В. А. Рвачев

Оценка спектральной плотности многомерных экономических временных рядов.

Временные ряды, подлежащие анализу в экономике, обладают спецификой, заметно отличающей их от рядов, наблюдаемых в других областях науки и техники, а именно - наличием трендов, сезонных колебаний, относительно небольшой длительностью.

Это обстоятельство обусловило относительно позднее использование спектральных методов в задачах эконометрики. Однако в последние десятилетия эти методы все шире используются для анализа экономических процессов [2].

Какие же цели ставит перед собой спектральный анализ экономических временных рядов. Это, во-первых, выявление связей или зависимостей между компонентами векторного временного ряда. Во-вторых, он является основой для решения задач оценки неизвестных компонент ряда и задач экстраполяции (прогнозирования). В-третьих, он полезен при решении задачи идентификации экономической модели (оценка параметров).

Статистический анализ временных рядов является базой для теории прогноза и регулирования (управления) и необходим и в тех областях, где пока нет хорошо разработанных точных методов регулирования (например, в экономике (Хэннан [1])). Для экономики важно рассмотрение многомерных временных рядов.

Мы будем рассматривать случайный вект

$$\bar{X}(t) = [x_1(t), \dots, x_p(t)]$$

через $v_{j,k}(s,t)$ обозначим

$$v_{j,k}(s,t) = E(x_j(s)\, x_k(t)), \quad \Gamma = [v_{i,k}]$$ - квадратная матрица.

Важный класс образуют временные ряды, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{0}^{q} B(j)\, \bar{X}(n-j) = \sum_{0}^{s} A(k)\, c(n-k), \qquad (1)$$

где $B(0) = I_p$, $B(j)$ - квадратные матрицы, $A(k)$ произвольны,

$$E(\, c(n)\, c^T(m)\,) = \delta^n_m\, G.$$

Такие ряды называют рядами авторегрессии - скользящего среднего (АРСС). Они имеют важное значение в экономике.

В стационарном случае

$$\Gamma(s,t) = \Gamma(s-t) = E(\, \bar{X}(0)\, \bar{X}^T(t)\,).$$

Пусть $$P_{jk}(n) = v_{jk}(n) \left(v_{jj}(0)\, v_{kk}(0) \right)^{-1/2}$$

Имеет место формула для $t \in R$.

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} F(d\lambda) = \int_{0}^{\infty} \{ \cos t\lambda\, C(d\lambda) + \sin t\lambda\, Q(d\lambda) \}. \qquad (2)$$

где $F(\lambda_1) - F(\lambda_2)$ эрмитовы и неотрицательны для $\lambda_1 > \lambda_2$,

$C(\lambda)$ - вещественна и симметрична,

$C(\lambda_1) - C(\lambda_2)$ - неотрицательна для $\lambda_1 > \lambda_2$,

$Q(\lambda)$ - вещественна и кососимметрична,

$F(\lambda)$ - называется матричной спектральной функцией,

$C(\lambda)$ - коспектральная матричная функция,

$Q(\lambda)$ - квадратурная спектральная функция.

Для $F(\lambda)$ имеет место разложение Лебега:

$$F(\lambda) = F_{\text{а. н.}}(\lambda) + F_{\text{дискр.}}(\lambda) + F_{\text{сигн.}}(\lambda)$$

Пусть $f(\lambda) = F'_{\text{а. н.}}(\lambda)$, $c(\lambda) = 2\,\mathrm{Re}\, f(\lambda)$, $q(\lambda) = -2\,\mathrm{Im}\, f(\lambda)$.

$f(\lambda)$ - называется матричной спектральной плотностью,

$c(\lambda)$ - матричной коспектральной плотностью,

$q(\lambda)$ - квадратурной спектральной плотностью.

В случае дискретного времени

$$\Gamma(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \cdot F(d\lambda) = \int_{0}^{\pi} \{ \cos n\lambda\, C(d\lambda) + \sin n\lambda\, Q(d\lambda) \}. \qquad (3)$$

Если ряд имеет вид (1), спектральная плотность равна

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1} A\, G\, A^{*}$$

где

$$A(\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{q} B(j)\, e^{ij\lambda} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{s} A(k)\, e^{ik\lambda} \right),$$

если $\det \left(\sum B(j)\, z^{j} \right) = 0$ при $|z| = 1$.

Если $\det f(\lambda) = 0$ и $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\, \Phi_0(e^{i\lambda})\, \Phi_0(e^{i\lambda})^{*}$,

где $\Phi_0(z)$ - рациональная функция от z, голоморфная в круге $|z| < 1$, то частотная характеристика фильтра, дающего наилучший линейный прогноз на v шагов равна

$$e^{i\nu\lambda}\,[\,e^{i\nu\lambda}\,\Phi(e^{i\lambda})\,]_{+}\,\Phi^{-1}(e^{i\lambda})$$

а ковариационная матрица ошибок прогноза равна

$$E\left\{ (x(n) - \hat{x}^{(\nu)}(n))\,(\,x(n) - \hat{x}^{(\nu)}(n)\,) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\,e^{i\nu\lambda}\,\Phi(e^{i\lambda})\,]_{-}\, G\, [\,e^{i\nu\lambda}\,\Phi(e^{i\lambda})\,]_{-}^{*}\, d\lambda\,,$$

где $$G = \Phi_0(0)\,\Phi_0^{*}(0)$$

и

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\,\Phi(e^{i\lambda})\,G\,\Phi(e^{i\lambda})^{*}$$

Таким образом, в важном в экономике случае временного ряда вида (1) оценка матрицы спектральной плотности позволяет получать наилучший линейный прогноз.

Известно несколько методов оценки спектральной плотности: методы, основанные на осреднении периодограмм с использованием специальных спектральных окон, методы, использующие временные окна, методы, предполагающие, что изучаемый ряд может быть описан моделью авторегрессии-скользящего среднего [1].

В настоящей статье остановимся на первом из методов.

Периодограммной оценкой спектральной плотности, построенной по выборке $X(t)$, $t = 0, 1, \ldots, N - 1$, из многомерной последовательности для каждой пары ее компонент, называется оценка вида:

$$\hat f_{rj}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x)\, I_{rj}(x+\lambda)\,dx, \quad r,j = 1,\dots,n,$$

где $I_{rj}(\lambda)$ - взаимная периодограмма последовательностей $X_r(t)$ и $X_j(t)$, определенная соотношением

$$I_{rj}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{t,s=0}^{N-1} X_r(t)\, X_j(s)\, e^{-i\lambda(t-s)},$$

а $\Phi_N(x)$ - числовая функция ("спектральное окно") вида

$$\Phi_N(x) = A_N G(A_N x) \left(\int_{-\pi A_N}^{\pi A_N} G(y)\,dy \right)^{-1}, \quad -\pi < x < \pi,$$

для некоторых $A_N > 0$, таких, что $A_N \to \infty$, $A_N/N \to 0$ при $N \to \infty$. Функция $G(x)$, где $-\infty < x < \infty$, есть действительная, четная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^a\, |G(x)|\,dx < \infty, \quad 0 < a < 2$$

В качестве $G(x)$ выберем атомарные функции.

Для оценки спектральной плотности $f_c(\lambda)$ по выборочной траектории $c(t)$ разработан целый ряд методов. При этом используются различные спектральные, ковариационные, временные окна (весовые функции) [3], в том числе окна, построенные с помощью атомарных функций (а. ф.) [4].

Для уменьшения влияния конечности интервала интегрирования необходимо применять окна с глубоким сглаживанием по краям временного интервала.

Пусть в. р. $x(t)$ задан при $-1 < t < 1$. Преобразование Фурье в. р. равно

$$X_0(\lambda) = \int_{-1}^{1} x(t)\, e^{i\lambda t}\, dt .$$

Вместо вычисления $X_0(\lambda)$ целесообразно вычислять

$$X_w(\lambda) = \int_{-1}^{1} w(t)\, x(t)\, e^{i\lambda t}\, dt ,$$

где $w(t)$ - временное окно, которое удовлетворяет следующим условиям

$$w(t) = 0 \text{ при } |t| > 1, \quad w(0) = 1, \quad w(-t) = w(t).$$

Автором разработаны окна $w(t)$ на основе теории атомарных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974,-575с.

2. Гренджер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. М.: Статистика, 1972.-312с.

3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. т.2б2. М.: Мир. 1983.-311с., 256с.

4. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифферециальных уравнений. УМН. т.45, N1, 1990, с.77-103.