УДК 539.3

П. Д. Доценко – д-р техн. наук, О. В. Дзюбенко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пусть двумерная задача теории упругости в области с характерными размерами [a, b] сведена к разрешающему уравнению

$$\sum_{j=0}^{4} \sum_{k=0}^{j} \alpha_{k,j-k} \frac{\partial^j w}{\partial x^k \partial y^{j-k}} = q(x,y) \qquad (1)$$

с постоянными коэффициентами α_{jk} и известной правой частью как функцией своих аргументов.

Представим правую часть и решение задачи в виде двойных полиномиальных рядов

$$q(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_{kj} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^j}{j!};$$

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[D_{kj} + \sum_{i=0}^{3} C_{kj}^{i} \right] \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^j}{j!}, \qquad (2)$$

где коэффициенты q_{kj}, D_{kj}, C_{kj}^{i} выражены через промежуточные постоянные формулами

$$q_{kj} = \frac{q_k}{b^j} + \frac{r_j}{a^k}; \quad D_{kj} = \frac{Q_k}{b^j} + \frac{R_j}{a^k};$$

$$C_{kj}^{i} = \frac{a_i A_k^i}{b^j} + \frac{b_i B_j^i}{a^k}; \quad i = 0,1,2,3; \quad k, j = [0, \infty]. \quad (3)$$

Постоянные a_i, b_i независимы и определяются граничными условиями.

Подстановка выражений (2) в уравнение (1) приводит к рекуррентным соотношениям

$$\alpha_{40} A_{k+4}^i + \left(\alpha_{30} + \frac{\alpha_{31}}{b}\right) A_{k+3}^i + \left(\alpha_{20} + \frac{\alpha_{21}}{b} + \frac{\alpha_{22}}{b^2}\right) A_{k+2}^i +$$

$$+ \left(\alpha_{10} + \frac{\alpha_{11}}{b} + \frac{\alpha_{12}}{b^2} + \frac{\alpha_{13}}{b^3}\right) A_{k+1}^i +$$

$$+ \left(\alpha_{00} + \frac{\alpha_{01}}{b} + \frac{\alpha_{02}}{b^2} + \frac{\alpha_{03}}{b^3} + \frac{\alpha_{04}}{b^4}\right) A_k^i = 0; \qquad (4)$$

$$\alpha_{04} B_{j+4}^i + \left(\alpha_{03} + \frac{\alpha_{31}}{a}\right) B_{j+3}^i + \left(\alpha_{02} + \frac{\alpha_{12}}{a} + \frac{\alpha_{22}}{a^2}\right) B_{j+2}^i +$$

$$+ \left(\alpha_{01} + \frac{\alpha_{11}}{a} + \frac{\alpha_{21}}{a^2} + \frac{\alpha_{31}}{a^3}\right) B_{j+1}^i +$$

$$+ \left(\alpha_{00} + \frac{\alpha_{10}}{a} + \frac{\alpha_{20}}{a^2} + \frac{\alpha_{30}}{a^3} + \frac{\alpha_{40}}{a^4}\right) B_j^i = 0. \qquad (5)$$

Коэффициенты R_j и Q_k частного решения определяются формулами (5) и (4) с заменой $A_k^i \to Q_k$; $B_j^i \to R_j$, а в правых частях вместо нулей следует взять соответственно (3) q_k и r_k.

Из самой формы записи решения (4) следует, что первые коэффициенты в формулах (4), (5) удовлетворяют условиям

k, j	A_k^0	A_k^1	A_k^2	A_k^3	Q_k	B_j^0	B_j^1	B_j^2	B_j^3	R_j
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0

Восемь постоянных a_i, b_i определяются граничными условиями задачи или начальными условиями задачи Коши в какой-либо точке (каких-либо различных точках). Например, если в точке $x=0$; $y=0$ определены значение w и ее производные до третьей включительно, то

$$\left.\frac{\partial^{j+k} w}{\partial x^k \partial y^j}\right|_{\substack{y=0\\x=0}} = \frac{a_k}{b^j} + \frac{b_j}{a^k}; \quad \begin{matrix} j+k=0,1,2,3; \\ j,k=0,1,2,3. \end{matrix} \qquad (7)$$

Для прямоугольной пластинки со сторонами a, b имеем выражения

$$a_0 + b_0 = w_0; \quad a_1 = \varphi_x^0 - \frac{b_0}{a}; \quad b_1 = \varphi_y^0 - \frac{a_0}{b};$$

$$a_2 = \frac{\mu M_y^0 - M_x^0}{D(1-\mu^2)} - \frac{b_0}{a^2}; \quad b_2 = \frac{\mu M_x^0 - M_y^0}{D(1-\mu^2)} - \frac{a_0}{b^2};$$

$$a_3 = -\frac{Q_x^0}{D} - (2-\mu)\left[\frac{\varphi_x^0}{b^2} - \frac{w_0}{ab^2} + \frac{\mu M_x^0 - M_y^0}{aD(1-\mu^2)}\right] - \frac{b_0}{a^3};$$

$$b_3 = -\frac{Q_y^0}{D} - (2-\mu)\left[\frac{\varphi_y^0}{a^2} - \frac{w_0}{ba^2} + \frac{\mu M_y^0 - M_x^0}{bD(1-\mu^2)}\right] - \frac{a_0}{b^3}. \qquad (8)$$

После определения коэффициентов A_k^i, B_k^i, Q_k, R_k и a_k, b_k решение задачи (1) строится в виде (2). Поскольку в реальных задачах условия типа (7) определены не в одной точке, а заданы по границам (например, $x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=b$), то процедура определения постоянных a_k и b_k несколько усложнится, но при численном решении это затруднение не принципиально.

В задачах устойчивости и собственных колебания коэффициенты α_{jk} являются функциями собственных значений λ. Условия вида (7) приводят к системе однородных уравнений. Равенства нулю детерминанта решает задачу по определению этих значений.

При вынужденных моногармонических колебаниях, и нагрузке вида $q^*(t,x,y)=e^{\lambda t}q(x,y)$, подстановкой $w^*(t,x,y)=e^{\lambda t}w(x,y)$ задача сводится к прежней с известным, вообще комплексным значением λ. Расчет вектора состояния, т.е. перемещений, сил, моментов и напряжений в произвольной точке области, выполняется обычным путем на основании известных формул.

УДК 539.3

П. Д. Доценко – д-р техн. наук, О. В. Дзюбенко

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Многие несущие конструкции ЛА, которые можно классифицировать как пространственные тонкостенные конструкции (ТК), в процессе эксплуатации подвергаются интенсивному воздействию переменных нагрузок, передающихся как непосредственно, так и через газовоздушную среду. Расчеты динамических параметров таких конструкций позволяют на стадии проектирования оценить динамическую прочность, находить оптимальные варианты ТК, что способствует сокращению времени и затрат на их доводку. Построение алгоритмов и программ таких расчетов представляет трудоемкую и нетривиальную задачу.

Рассматриваются пространственные ТК, состоящие из двумерных тонкостенных конструкций, расположенных в трех взаимоперпендикулярных плоскостях и жестко соединенных между собой. Каждая двумерная ТК представляет собой анизотропную многослойную пластину, подкрепленную ребрами жесткости, имеющую участки с различной жесткостью, вырезы и включения (сконцентрированные массы, демпфирующие элементы).

Решаются задачи собственных и вынужденных колебаний пространственной ТК. Для решения задач используется метод конечных элементов (МКЭ) в классической постановке. Используется полученное из принципа виртуальной работы матричное уравнение движения.

Одним из основных моментов алгоритмизации решения задач собственных и вынужденных колебаний пространственной ТК является формирование глобальных матриц жесткости, масс и демпфирования. Построенный алгоритм имеет следующие особенности:

симметричные и ленточные глобальные матрицы, строятся в виде