrt{2}\alpha_i x}{2\sqrt{2}\alpha_i} - \frac{1}{4\alpha_i^2} \operatorname{sh} \sqrt{2}\alpha_i x \right\} + \frac{p \gamma_i}{4D\alpha_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 5).$$

В силу симметрии W , и M , ($i = 1, 2, \dots, 5$) относительно центра пластины

$$\begin{aligned} A_2^{(k)} &= B_2^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 3, 5), \\ A_1^{(2)} &= A_1^{(4)} = B_1^{(2)} = B_1^{(4)} = 0. \end{aligned}$$

Остальные постоянные интегрирования определяются последовательным решением систем алгебраических уравнений:

$$M_i|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^5 b_{is} V_s|_{x=x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

$$W_i|_{x=x_i} = \sum_{s=1}^5 b_{is} U_s|_{x=x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

которые по структуре аналогичны алгебраическим системам (6.2) и (6.3). Вычисления сведены в табл. 2.

Таблица 2

Прогибы в $\rho a^4/D$

x	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
0	0,0109	0,0187	0,0216	0,0187	0,0109
0,5286a	0	0,0071	0,0136	0,0141	0,0091
a	—	—	0	0,0018	0,0062

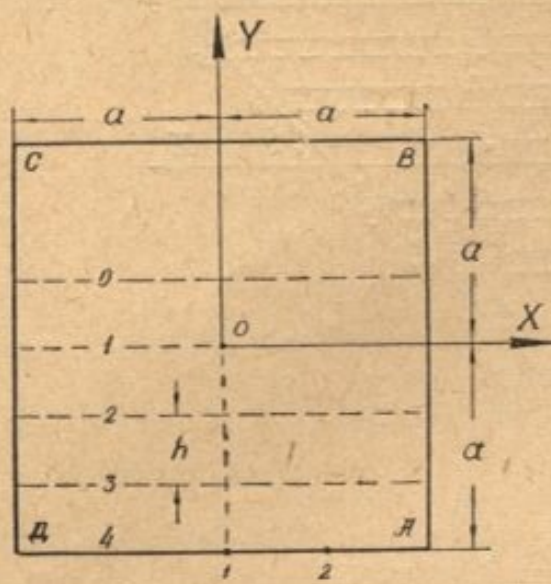


Рис. 14.

Изгибающие моменты в центре пластины ($\nu = 0,3$);

$$M_x \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,1242 \rho a^2,$$

$$M_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0,0950 \rho a^2.$$

Приведенные выше результаты расчета треугольной пластины позволяют предположить, что и результаты расчета ромбовидной пластины также близки к точным.

Пример 3. Защемленная по контуру квадратная пластинка под равномерно распределенной нагрузкой $p = \text{const}$ (рис. 14).

Задача симметрична относительно обеих осей; X и Y . Принимаем

$n = 3$, тогда $h = \frac{a}{3}$. С учетом того, что $W_4 = 0$, система (1.9) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} V_i'' - \bar{\alpha}_i^2 V_i &= p \bar{\gamma}_i - \eta_i(x) \\ U_i'' - \bar{\alpha}_i^2 U_i &= \frac{1}{D} V_i + \frac{\bar{b}_{is}^{-1}}{12 + \bar{\lambda}_i} \frac{1}{D} M_4(x) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\}, \quad (6.4)$$

$$\text{где } \eta_i(x) = \frac{\bar{b}_{is}^{-1}}{12 + \bar{\lambda}_i} \left\{ M_4''(x) + \frac{12}{h^2} M_4(x) \right\}, \quad \bar{\gamma}_i = \frac{12}{12 + \bar{\lambda}_i} \sum_{s=1}^3 \bar{b}_{is}^{-1},$$

$$\bar{B} = |\bar{b}_{is}| = \left| (-1)^{i+s} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(2s-1)(i-1)}{6} \right| \quad (s, i = 1, 2, 3),$$

$$\bar{\lambda}_i = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi(2i-1)}{6} \right), \quad \bar{\alpha}_i^2 = -\frac{12\bar{\lambda}_i}{h^2(12 + \bar{\lambda}_i)},$$

$$\bar{B}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}.$$

Принимаем $M_4(x) = \bar{M}_4(x) = d_0 + d_1 x^2 + d_2 x^4$, так как функция относительно оси Y симметрична.

Интегрируем систему (6.4):

$$\bar{V}_i = A_1^{(i)} \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i x + A_2^{(i)} \frac{1}{\bar{\alpha}_i} \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i x + \frac{P \bar{\gamma}_i}{\bar{\alpha}_i^2} [\bar{\alpha}_i \beta_0^{(i)}(x)] - V_i^{(*)}(x),$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_i = & B_1^{(i)} \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i x + B_2^{(i)} \frac{1}{\bar{\alpha}_i} \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i x + \frac{1}{D} A_1^{(i)} \frac{x \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i x}{2\bar{\alpha}_i^2} + \\ & + \frac{1}{D} A_2^{(i)} \left\{ \frac{x \operatorname{ch} \bar{\alpha}_i x}{2\bar{\alpha}_i^2} - \frac{1}{2\bar{\alpha}_i} \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i x \right\} + \frac{P \bar{\gamma}_i}{D \bar{\alpha}_i^2} \theta_0^{(i)}(x) - U_i^{(*)}(x), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\text{где } V_i^{(*)}(x) = \frac{1}{\bar{\alpha}_i} \int_0^x \eta_i(t) \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i(x-t) dt,$$

$$U_i^{(*)}(x) = \frac{1}{D \bar{\alpha}_i} \int_0^x V_i^{(*)}(t) \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i(x-t) dt - \frac{\bar{b}_{is}^{-1}}{D \bar{\alpha}_i (12 + \bar{\lambda}_i)} \int_0^x \bar{M}_4(t) \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i(x-t) dt,$$

$$\beta_0^{(i)}(x) = \frac{1}{\bar{\alpha}_i} (\operatorname{ch} \bar{\alpha}_i x - 1), \quad \theta_0^{(i)}(x) = \int_0^x \beta_0^{(i)}(t) \operatorname{sh} \bar{\alpha}_i(x-t) dt.$$

Из-за симметрии W_i и M_i ($i = 1, 2, 3$) относительно оси Y

$$A_2^{(i)} = B_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Остальные постоянные интегрирования находим из системы независимых граничных условий

$$\left. \begin{aligned} U_i|_{x=a} &= 0 \\ \frac{dU_i}{dx}|_{x=a} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

т. е. отдельно для каждой функции \bar{U}_i ($i = 1, 2, 3$).

При помощи семичленной односторонней формулы численного дифференцирования (см. [5]), с учетом симметрии относительно оси X , получаем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=-a} = 1,08W_1 - 1,6875W_2 + W_3 = 0.$$

В этом уравнении переходим от функций W_i ($i = 1, 2, 3$) к функциям U_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда для определения коэффициентов полинома \bar{M}_4 будем иметь систему условий

$$U_2 + 0,026654U_2 + 0,026182U_3|_{x=x_j} = 0, \quad (6.5)$$

$$(j = 1, 2)$$

Дополнительное условие в угловой точке A

$$M_4(x)|_{x=a} = 0. \quad (6.6)$$

Подставим \bar{U}_i ($i = 1, 2, 3$) в систему (6.5). После этого из алгебраических уравнений исключаем коэффициент d_2 , который в силу условия (6.6) выражается через коэффициенты d_0 и d_1 . Таким образом, придем к алгебраической системе

$$\left. \begin{aligned} pa^2 0,048376 + d_0 0,263132 + d_1 a^2 0,019370 &= 0 \\ pa^2 0,029388 + d_0 0,189347 + d_1 a^2 0,028118 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$d_0 = -0,21200pa^2, \quad d_1 = 0,38244p.$$

В табл. 3 приведены некоторые результаты вычислений и данные расчета такой же пластины, которые взяты из [10]. Результаты по Б. Г. Галеркину получены после удерживания в ряде, аппроксимирующем функцию прогибов пластины, трех членов.

Таблица 3
Прогибы в pa^4/D , моменты в pa^2 , $\nu = 0,3$

Метод	$W _{\substack{x=0 \\ y=0}}$	$M_x _{\substack{x=0 \\ y=0}}$	$M_y _{\substack{x=0 \\ y=0}}$	$M_x _{\substack{x=a \\ y=0}}$	$M_y _{\substack{x=0 \\ y=a}}$
Дискретный	0,0202	0,0910	0,0910	-0,2114	-0,2120
По С. П. Тимошенко	0,0202	—	—	-0,2052	-0,2052
По Б. Г. Галеркину	0,0200	0,0904	0,0904	-0,2229	-0,2229

ВЫВОДЫ

Дискретный метод позволяет получить решение задачи об изгибе упругой прямоугольной пластины (трапецидальной, трапециевидной в виде параллелограмма или треугольника) с разнообразными граничными условиями и нагрузками по определенному алгоритму, который заключается в составлении систем алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования и коэффициентов «контурных» полиномов. Функции системы решений \bar{U}_i и \bar{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) легко табулируются, что значительно сокращает вычислительную работу при составлении алгебраических систем дискретного метода.

Дискретный метод легко распространяется и на другие упругие пластины: секториальные, круглые, лежащие на упругом основании, ортотропные.

Таким образом, можно допустить, что приведенное в работе упрощение интегрирования основных систем дифференциальных уравнений дискретного метода расширяет область его использования на ряд практически важных задач строительной механики сплошных систем.

Следует отметить простоту и удобство дискретного метода при расчете на изгиб прямоугольных пластин, имеющих обе параллельные грани свободно опертыми на непрогибающиеся балки. В этом случае все «контурные» функции известны и равны нулю, а решение задачи состоит в определении только постоянных интегрирования.

Для прямоугольных пластин систему точечных граничных условий на гранях, пересекаемых введенными прямыми, можно преобразовать в систему независимых точечных граничных условий — см., например, системы (3.7), (3.11) и (3.14). Это дает возможность находить постоянные интегрирования (выраженными через коэффициенты «контурных» полиномов) отдельно для каждой i -й пары решений \bar{U}_i и \bar{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), что особенно упрощает расчет на изгиб прямоугольных пластин дискретным методом [7].

Вариационный метод В. З. Власова также может быть использован при расчете на изгиб упругой прямоугольной пластины. Однако этот метод связан с необходимостью выбирать систему функций, которая бы аппроксимировала прогибы изогнутой пластины и одновременно с этим удовлетворяла граничным условиям на непараллельных гранях пластины (рис. 1). Такие функции получены только для случая жесткого защемления непараллельных граней пластины [9].

Дискретный метод не нуждается в выборе специальных аппроксимирующих функций для прогибов пластины, а основная система дифферен-

циальных уравнений дискретного метода не зависит от условий закрепления непараллельных граней пластины. В этом смысле дискретный метод обладает некоторыми преимуществами, по сравнению с вариационным методом В. З. Власова.

По сравнению с методом сеток дискретный метод также имеет свои преимущества.

Во-первых, в методе сеток граничные условия пластины удовлетворяются с помощью недостаточно точных экстраполяционных конечно-разностных формул, особенно при выполнении условий жесткого защемления или условий на свободной грани пластины. В дискретном методе при удовлетворении точечных граничных условий на параллельных гранях пластины могут быть использованы более точные формулы численного дифференцирования, например, четырехчленные, пятичленные и т. д., в зависимости от числа введенных прямых. То же относится и к непараллельным граням пластины, если они свободны. Если же эти грани пластины свободно оперты или жестко защемлены, граничные условия в отдельных точках выполняются точно.

Во-вторых, при одинаковом шаге h в направлении оси Y (рис. 1) основная система дифференциальных уравнений дискретного метода гораздо точнее аппроксимирует дифференциальное уравнение изгиба упругой пластины, чем система алгебраических уравнений метода сеток. В направлении же оси X точность основной системы дифференциальных уравнений дискретного метода еще выше.

В-третьих, непрямоугольные упругие пластины, имеющие неправильную форму в плане (неравнобокая трапеция, равнобедренный треугольник, трапециевидальная пластина), можно рассчитать на изгиб методом сеток при помощи решетки нерегулярной структуры [2]. Однако это ухудшает удовлетворение граничных условий и усложняет расчет. Этим, очевидно, объясняется тот факт, что метод сеток успешно применялся и применяется при расчетах на изгиб непрямоугольных пластин только правильной формы: равнобокая трапеция, равнобедренный треугольник [3], параллелограмм или ромб [11]. Дискретный метод свободен от этого недостатка.

Результаты расчетов непрямоугольных пластин дискретным методом и сравнение их с результатами, полученными с помощью других методов, показывают, что удовлетворительную точность по дискретному методу можно получить, ограничиваясь введением трех-пяти прямых. С введением большего числа прямых дискретный метод может быть использован при более точном исследовании напряженно-деформированного состояния непрямоугольных пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Винокуров. Прямые методы решения пространственных контактных задач для массивов и фундаментов, Изд-во ХГУ, 1956.
2. П. М. Варвак. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. 2, Изд-во АН УССР, 1952.
3. Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. Пластины, диски, балки, стенки, Госстройиздат УССР, 1959.
4. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, Гостехтеориздат, 1957.
5. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа, Гостехтеориздат, 1953.
6. В. В. Новожилов. В одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, ПММ, т. 16, вып. 3, 1952.
7. Ю. П. Петров. Расчет на изгиб упругих прямоугольных пластин дискретным методом. Труды Харьковского авиационного ин-та, т. 18. Изд-во ХГУ, 1960.

-
8. М. Г. Слободянский. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости, ПММ, т. 3, вып. 1, 1939.
9. Д. Н. Соболев. Применение вариационного метода В. З. Власова к расчету косых и трапециевидных пластинок. Автореф. канд. дисс., 1959.
10. С. П. Тимошенко. Пластины и оболочки, Гостехтеориздат, 1946.
11. П. В. Боровский. Исследование прочности косоугольных пластин. Автореф. канд. дисс., 1956.
-