ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 21 1961

И. А. Чечета

ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАКИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОВ

Плакирование (производство биметаллов) является одним из основных способов защиты металлов от коррозии. За счет плакирования резко повышается эффективность применения плакируемого металла. Ярким примером этого может быть использование в самолетостроении в качестве конструкционного материала дюралюминия, плакированного чистым алюминием.

Наряду с высокой коррозионной стойкостью плакированные металлы имеют и некоторые другие важные качества. Часто стоимость использования листа плакированного металла меньше стоимости такого же листа из материала плакирующего слоя. Кроме того, в некоторых узлах летательных аппаратов, где надо осуществлять максимальную теплопередачу и где необходимо, чтобы одна из поверхностей была более коррозиеустойчивой, применение плакированного металла дает отличные результаты. Например, сталь, плакированная нержавеющей сталью, обеспечивает лучший теплоотвод, чем отдельно нержавеющая сталь.

Плакированные металлы широко применяются в авиации, в химической, нефтяной и других отраслях машиностроения. Тем не менее целый ряд вопросов обработки давлением плакированных металлов до сих пор еще остается не выясненным.

Следует отметить, что плакированные металлы являются не только заменителями дорогостоящих или плохо противостоящих коррозии материалов, но и представляют собой самостоятельную группу машиностроительных материалов, которые имеют своеобразные свойства. Остановимся на процессе пластического изгиба.

Если при изгибе плакированного металла возникают пластические деформации, то процесс изгиба существенно отличается от процесса изгиба обычных брусьев. Пластические деформации начинают развиваться прежде всего в материале с более низким пределом текучести, в более отдаленных от нейтрального слоя волокнах. При этом происходит смещение нейтрального слоя в сторону более прочного материала [1].

На процесс пластического деформирования плакированных металлов существенное влияние оказывает температура деформирования, поскольку падение механических свойств плакирующего и плакируемого слоев при данной температуре происходит не в равной степени; так же не в равной степени изменяются физические свойства.

I. ОБЪЕМНЫЙ ЧИСТО ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ШИРОКОГО ПЛАКИРОВАННОГО БРУСА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ

За исходные положения берем уравнение равновесия элементарного объема изгибаемого бруса и уравнение пластичности.

Эксперементальные исследования показывают, что при изгибе плакированных образцов прямоугольного сечения с шириной больше трех толщин выполняется гипотеза плоских сечений. С другой стороны, при изгибе таких образцов не происходит значительное изменение формы и размеров поперечного сечения образца.

Объемное напряженное состояние характеризуется главными нормальными напряжениями в трех взаимно-перпендикулярных направлениях: тангенциальном — σ_1, радиальном — σ_3 и аксиальном σ_2 (рис. 1). Поскольку изменение ширины широкого бруса при изгибе практически равно нулю, то $\sigma_2 = 0{,}5\ (\sigma_1 + \sigma_3)$.

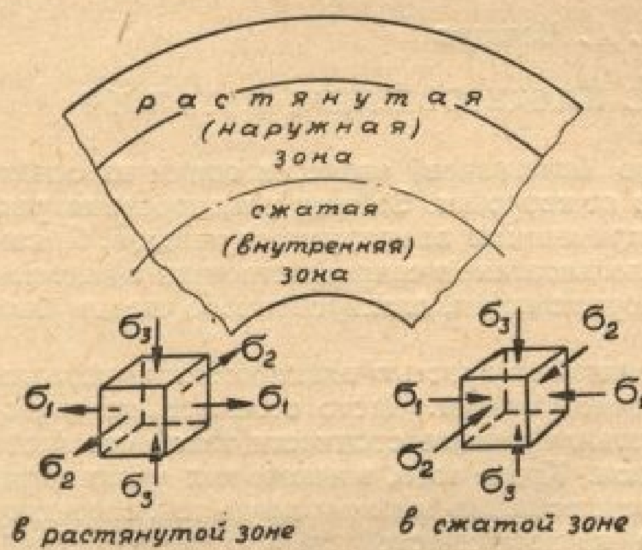

Рис. 1. Схема объемного напряженного состояния при пластическом изгибе плакированного бруса.

Уравнение пластичности для случая объемного напряженного состояния в общем виде:

$$\sigma_1 = 1{,}15\sigma_2 + \sigma_3$$

При изгибе плакированного бруса плакирующий слой может находиться как в сжатой, так и в растянутой зоне гиба, поэтому остановимся на каждом из этих двух случаев.

§ 1. Плакирующий слой в растянутой зоне гиба

Рассмотрим бесконечно малый элемент изгибаемого бруса, ограниченный по длине двумя плоскостями, проходящими через поперечные сечения бруса и повернутыми друг к другу на угол гиба $d\alpha$ (рис. 2). Как показано на рис. 2, в наружной зоне (в зоне от центра кривизны выше нейтрального слоя) тангенциальные напряжения σ_1 растягивающие, а во внутренней зоне (к центру кривизны ниже нейтрального слоя) — сжимающие. Радиальные напряжения σ_3 по всей высоте бруса сжимающие.

Уравнение пластичности для соответствующих зон примет вид: а) для наружной зоны (плакирующий слой бруса)

$$\sigma'_{1н} = 1{,}15\sigma'_s - \sigma'_{3н}; \qquad (1)$$

б) для наружной зоны (основной слой бруса)

$$\sigma_{1н} = 1{,}15\sigma_s - \sigma_{3н}; \qquad (2)$$

в) для внутренней зоны (основной слой бруса)

$$\sigma_{1в} = 1{,}15\sigma_s + \sigma_{3в}. \qquad (3)$$

Как в уравнении (1), так и дальше штрихом отмечены все одноименные величины, относящиеся к плакирующему слою.

Главные напряжения в наружной зоне. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента, шириной равного единице, расположенного в плакирующем слое (рис. 2):

$$(\sigma'_{3н} + d\sigma'_{3н})\, R_y\, d\alpha - \sigma'_{3н}\,(R_y + dR_y)\, d\alpha - 2\sigma'_{1н} d\, R_y \sin\frac{d\alpha}{2} = 0. \qquad (4)$$

При составлении уравнения положительным направлением принято направление от центра кривизны. R_y — текущий радиус. Ввиду малого значения угла $d\alpha$ принимаем $\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$. Тогда после преобразований уравнение (4) будет иметь вид:

$$d\sigma'_{3н} = \sigma\,(\sigma'_{1н} + \sigma'_{3н})\,\frac{dR_y}{R_y}. \qquad (5)$$

Подставив в уравнение (5) значение $\sigma'_{1н}$ из уравнения (1) получим

$$d\sigma'_{3н} = -1{,}15\sigma'_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{6}$$

Интегрируя уравнение (6) и определяя постоянную интегрирования из условия $\sigma'_{3н} = 0$ при $R_y = R_н$, где $R_н$ — наружный радиус гиба, находим

$$\sigma'_{3н} = -1{,}15\sigma'_s \ln \frac{R_н}{R_y}. \tag{7}$$

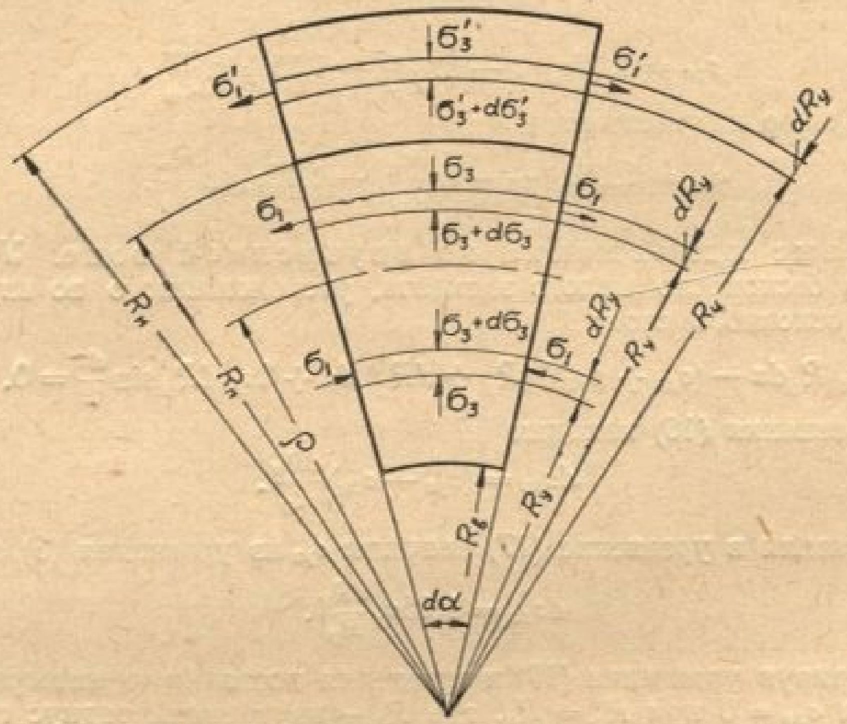

Рис. 2. Схема действия напряжений на бесконечно малый элемент изгибаемого бруса. Плакирующий слой в растянутой зоне гиба.

После подстановки в уравнение (1) абсолютного значения $\sigma'_{3н}$ из уравнения (7) [знак напряжения учтен при написании уравнения (1)], определим $\sigma'_{1н}$:

$$\sigma'_{1н} = 1{,}15\sigma'_s \left(1 - \ln \frac{R_н}{R_y}\right). \tag{8}$$

Аксиальное напряжение равно полусумме двух других главных напряжений:

$$\sigma'_{2н} = 1{,}15\sigma'_s \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R_н}{R_y}\right). \tag{9}$$

Уравнение равновесия бесконечно малого элемента, шириной равного единице, расположенного в основном слое:

$$(\sigma_{3н} + d\sigma_{3н}) R_y d\alpha - \sigma_{3н}(R_y + dR_y) d\alpha - 2\sigma_{1н} dR_y \sin\frac{d\alpha}{2} = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (10) находим

$$d\sigma_{3н} = (\sigma_{1н} + \sigma_{3н}) \frac{dR_y}{R_y}. \tag{11}$$

В уравнение (11) подставляем значение $\sigma_{1\text{н}}$ из уравнения (2):

$$d\sigma_{3\text{н}} = 1{,}15\sigma_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{12}$$

После интегрирования и определения постоянной интегрирования из условия $\sigma_{3\text{н}} = \sigma_{3\text{н}}'$ при $R_y = R_\text{п}$, где $R_\text{п}$ — радиус кривизны границы между основным и плакирующим слоями, получаем

$$\sigma_{3\text{н}} = -\left(1{,}15\sigma_s \ln\frac{R_\text{п}}{R_\text{в}} - 1{,}15\sigma_s' \ln\frac{R_\text{н}}{R_y}\right). \tag{13}$$

Подставляя абсолютное значение $\sigma_{3\text{н}}$ из уравнения (13) в уравнение (2), находим

$$\sigma_{1\text{н}} = 1{,}15\sigma_s\left(1 - \ln\frac{R_\text{п}}{R_y}\right) - 1{,}15\sigma_s' \ln\frac{R_\text{н}}{R_y}. \tag{14}$$

Аксиальное напряжение

$$\sigma_{2\text{н}} = 1{,}15\sigma_s\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{R_\text{п}}{R_y}\right) - 1{,}15\sigma_s' \,\mathrm{tn}\frac{R_\text{н}}{R_y}. \tag{15}$$

Главные напряжения во внутренней зоне. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента, расположенного во внутренней зоне гиба основного слоя:

$$\sigma_{3\text{в}} R_y d\alpha - (\sigma_{3\text{в}} + d\sigma_{3\text{в}})(R_y + dR_y)\, d\alpha + 2\sigma_{1\text{в}} dR_y \sin\frac{d\alpha}{2} = 0. \tag{16}$$

Из уравнения (16) находим

$$d\sigma_{3\text{в}} = (\sigma_{1\text{в}} - \sigma_{3\text{в}})\frac{dR_y}{R_y}. \tag{17}$$

Подставляя в уравнение (17) значение $\sigma_{1\text{в}}$ из уравнения (3), получаем

$$d\sigma_{3\text{в}} = 1{,}15\sigma_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{18}$$

Интегрируя уравнение (18) и определяя постоянную интегрирования из условия $\sigma_{3\text{в}} = 0$ при $R_y = R_\text{в}$, где $R_\text{в}$ — внутренний радиус гиба, получаем

$$\sigma_{3\text{в}} = 1{,}15\sigma_s \ln\frac{R_y}{R_\text{в}}. \tag{19}$$

Из уравнений (3) и (19) находим

$$\sigma_{1\text{в}} = 1{,}15\sigma_s\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_\text{в}}\right). \tag{20}$$

Аксиальное напряжение

$$\sigma_{2\text{в}} = 1{,}15\sigma_s\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_\text{в}}\right). \tag{21}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя напряжений определим из условия, что сумма всех сил, перпендикулярных к поперечному сечению бруса, равна нулю:

$$\sum P = \int_{R_\text{в}}^{R_\text{н}} \sigma_1 dR_y = 0. \tag{22}$$

Подставив в уравнение (22) значения σ_1 из уравнений (8), (14) и (20) и произведя интегрирование и соответствующие преобразования, найдем

$$\left(\frac{R_\text{п} R_\text{в}}{\rho^2}\right)^{\frac{\sigma_s}{\sigma_s'}} = \frac{\rho}{R_\text{н}} e^{\frac{R_\text{п}}{\rho} - 1}, \tag{23}$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Решая графически уравнение (23), можно найти величину радиуса кривизны нейтрального слоя напряжений ρ для данного соотношения толщин основного и плакирующего слоев и их пределов текучести при пластическом изгибе на заданный радиус в случае, когда плакирующий слой находится в растянутой зоне. Более просто величину ρ можно найти из условия $\sigma_{3н} = \sigma_{3в}$ при $R_y = \rho$. При этом

$$\rho = \frac{R_н}{\left(\frac{R_п}{R_в}\right)^k}, \text{ где } k = \frac{\sigma_s}{\sigma'_s}. \tag{24}$$

Если радиус кривизны нейтрального слоя напряжений равен радиусу кривизны границы между плакирующим и основным слоями и $k = 1{,}0$, то уравнения (23) и (24) получают вид:

$$\rho = \sqrt{R_н R_в}.$$

Такое уравнение характерно для случая пластического изгиба обычного бруса с прямоугольным поперечным сечением [2].

Изгибающий момент определяем из условия равенства моментов внутренних и внешних сил. Моменты берем относительно центра кривизны.

$$M = b\int_{R_в}^{R_н} \sigma_1 R_y dR_y. \tag{25}$$

Подставив в уравнение (25) значения σ_1 из уравнений (8), (14) и (20) и произведя интегрирование и преобразования с учетом уравнения (23) найдем:

$$M = \frac{1{,}15b\sigma'_s}{4}\left[k\left(R_п^2 + R_в^2\right) + R_н^2 - 2R_п^2 + 2\rho R_п - (2k+1)\rho^2\right]. \tag{26}$$

Выражая радиусы, фигурирующие в уравнении (26), через относительные величины (то есть разделив каждый из радиусов на толщину изгибаемого бруса), приходим к уравнению:

$$M = \frac{1{,}15bh^2\sigma'_s}{4} m, \tag{27}$$

где $m = k\left(r_п^2 + r_в^2\right) + r_н^2 - 2r_п^2 + 2\rho_0 r_п - (2k+1)\rho_0^2$;

$r_н$, $r_п$, $r_в$, ρ_0 — относительные радиусы.

В случае, когда радиус кривизны нейтрального слоя напряжений равен радиусу кривизны границы между плакирующим и основным слоями и при $k = 1{,}0$, уравнение (27) принимает вид: $M = 1{,}15\frac{bh^2}{4}\sigma'_s$, что имеет место при пластическом изгибе без упрочнения обычного бруса [2].

§ 2. Плакирующий слой в сжатой зоне гиба

Как видно из рис. 3, система нагружения бесконечно малого элемента изгибаемого бруса остается той же, что и в случае, когда плакирующий слой находится в растянутой зоне гиба.

Уравнение пластичности для соответствующих зон примет вид:

а) для наружной зоны (основной слой бруса)

$$\sigma_{1н} = 1{,}15\sigma_s - \sigma_{3н}; \tag{28}$$

б) для внутренней зоны (основной слой бруса)

$$\sigma_{1в} = 1{,}15\sigma_s + \sigma_{3в}; \tag{29}$$

в) для внутренней зоны (плакирующий слой бруса)

$$\sigma'_{1в} = 1{,}15\sigma'_s + \sigma'_{3в}. \tag{30}$$

Главные напряжения в наружной зоне. Уравнения равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в наружной зоне, аналогично уравнению (4) и после соответствующих преобразований имеет вид:

$$d\sigma_{3н} = 1{,}15\sigma_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{31}$$

Интегрируем уравнение (31) и находим постоянную интегрирования из условия $\sigma_{3н} = 0$ при $R_y = R_н$. Тогда

$$\sigma_{3н} = -1{,}15\sigma_s \ln \frac{R_н}{R_y}. \tag{32}$$

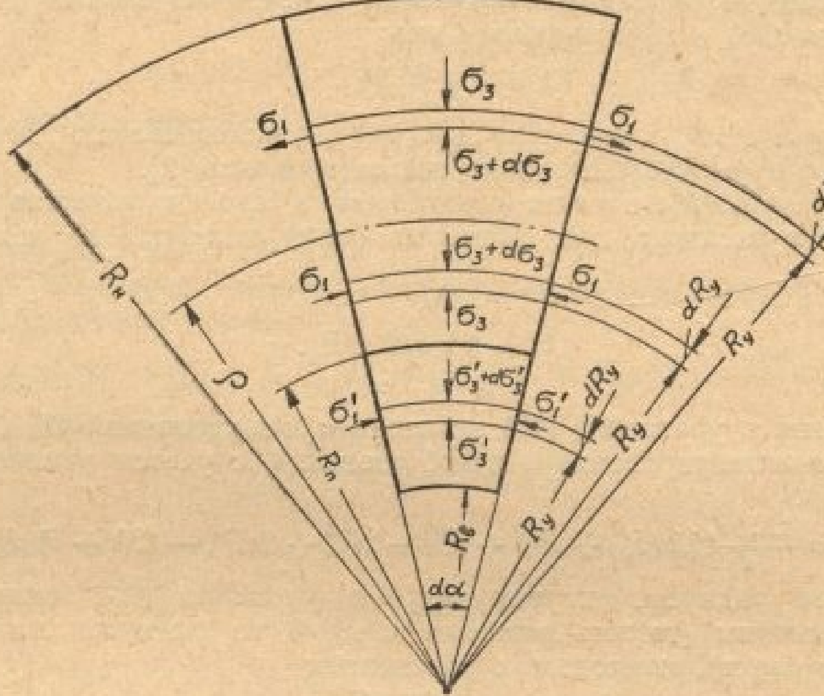

Рис. 3. Схема действия напряжений на бесконечно малый элемент изгибаемого бруса. Плакирующий слой в сжатой зоне гиба.

По методике, аналогичной для случая получения уравнений (8) и (9), находим:

$$\sigma_{1н} = 1{,}15\sigma_s \left(1 - \ln \frac{R_н}{R_y}\right); \tag{33}$$

$$\sigma_{2н} = 1{,}15\sigma_s \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R_н}{R_y}\right). \tag{34}$$

Главные напряжения во внутренней зоне. Из уравнения равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в плакирующем слое, которое аналогично уравнению (16), находим

$$d\sigma'_{3в} = 1{,}15\sigma'_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{35}$$

Интегрируя уравнение (35) и определяя постоянную интегрирования из условия $\sigma'_{в3} = 0$ при $R_y = R_в$, имеем:

$$\sigma'_{3в} = 1{,}15\sigma'_s \ln \frac{R_y}{R_в}. \tag{36}$$

Уравнение равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в основном слое сжатой зоны, тоже аналогично уравнению (16). Таким образом,

$$d\sigma_{3в} = 1{,}15\sigma_s \frac{dR_y}{R_y}. \tag{37}$$

После интегрирования уравнения (37) и определения постоянной интегрирования из условия $\sigma_{3в} = \sigma'_{3в}$ при $R_y = R_n$ получаем

$$\sigma_{3в} = 1,15\sigma_s \ln\frac{R_y}{R_n} + 1,15\sigma'_s \ln\frac{R_y}{R_в}. \qquad (38)$$

В плакирующем слое тангенциальное напряжение

$$\sigma'_{1в} = 1,15\sigma'_s\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_в}\right); \qquad (39)$$

аксиальное напряжение

$$\sigma'_{2в} = 1,15\sigma'_s\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_в}\right). \qquad (40)$$

В основном слое тангенциальное напряжение

$$\sigma_{1в} = 1,15\sigma_s\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_n}\right) + 1,15\sigma'_s \ln\frac{R_y}{R_в}; \qquad (41)$$

аксиальное напряжение

$$\sigma_{2в} = 1,15\sigma_s\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_n}\right) + 1,15\sigma'_s \ln\frac{R_y}{R_в}. \qquad (42)$$

Радиус кривизны нейтрального слоя напряжений определяем, подставляя в уравнение (22) значения σ_1 из уравнений (33), (39) и (41) и производя интегрирование и соответствующие преобразования. Тогда

$$\left(\frac{R_н R_n}{\rho^2}\right)^k = \frac{\rho}{R_в} e^{\frac{R_n}{\rho} - 1}. \qquad (43)$$

Решая графически уравнение (43), можно определить величину радиуса кривизны нейтрального слоя напряжений ρ для данного соотношения толщин основного и плакирующего слоев и данного соотношения их пределов текучести при пластическом изгибе на заданный радиус в случае, когда плакирующий слой находится в сжатой зоне. Проще величину ρ можно найти из условия $\sigma_{3н} = \sigma_{3в}$ при $R_y = \rho$. При этом

$$\rho = \frac{R_в}{\left(\frac{R_n}{R_н}\right)^k}. \qquad (44)$$

Если величина ρ равна радиусу кривизны границы между плакирующим и основным слоями и $k = 1,0$, то уравнения (43) и (44) тоже получают вид $\rho = \sqrt{R_н R_в}$.

Изгибающий момент определяем, подставляя в уравнение (25) значения σ_1 из уравнений (33), (39), (41) и производя интегрирование и соответствующие преобразования с учетом уравнения (43). Тогда

$$M = \frac{1,15b\sigma'_s}{4}\left[k\left(R_н^2 + R_n^2\right) + R_в^2 - 2R_n^2 + 2R_n\rho - (2k+1)\rho^2\right]. \qquad (45)$$

Заменяя радиусы, фигурирующие в уравнении (45), относительными радиусами, получаем

$$M = \frac{1,15bh^2\sigma'_s}{4} m, \qquad (46)$$

где $m = k\left(r_н^2 + r_n^2\right) + r_в^2 - 2r_n^2 + 2r_n\rho_0 - (2k+1)\rho_0^2$.

Сравнивая между собой уравнения (26) и (45), приходим к выводу, что в зависимости от того, находится плакирующий слой в сжатой или растянутой зоне, математическое выражение изгибающего момента различно. Разность изгибающих моментов, определяемых уравнениями (26) и (45), составляет:

$$M_{(26)} - M_{(45)} = 1,15b\left(\sigma'_s - \sigma_s\right)\frac{R_н^2 - R_в^2}{4}. \qquad (47)$$

Анализируя уравнение (47), приходим к выводу, что на величину изгибающего момента существенно влияет вариант гиба (в сжатой или растянутой зоне его находится плакирующий слой), соотношение механических свойств и что различия в изгибающих моментах, определяемых уравнениями (26) и (45), не будет, если пределы текучести плакирующего и плакируемого слоев будут равны (то есть в случае гиба обычного, неплакированного бруса).

Распределение главных напряжений по высоте изгибаемого бруса показано на диаграммах (рис. 4), построенных в со-

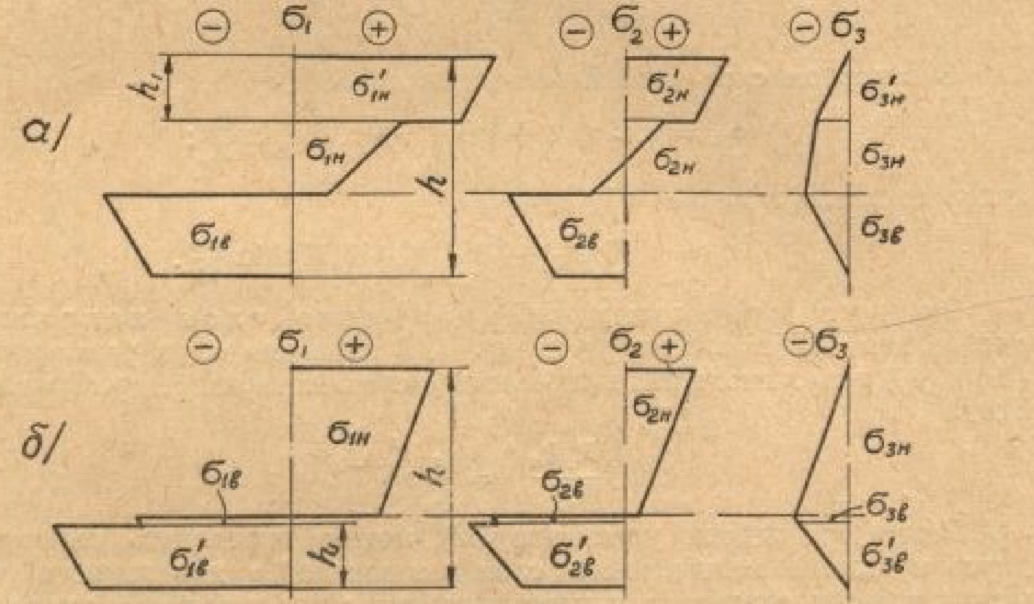

Рис. 4. Распределение главных напряжений по высоте изгибаемого бруса при объемном чисто пластическом изгибе без упрочнения; *а* — плакирующий слой в растянутой зоне гиба; *б* — плакирующий слой в сжатой зоне гиба; $r_в = 1{,}0$.

ответствии с приведенными выше уравнениями тангенциальных, аксиальных и радиальных напряжений. Из этих диаграмм видно, что тангенциальные напряжения в крайних слоях равны пределу текучести, а к середине бруса изменяются по криволинейной зависимости: в наружной зоне уменьшаются, а во внутренней — увеличиваются. Такой характер распределения напряжений объясняется исходным уравнением пластичности.

Рис. 5. Схематическое изображение диаграмм «напряжение-деформация» плакирующего *1* и плакируемого *2* металлов.

В зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне гиба находится плакирующий слой, при прочих равных условиях, схема распределения главных напряжений резко меняется.

Выше отмечалось, что положение нейтрального слоя напряжений зависит от соотношения толщин основного и плакирующего слоев, от соотношения их пределов текучести и положения плакирующего слоя при гибке. Если перечисленные условия складываются так, что нейтральный слой напряжений совпадает с границей между основным и плакирующим слоями, то в процессе пластического изгиба возможно расслоение плакированного бруса по границе спая. Такое расслоение объясняется тем, что радиальные напряжения у нейтрального слоя достигают величины, при которой хотя бы один из материалов плакированного бруса может течь в тангенциальном и аксиальном направлениях, а прочность соединения по спаю не достаточна, чтобы препятствовать этому течению.

II. ОБЪЕМНЫЙ ЧИСТО ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ШИРОКОГО ПЛАКИРОВАННОГО БРУСА С УПРОЧНЕНИЕМ

При анализе упруго-пластического изгиба плакированных металлов в общем следует различать несколько этапов:

а) пластические деформации возникают в наиболее отдаленных от нейтрального слоя волокнах материала с более низким пределом текучести;

б) пластические деформации возникают как в области сжатых, так и в области растянутых волокон;

в) возникновение скачка напряжений: если на поверхности контакта плакирующего и плакируемого металлов имеет место определенная деформация, то из диаграмм «напряжение — деформация» следует, что одной и той же деформации могут соответствовать разные напряжения (рис. 5).

При анализе напряженно-деформированного состояния за исходные берем уравнения пластичности и равновесия бесконечно малого элемента изгибаемого бруса и предполагаем, что диаграмма «напряжение-деформация» описывается законом

$$\sigma = Ae^n, \tag{48}$$

где A и n — коэффициенты, характеризующие механические свойства и степень упрочнения рассматриваемого металла;

$e = \frac{y}{\rho_g}$ — относительная деформация;

y — расстояние от нейтрального слоя деформаций до рассматриваемого волокна бруса;

ρ_g — радиус кривизны нейтрального слоя деформаций.

Постоянные A и n находим из условия, что определяемая уравнением (48) кривая проходит через заданные диаграммой «напряжение-деформация» точки с координатами (σ_s; e_s) и (σ_p; e_p), где e_s — деформация, соответствующая пределу текучести σ_s; e_p — деформация, соответствующая равномерному напряжению σ_p. Таким образом, для определения величин A и n имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= Ae_p^n \\ \sigma_p &= Ae_p^n \end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

в результате совместного решения которых находим:

$$n = \frac{\ln \sigma_s - \ln \sigma_p}{\ln e_s - \ln e_p}; \quad A = \frac{\sigma_s}{e_s^n}. \tag{50}$$

В дальнейшем величины A и n, относящиеся к плакирующему слою, будем отмечать индексом «1», а относящиеся к плакируемому слою — индексом «2».

Рассмотрим случаи, когда плакирующий слой находится в сжатой и в растянутой зонах гиба.

§ 1. Плакирующий слой в растянутой зоне гиба

Уравнение пластичности для наружной зоны (плакирующий слой бруса):

$$\sigma'_{1н} = 1,15A_1\left(\frac{y}{\rho_g}\right)^{n_1} - \sigma'_{3н}; \tag{51}$$

для наружной зоны (плакируемый слой бруса):

$$\sigma_{1н} = 1,15A_2\left(\frac{y}{\rho_g}\right)^{n_2} - \sigma_{3н}; \tag{52}$$

для внутренней зоны (плакируемый слой):

$$\sigma_{1в} = 1,15A_2\left(\frac{y}{\rho_g}\right)^{n_2} + \sigma_{3в}. \tag{53}$$

Главные напряжения в наружной зоне. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в плакирующем слое, выразится также уравнением (4).

После преобразований уравнения (4) с учетом уравнения (51) и в предположении, что $\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ ввиду малости угла $d\alpha$, имеем

$$d\sigma'_{3н} = 1,15A_1\left(\frac{R_y - \rho}{\rho_g}\right)^{n_1}\frac{dR_y}{R_y}, \tag{54}$$

где $R_y - \rho = y$;

ρ — радиус кривизны нейтрального слоя напряжений;

R_y — текущий радиус.

Если величину $(R_y - \rho)^{n_1}$ записать по формуле Ньютона и ограничиться первыми двумя членами, то после интегрирования и определения постоянной интегрирования из условия $\sigma'_{3н} = 0$ при $R_y = R_н$ получим

$$\sigma'_{3н} = -\frac{1,15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\frac{R_н^{n_1} - R_y^{n_1}}{n_1} - \frac{n_1\rho}{n_1 - 1}\left(R_н^{n_1-1} - R_y^{n_1-1}\right)\right]. \tag{55}$$

Подставив в уравнение (51) абсолютное значение $\sigma'_{3н}$ [знак напряжения учтен при написании уравнения (51)], находим

$$\sigma'_{1н} = \frac{1,15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\frac{(n_1+1)R_y^{n_1} - R_н^{n_1}}{n_1} + \frac{n_1\rho}{n_1 - 1}\left(R_н^{n_1-1} - n_1R_y^{n_1-1}\right)\right]. \tag{56}$$

Аксиальное напряжение равно:

$$\sigma'_{2н} = \frac{1,15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\frac{(0,5n_1+1)R_y^{n_1} - R_н^{n_1}}{n_1} + \frac{n_1\rho}{n_1 - 1}\left(R_н^{n_1-1} - \frac{n_1+1}{2}R_y^{n_1-1}\right)\right]. \tag{57}$$

Уравнение равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в плакируемом слое растянутой зоны, выражается уравнением (10) и после соответствующих преобразований имеет вид:

$$d\sigma_{3н} = 1,15A_2\left(\frac{R_y - \rho}{\rho_g}\right)^{n_2}\frac{dR_y}{R_y}. \tag{58}$$

После интегрирования уравнения (58) и определения постоянной интегрирования из условия $\sigma'_{3н} = \sigma_{3н}$ при $R_y = R_л$ получаем

$$\sigma_{3н} = -\frac{1,15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{R_л^{n_2} - R_y^{n_2}}{n_2} - \frac{n_2\rho}{n_2 - 1}\left(R_л^{n_2-1} - R_y^{n_2-1}\right)\right] -$$

$$- \frac{1,15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\frac{R_н^{n_1} - R_y^{n_1}}{n_1} - \frac{n_1\rho}{n_1 - 1}\left(R_н^{n_1-1} - R_y^{n_1-1}\right)\right]. \tag{59}$$

Соответственно тангенциальное напряжение

$$\sigma_{1н} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{(n_2+1)\,R_y^{n_2} - R_п^{n_2}}{n_2} + \frac{n_2\rho}{n_2-1}\left(R_п^{n_2-1} - n_2R_y^{n_2-1}\right)\right] -$$

$$- \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\frac{R_н^{n_1} - R_y^{n_1}}{n_1} - \frac{n_1\rho}{n_1-1}\left(R_н^{n_1-1} - R_y^{n_1-1}\right)\right], \tag{60}$$

аксиальное напряжение

$$\sigma_{2н} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{(0{,}5n_2+1)\,R_y^{n_2} - R_п^{n_2}}{n_2} + \frac{n_2\rho}{n_2-1}\left(R_п^{n_2-1} - \frac{n_2+1}{2}R_y^{n_2-1}\right)\right] -$$

$$- \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{R_н^{n_1} - R_y^{n_1}}{n_1} - \frac{n_1\rho}{n_1-1}\left(R_н^{n_1-1} - R_y^{n_1-1}\right)\right]. \tag{61}$$

Главные напряжения во внутренней зоне. Уравнение бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в плакируемом слое внутренней зоны гиба, выражается тоже уравнением (16), а после преобразования с учетом уравнения (53) имеем:

$$d\sigma_{3в} = \frac{1{,}15A^2}{\rho_g^{n_2}}\left(\frac{\rho^{n_2}}{R_y} - n_2\rho^{n_2-1}\right)dR_y. \tag{62}$$

Интегрируем уравнение (62) и определяем постоянную интегрирования из условия $\sigma_{3в} = 0$ при $R_y = R_в$. Тогда

$$\sigma_{3в} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\ln\frac{R_y}{R_в} - n_2\rho^{n_2-1}\left(R_y - R_в\right)\right]. \tag{63}$$

Подставляя значение $\sigma_{3в}$ из уравнения (63) в уравнение (53), находим

$$\sigma_{1в} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_в}\right) - n_2\rho^{n_2-1}\left(2R_y - R_в\right)\right]. \tag{64}$$

Аксиальное напряжение во внутренней зоне гиба

$$\sigma_{2в} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_в}\right) - n_2\rho^{n_2-1}\left(1{,}5R_y - R_в\right)\right]. \tag{65}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя напряжений находим из условия, что на нейтральном слое напряжений $\sigma_{3н} = \sigma_{3в}$ при $R_y = \rho$. В связи с этим из совместного решения уравнений (59) и (63) относительно ρ и после соответствующих преобразований с условием, что $\rho = \rho_g$ [2], имеем:

$$\rho = R_в e^{a_1 + a_2}, \tag{66}$$

где e — основание натуральных логарифмов;

$$a_1 = \frac{A_1}{A_2}\left[\frac{R_н^{n_1}}{n_1\rho^{n_1}} - \frac{n_1R_н^{n_1-1}}{(n_1-1)\,\rho^{n_1-1}} + \frac{n_1^2 - n_1 + 1}{n_1\,(n_1-1)}\right];$$

$$a_2 = \frac{1}{n_2}\left(\frac{R_п}{\rho}\right)^{n_2} - \frac{n_2}{n_2-1}\left(\frac{R_п}{\rho}\right)^{n_2-1} - n_2\frac{R_в}{\rho} + \frac{n_2}{n_2-1} - \frac{n_2^2-1}{n_2}.$$

Поскольку в уравнение (66) входят отношения радиусов, то абсолютные радиусы можно заменить относительными, то есть отношениями радиусов к толщине изгибаемого бруса. Тогда

$$\rho_0 = r_в e^{a_1 + a_2}, \tag{67}$$

где

$$a_1 = \frac{A_1}{A_2}\left[\frac{1}{n_1}\left(\frac{r_н}{\rho_0}\right)^{n_1} - \frac{n_1}{n_1-1}\left(\frac{r_н}{\rho_0}\right)^{n_1-1} + \frac{n_1^2 - n_1 + 1}{n_1\,(n_1-1)}\right];$$

$$a_2 = \frac{1}{n_2}\left(\frac{r_п}{\rho_0}\right)^{n_2} - \frac{n_2}{n_2-1}\left(\frac{r_п}{\rho_0}\right)^{n_2-1} - n_2\frac{r_в}{\rho_0} + \frac{n_2}{n_2-1} - \frac{n_2^2-1}{n_2}.$$

Анализируя уравнение (66), приходим к выводу, что величина ρ зависит от соотношения механических свойств плакирующего и плакируемого слоев, от соотношения толщин этих слоев и от радиуса гиба.

Уравнение (67) громоздко и не очень удобно для использования его при практических расчетах. Поэтому сравним между собой результаты вычислений (табл. 1), полученные по уравнениям (24а) и (67) для одного и того же бруса ($h_1 = 0{,}3h$; $\frac{A_2}{A_1} = 0{,}7$; $\frac{\sigma_s}{\sigma_s'} = 0{,}7$; $n_1 = 0{,}116$; $n_2 = 0{,}15$; материал ст. 3 + 1Х18Н9Т).

Уравнение (24а) получим, заменив в уравнении (24) относительными радиусами абсолютные величины радиусов:

$$\rho_0 = \frac{r_{\text{н}}}{\left(\frac{r_n}{r_{\text{в}}}\right)^k}. \tag{24а}$$

В результате сравнения приходим к выводу, что, пользуясь уравнением (24а) вместо уравнения (67), будем допускать значительную ошибку только на сравнительно малых относительных радиусах гиба.

Таблица 1

$r_{\text{в}}$	1,00	2,00	3,00	4,00
ρ_0 (по уравнению 67) . . .	1,57	2,63	3,49	4,50
ρ_0 (по уравнению 24а) . . .	1,38	2,44	3,45	4,46

Данные таблицы 1 и уравнение (24а) дают более наглядное представление о том, что нейтральный слой при пластическом изгибе плакированного бруса смещается в сторону более прочного металла и в то же время смещается в сторону центра кривизны по мере уменьшения радиуса гиба. Эти выводы подтверждаются экспериментальными данными [1].

Изгибающий момент находим, подставляя в уравнение (25) значения σ_1 из уравнений (56), (60), (64) и произведя интегрирование и соответствующие преобразования. Тогда

$$\begin{aligned} M = {} & \frac{1{,}15A_1 b}{\rho_g^{n_1}} \left\{ \frac{n_2 R_{\text{н}}^{n_1 - 1}}{2(n_1 - 1)} \rho^3 + \left[\frac{R_{\text{н}}^{n_1}}{2} + \rho^{n_1} \cdot \frac{n_1^3 + n_1^2 + 1}{(n_1 + 2)(n_1^2 - 1)} \right] \frac{\rho^2}{n_1} + \right. \\ & \left. + \frac{n_1 \rho}{2(n_1 + 1)} \left(2R_n^{n_1 + 1} - R_{\text{н}}^{n_1 + 1}\right) + \frac{R_{\text{н}}^{n_1 + 2} - 2R_n^{n_1 + 2}}{2(n_1 + 2)} \right\} + \frac{1{,}15A_2 b}{\rho_g^{n_2}} \left\{ \frac{R_n^{n_2 + 2}}{2(n_2 + 2)} - \right. \\ & - \frac{n_2 R_n^{n_2 + 1} \rho}{2(n_2 + 2)} + \frac{R_n^{n_2} \rho_2}{2n_2} - \frac{n_2 R_n^{n_2 - 1} \rho^3}{2(n_2 - 1)} + \left[\frac{2n_2^5 + 7n_2^4 + n_2^3 - 7n_2^2 + 3n_2 - 3}{3(n_2^4 + 2n_2^3 - n_2^2 - 2n_2)} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 + 2\ln\frac{\rho}{R_{\text{в}}}}{4} \right] \rho^{n_2 + 2} + \frac{n_2 R_{\text{в}} \rho^{n_2 + 1}}{2} + \frac{R_{\text{в}}^2 \rho^{n_2}}{4} - n_2 R_{\text{в}}^3 \rho^{n_2 - 1} \right\}. \end{aligned} \tag{68}$$

§ 2. Плакирующий слой в сжатой зоне гиба

Уравнение пластичности для наружной зоны (плакируемый слой):

$$\sigma_{1\text{н}} = 1{,}15A_2 \left(\frac{R_y - \rho}{\rho_g}\right)^{n_2} - \sigma_{3\text{н}}; \tag{69}$$

для внутренней зоны (плакируемый слой):

$$\sigma_{1\text{в}} = 1{,}15A_2 \left(\frac{\rho - R_y}{\rho_g}\right)^{n_2} + \sigma_{3\text{в}}; \tag{70}$$

для внутренней зоны (плакирующий слой):

$$\sigma'_{1\text{в}} = 1{,}15A_1\left(\frac{\rho - R_y}{\rho_g}\right)^{n_1} + \sigma'_{3\text{в}}. \qquad (71)$$

Главные напряжения в наружной зоне. Схема действия напряжений на бесконечно малый элемент изгибаемого бруса представлена на рис. 3. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины, расположенного в плакируемом слое, аналогично уравнению (4), а после преобразований, аналогичных предпринятым при выводе уравнения (55), имеем:

$$\sigma_{3\text{н}} = -\frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{R_\text{н}^{n_2} - R_y^{n_2}}{n_2} - \frac{n_2\rho}{n_2 - 1}\left(R_\text{н}^{n_2-1} - R_y^{n_2-1}\right)\right]. \qquad (72)$$

Аналогично получению уравнения (56) находим

$$\sigma_{1\text{н}} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{(n_2+1)R_y^{n_2} - R_\text{н}^{n_2}}{n_2} + \frac{n_2\rho}{n_2 - 1}\left(R_\text{н}^{n_2-1} - n_2R_y^{n_2-1}\right)\right]. \qquad (73)$$

В свою очередь

$$\sigma_{2\text{н}} = \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\frac{(0{,}5n_2+1)R_y^{n_2} - R_\text{н}^{n_2}}{n_2} + \frac{n_2\rho}{n_2 - 1}\left(R_\text{н}^{n_2-1} - \frac{n_2+1}{2}R_y^{n_2-1}\right)\right]. \qquad (74)$$

Главные напряжения во внутренней зоне. Уравнение равновесия бесконечно малого элемента единичной ширины составляется аналогично уравнению (16). Затем по аналогии с получением уравнений (63), (64) и (65) находим:

$$\sigma'_{3\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\ln\frac{R_y}{R_\text{в}} - n_1\rho^{n_1-1}(R_y - R_\text{в})\right]; \qquad (75)$$

$$\sigma'_{1\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_\text{в}}\right) - n_1\rho^{n_1-1}(2R_y - R_\text{в})\right]; \qquad (76)$$

$$\sigma'_{2\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_\text{в}}\right) - n_1\rho^{n_1-1}(1{,}5R_y - R_\text{в})\right]. \qquad (77)$$

И соответственно:

$$\sigma_{3\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\ln\frac{R_y}{R_\text{в}} - n_1\rho^{n_1-1}(R_y - R_\text{в})\right] + \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\ln\frac{R_y}{R_n} + n_2\rho^{n_2-1}(R_n - R_y)\right]; \qquad (78)$$

$$\sigma_{1\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\ln\frac{R_y}{R_\text{в}} - n_1\rho^{n_1-1}(R_y - R_\text{в})\right] + \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\left(1 + \ln\frac{R_y}{R_n}\right) + n_2\rho^{n_2-1}(R_n - 2R_y)\right]; \qquad (79)$$

$$\sigma_{2\text{в}} = \frac{1{,}15A_1}{\rho_g^{n_1}}\left[\rho^{n_1}\ln\frac{R_y}{R_\text{в}} - n_1\rho^{n_1-1}(R_y - R_\text{в})\right] + \frac{1{,}15A_2}{\rho_g^{n_2}}\left[\rho^{n_2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{R_y}{R_n}\right) + n_2\rho^{n_2-1}(R_n - 1{,}5R_y)\right]. \qquad (80)$$

Радиус кривизны нейтрального слоя напряжений находим из условия $\sigma_{3\text{в}} = \sigma_{3\text{н}}$ при $R_y = \rho$. Таким образом, из уравнений (72) и (78) после необходимых преобразований и при условии, что $\rho = \rho_g$, имеем:

$$\rho = R_\text{в}e^{a_1 + a_2}. \qquad (81)$$

где $a_3 = n_1\left(1 - \frac{R_в}{\rho}\right)$;

e — основание натуральных логарифмов;

$$a_4 = \frac{A_2}{A_1}\left[\frac{1}{n_2}\left(\frac{R_н}{\rho}\right)^{n_2} - \frac{n_2}{n_2-1}\left(\frac{R_н}{\rho}\right)^{n_2-1} - n_2\frac{R_п}{\rho} + \ln\frac{R_п}{\rho} + \frac{n_2^3 - n_2^2 + 1}{n_2(n_2-1)}\right].$$

Заменяя абсолютные радиусы относительными, получаем

$$\rho_0 = r_в e^{a_3 + a_4}, \tag{82}$$

где $a_3 = n_1\left(1 - \frac{r_в}{\rho_0}\right)$;

$$a_3 = \frac{A_2}{A_1}\left[\frac{1}{n_2}\left(\frac{r_н}{\rho_0}\right)^{n_2} - \frac{n_2}{n_2-1}\left(\frac{r_н}{\rho_0}\right)^{n_2-1} - n_2\frac{r_п}{\rho_0} + \ln\frac{r_п}{\rho_0} + \frac{n_2^3 - n_2^2 + 1}{n_2(n_2-1)}\right].$$

Аналогично тому, как были сопоставлены результаты подсчетов по уравнениям (67) и (24а), сопоставим результаты подсчетов по уравнениям (82) и (44а). Уравнение (44а) тоже получаем, заменив абсолютные значения радиусов в уравнении (44) относительными их значениями:

$$\rho_0 = \frac{r_в}{\left(\frac{r_п}{r_н}\right)^k}. \tag{44а}$$

Оказывается, что при $r_в = 1{,}0$ результат, подсчитанный по уравнению (82), превышает результат, подсчитанный по уравнению (44а), на 5%, а по мере увеличения $r_в$ это превышение быстро падает. Таким образом, с известной погрешностью можно пользоваться уравнением (44а) вместо уравнения (82).

Вопрос определения радиусов кривизны нейтрального слоя напряжений при гибке плакированной полосовой заготовки рассматривался Шевелкиным Б. Н. [1], который предложил для этой цели следующие уравнения:

для случая, когда плакирующий слой заготовки находится в растянутой зоне гиба,

$$\rho = R_в + mh + \frac{h}{2} - x; \tag{а}$$

для случая, когда плакирующий слой заготовки находится в сжатой зоне гиба,

$$\rho = R_в + mh - \frac{h}{2} + x. \tag{б}$$

В этих уравнениях

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(h_3 - h_1^3) + hh_1(h - h_1) + \frac{1}{3}h_1^3 c(1 + 3c - c^2) - hh_1c(h_1c + h - 2h_1)}{h + h_1(c-1)}};$$

x — расстояние от внешней поверхности плакирующего материала до нейтрального слоя;

h_1 — толщина плакирующего слоя;

h — толщина заготовки;

c — отношение предела прочности плакирующего слоя к пределу прочности плакируемого слоя заготовки;

m — коэффициент, учитывающий отношение радиуса гибки к толщине заготовки и утонение металла в зоне гибки.

Сопоставление результатов расчета по указанным двум уравнениям с результатами, полученным по уравнениями (24а) и (44а) соответственно, дано в табл. 2.

Расчет произведен для плакированного материала сталь СХЛ-4 + + 1Х18Н9Т, имеющего $h = 6$ *мм*; $h_1 = 1$ *мм*; $c = \frac{\sigma'_в}{\sigma_в} = 1{,}63$; $k = \frac{\sigma_s}{\sigma'_s} = 0{,}59$.

Таблица 2

$r_в$	1,00	2,00	3,00	4,00
а) плакирующий слой в растянутой зоне гиба				
ρ_0 (по Шевелкину) . . .	1,45	2,51	3,52	4,53
ρ_0 (по уравнению 24а) .	1,41	2,45	3,48	4,46
б) плакирующий слой в сжатой зоне гиба				
ρ_0 (по Шевелкину) . . .	1,367	2,40	3,42	4,42
ρ_0 (по уравнению 44а) .	1,375	2,42	3,46	4,44

Как видно из табл. 2, различие между соответствующими друг другу результатами не превышает 2,5%. К этому надо добавить, что уравнения (24а) и (44а) намного проще уравнений (а) и (б).

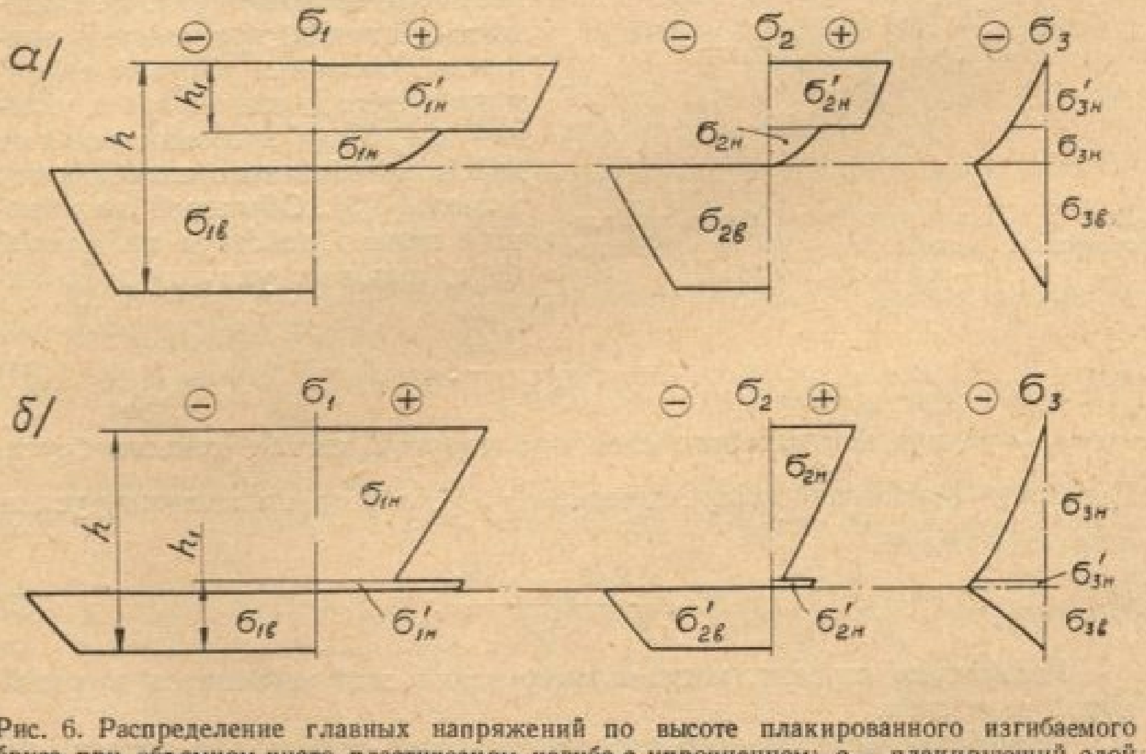

Рис. 6. Распределение главных напряжений по высоте плакированного изгибаемого бруса при объемном чисто пластическом изгибе с упрочнением; *а* — плакирующий слой в растянутой зоне гиба; *б* — плакирующий слой в сжатой зоне гиба; $r_в = 1{,}0$

Распределение главных напряжений по высоте бруса показано на диаграммах (рис. 6), построенных по уравнениям (55) — (57), (59) — (61), (63) — (65), (72) — (80). Из приведенных диаграмм видно, что распределение главных напряжений по высоте бруса при объемном чисто пластическом изгибе с упрочнением в основном аналогично распределению главных напряжений при объемном чисто пластическом изгибе без упрочнения.

Изгибающий момент находим, подставляя в уравнение (25) значения σ_1 из уравнений (73), (76), (79) и производя интегрирование и необходимые преобразования. Тогда

$$M = \frac{1{,}15\,A_2 b}{\rho_g^{n_2}}\left\{\frac{4n_2^4 + 4n_2^3 - 11n_2^2 + 3n_2 - 3}{n_2^3 + n_2^2 - n_2}\,\rho^{n_2+2} - \frac{n_2}{2} R_п \rho^{n_2+1} +\right.$$

$$+ \frac{R_п}{2}\rho^{n_2} - \frac{n_2}{6} R_п^3 \rho^{n_2-1} - \frac{R_п^2}{4} + \left[\frac{1}{2\,(n_2+2)} + \frac{n_2\rho}{2\,(n_2-1)}\right] R_н^{n_2+2} - \frac{n_2\rho}{2\,(n_2-1)} R_н^{n_2+1} +$$

$$\left. + \left[\frac{R_н^{n_2}}{n_2} - \left(\ln\frac{\rho}{R_п} - \frac{1}{2}\right)\right]\frac{\rho^2}{2} - \frac{n_2\rho^3}{2\,(n_2-1)} R_н^{n_2-1}\right\} - \frac{1{,}15\,A_1 b}{\rho_g^{n_1}}\left[\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\rho}{R_в} - \frac{3+4n_1}{12}\right)\rho^{n_1+2} +\right.$$

$$+ \frac{n_1 R_в}{2}\rho^{n_1+1} + \left(\frac{3R_п^2}{4} - \frac{R_п^2}{2}\ln\frac{R_п}{R_в} - \frac{R_в^2}{2}\right)\rho^{n_1} + \left(\frac{R_в^3}{3} - R_п^3\right) n_1 \rho^{n_1-1} + \frac{R_в^2}{4} +$$

$$\left. + \frac{R_п^2}{2}\left(\ln\frac{R_п}{R_в} - \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{83}$$

§ 3. Пружинение изогнутого бруса

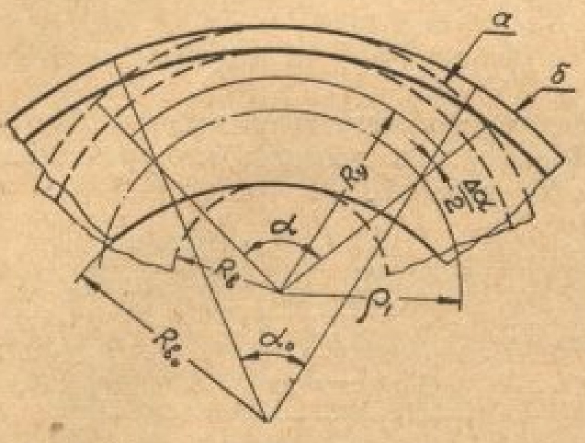

Рис. 7. Схема пружинения бруса при пластическом изгибе: *а* — до пружинения; *б* — после пружинения.

Пластический изгиб бруса сопровождается упругими деформациями, в результате чего имеет место пружинение (рис. 7). Обычно за величину пружинения принимают величину упругой деформации бруса, выраженной в угловом изменении и возникающей от действия обратного изгибающего момента [3]. Обратный изгибающий момент, действуя на кривой брус, вызывает упругие деформации

$$e = \frac{(R_y - \rho_1)\,\Delta\alpha}{R_y\alpha}, \tag{84}$$

где ρ_1 — радиус нейтрального слоя при упругом изгибе кривого бруса.

Подставив в уравнение (84) значение $e = \frac{\sigma}{E}$, определим величину условного напряжения

$$\sigma = \frac{E\,(R_y - \rho_1)\,\Delta\alpha}{R_y\alpha}. \tag{85}$$

Рассмотрим вариант, когда плакирующий слой находится в растянутой зоне гиба.

Положение нейтрального слоя напряжений находим из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих перпендикулярно к поперечному сечению изгибаемого бруса:

$$\sum P = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} E_2 b \int\limits_{R_в}^{R_п} \frac{R_y - \rho_1}{R_y}\,dR_y + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} E_1 b \int\limits_{R_п}^{R_н} \frac{R_y - \rho_1}{R_y}\,dR_y = 0. \tag{86}$$

После интегрирования и необходимых преобразований получим

$$\rho_1 = \frac{k_1 h_2 + h_1}{\ln\left(\frac{R_п}{R_в}\right)^{k_1} + \ln\frac{R_н}{R_п}}, \tag{87}$$

где $k_1=\frac{E_2}{E_1}$;

h_1 — толщина плакирующего слоя;

h_2 — толщина плакируемого слоя.

Изгибающий момент находим из условия равенства внутренних и внешних сил, действующих на брус:

$$M=\frac{\Delta\alpha}{\alpha}E_2b\int\limits_{R_в}^{R_n}(R_y-\rho_1)\,dR_y+$$

$$+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}E_2b\int\limits_{R_n}^{R_н}(R_y-\rho_1)\,\alpha R_y. \qquad (88)$$

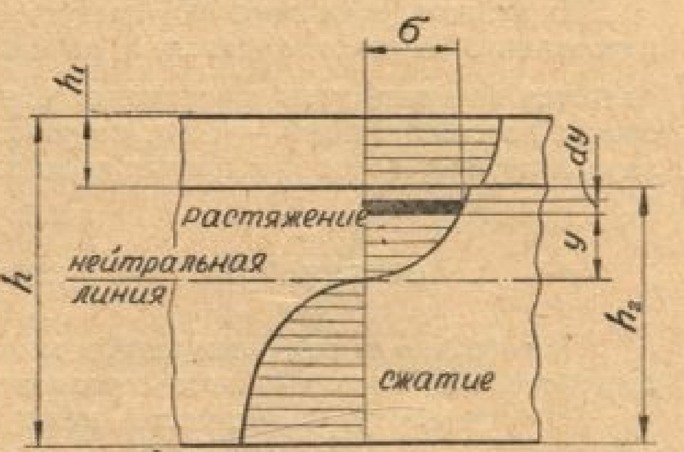

Рис. 8. Распределение напряжений по высоте бруса при линейном пластическом изгибе плакированного бруса. h_1 — толщина плакирующего слоя.

После интегрирования имеем:

$$M=\frac{E_1b\Delta\alpha}{\alpha}[k_1h_2(R_{2ср}-\rho_1)+$$

$$+h_1(R_{1ср}-\rho_1)], \qquad (89)$$

где $R_{1ср}$ — средний радиус плакирующего слоя;

$R_{2ср}$ — средний радиус плакируемого слоя.

Угол пружинения определим из уравнения (89)

$$\Delta\alpha=\frac{M\alpha}{E_1b\,[k_1h_2(R_{2ср}-\rho_1)+h_1(R_{1ср}-\rho_1)]}. \qquad (90)$$

Радиус кривизны бруса после пружинения находим из условия

$$\Delta\alpha(\rho_1-R_в)=\alpha_0R_{0в}-\alpha R_в. \qquad (91)$$

Поскольку $\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha$, то после преобразований с учетом уравнения (90) имеем:

$$R_{0в}=R_в+\frac{\rho_1}{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}-1}=R_в+\frac{M\rho_1}{E_1b\,[k_1h_2(R_{2ср}-\rho_1)+h_1(R_{1ср}-\rho_1)]-M}. \qquad (92)$$

Если при изгибе плакирующий слой оказывается в сжатой зоне, то положение нейтрального слоя напряжений находим, решая уравнение

$$\sum P=b\int\limits_{R_в}^{R_н}\sigma dR=\frac{\Delta\alpha}{\alpha}E_1b\int\limits_{R_в}^{R_n}\frac{R_y-\rho_1}{R_y}dR_y+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}E_2b\int\limits_{R_n}^{R_н}\frac{R_y-\rho_1}{R_y}dR_y=0. \qquad (93)$$

Таким образом,

$$\rho_1=\frac{k_1h_2+h_1}{\ln\left(\frac{R_н}{R_n}\right)^{k_1}+\ln\frac{R_n}{R_в}}. \qquad (94)$$

Угол пружинения для случая, когда плакирующий слой находится в сжатой зоне, определяется тоже уравнением (90). Тем не менее углы пружинения для этих двух случаев гиба плакированного бруса не равны между собой. Такое положение обусловлено тем фактом, что величина ρ_1, определяемая уравнением (87), не равна величине ρ_1, определяемой уравнением (94). Например, если $k_1<1$, то $\rho_{1(87)}>\rho_{1(94)}$, то есть нейтральный слой при изгибе смещается в сторону более прочного слоя (в данном случае плакирующего). В свою очередь, $R_{1\,ср}^{(раст)}>R_{1\,ср}^{(сжат)}$ и $R_{2\,ср}^{(раст)}<R_{2\,ср}^{(сжат)}$. Поэтому при $k_1<1$ угол пружинения в случае гибки, когда плакирующий слой находится в растянутой зоне, больший, чем в случае, когда плакирующий слой находится в сжатой зоне. Следовательно, изгиб плакированного бруса существенно отличается от изгиба обычного бруса при прочих равных условиях. Угол пружинения зависит от соотношения толщин плакирующего и плакируемого слоев, от соотношения их механических свойств, от радиуса гиба и от того, в растянутой или сжатой зоне гиба находится плакирующий слой.

Из анализа уравнения (90) следует, что величина угла пружине плакированного бруса находится в интервале, одной границей которого является величина угла пружинения бруса из материала плакирующего слоя, а другой границей — величина угла пружинения бруса из материала плакируемого слоя при прочих равных условиях.

III. ЛИНЕЙНЫЙ ЧИСТО ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ

При больших радиусах изгиба можно принять упрощенную схему напряженно деформированного состояния — линейную.

Аналитическую зависимость между напряжением и деформацией представляем в виде уравнения (48), где относительная деформация рассматриваемого волокна $e = \frac{y}{R_{\text{ср}}}$; $R_{\text{ср}}$ — радиус изгиба.

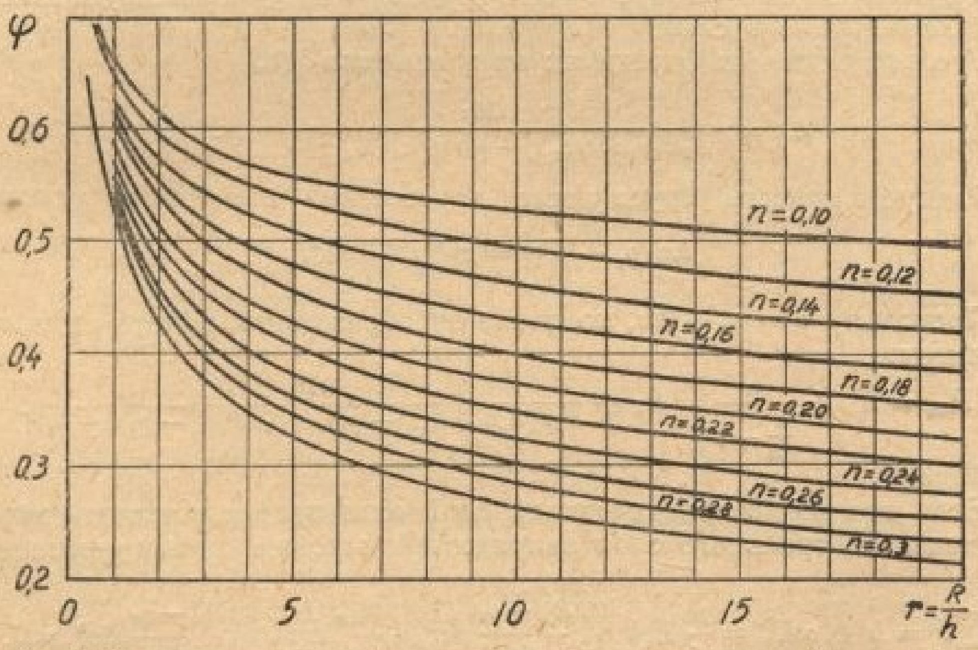

Рис. 9. Зависимость величины φ от относительного радиуса гиба при заданной величине n.

При линейном пластическом изгибе распределение напряжений по высоте бруса соответствует схеме, приведенной на рис. 8.

Изгибающий момент определяется уравнением

$$M = A_1 b \int\limits_{\frac{h_2-h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{y}{R_{\text{ср}}}\right)^{n_1} y\,dy + A_2 b \int\limits_{0}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{y}{R_{\text{ср}}}\right)^{n_2} y\,dy + A_2 b \int\limits_{0}^{\frac{h_2-h_1}{2}} \left(\frac{y}{R_{\text{ср}}}\right)^{n_2} y\,dy. \quad (95)$$

После интегрирования

$$M = A_1 \varphi_1 \eta_1 W + A_2 \varphi_2 \eta_2 W, \quad (96)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1{,}5}{2^{n_1}(n_1+2)\,r^{n_1}}; \qquad \varphi_2 = \frac{1{,}5}{2^{n_2}(n_2+2)\,r^{n_2}};$$

$$\eta_1 = 1 - \left(\frac{h_2}{h} - \frac{h_1}{h}\right)^{n_1+2}; \qquad \eta_2 = 1 + \left(\frac{h_2}{h} - \frac{h_1}{h}\right)^{n_2+2};$$

$r = \frac{R_{cp}}{h}$ — относительный радиус изгиба; $W = \frac{bh^2}{6}$.

Значения коэффициентов φ и η представлены в виде графиков (рис. 9 и рис. 10).

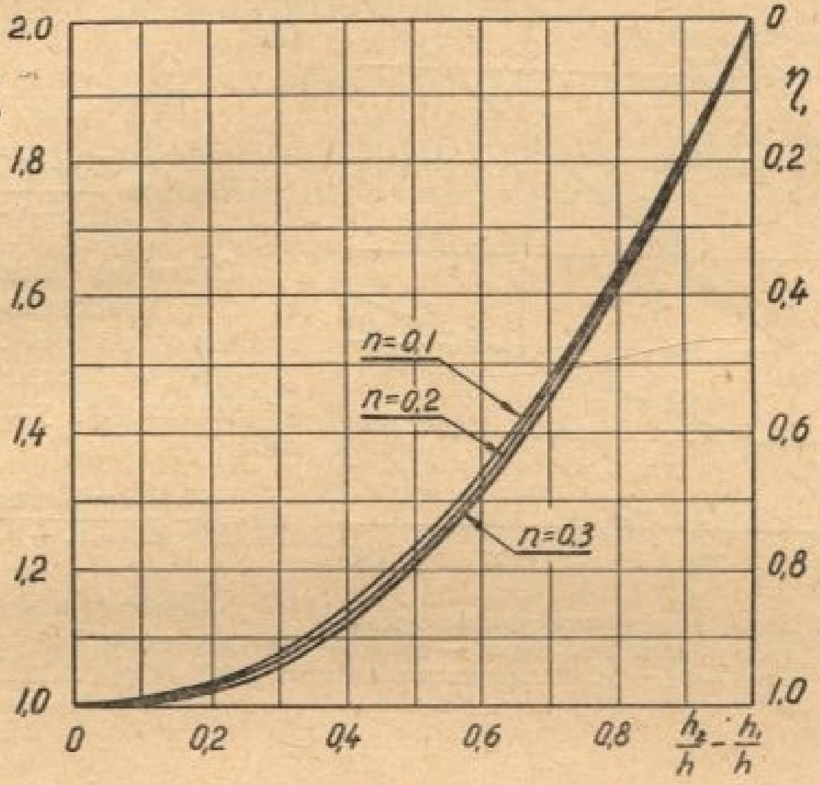

Рис. 10. Зависимость величин η_1 и η_2 от соотношения толщин плакирующего и плакируемого слоев заготовки при заданной величине n.

Из уравнения (96) следует, что величина изгибающего момента для плакированного бруса находится в интервале, одной границей которого является величина изгибающего момента для бруса из плакирующего материала ($h_1 = h$; $h_2 = 0$), а другой границей — величина изгибающего момента для бруса из плакируемого материала ($h_2 = h$; $h_1 = 0$) при прочих равных условиях.

Пружинение изогнутого бруса. Для определения угла пружинения используем уравнение (85), упрощенное за счет допущений, что $R_{cp} = \rho_1$ и что величина R_y в знаменателе равна R_{cp}, поскольку в выражении $R_y - y = R_{cp}$ при больших радиусах величина y сравнительно мала и ею можно пренебречь. В связи с такими допущениями

$$\sigma = \frac{Ey\Delta\alpha}{R_{cp}\alpha}. \qquad (97)$$

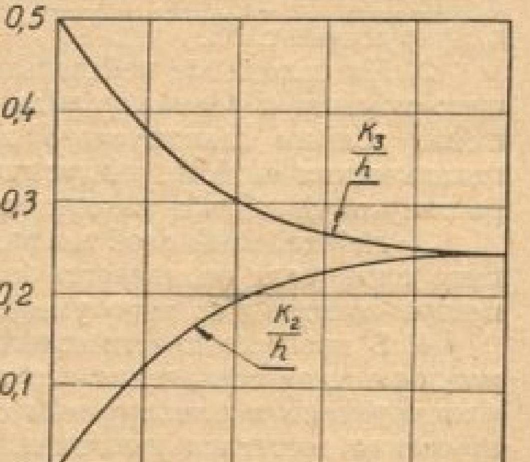

Рис. 11. Зависимость коэффициентов K_2 и K_3 от соотношения толщин плакирующего слоя и заготовки.

Величину обратного изгибающего момента находим из равенства

$$M=\frac{E_2 b\Delta\alpha}{\alpha R_{\text{ср}}}\left[\int\limits_0^{\frac{h}{2}} y^2dy+\int\limits_0^{\frac{h_2-h_1}{2}} y^2dy\right]+\frac{E_1 b\Delta\alpha}{\alpha R_{\text{ср}}}\int\limits_{\frac{h_2-h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2dy. \qquad (98)$$

После интегрирования

$$M=\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\frac{E_1}{R_{\text{ср}}}W(k_1k_3+k_2), \qquad (99)$$

где

$$k_2=\frac{h_1^3+3h_1h_2^2}{2h^3};$$

$$k_3=\frac{h_2^3+3h_1^2h_2}{2h^3}.$$

Значения коэффициентов k_2 и k_3 представлены в виде графиков (рис. 11).

Таким образом, с учетом уравнения (96) угол пружинения

$$\Delta\alpha=\frac{(A_1\varphi_1\gamma_1+A_2\varphi_2\gamma_2)R_{\text{ср}}}{E_1(k_1k_3+k_2)}\alpha. \qquad (100)$$

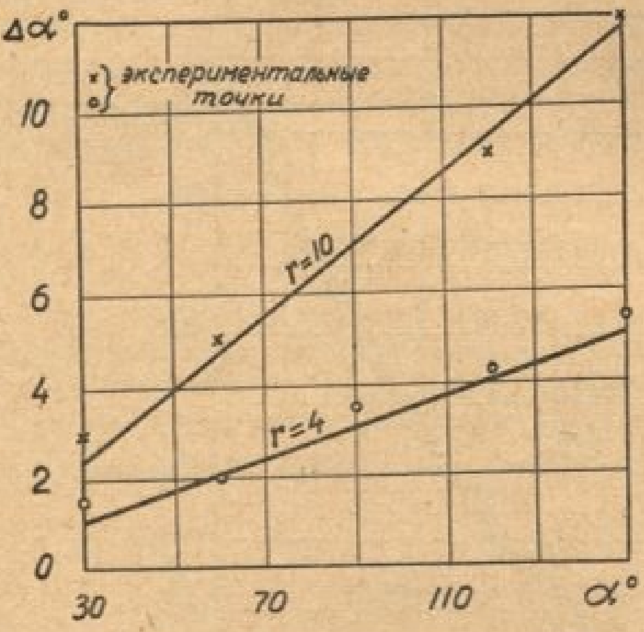

Рис. 12. График зависимости углов пружинение углов гиба (сплошная линия — теоретическая, точки — экспериментальные данные).

Характер изменения угла пружинения от угла гиба показан на рис. 12.

ВЫВОДЫ

В результате анализа пластического изгиба листового плакированного металла установлено следующее:

1. Распределение главных напряжений по высоте изгибаемого бруса зависит от соотношения толщин плакирующего и плакируемого слоев, от соотношения их механических свойств, от радиуса гиба и резко меняется в зависимости от того, в сжатой или растянутой зоне гиба находится плакирующий слой.

2. На положение нейтрального слоя напряжений, величину изгибающего момента и величину угла пружинения оказывают влияние соотношение толщин плакируемого и плакирующего слоев, соотношение их механических свойств, радиус гиба и вариант гиба (то есть в сжатой или растянутой зоне гиба находится плакирующий слой).

3. Нейтральный слой напряжений смещается в сторону плакирующего слоя (если он является более прочным) и в то же время в сторону центра кривизны по мере уменьшения радиуса гиба.

4. В процессе пластического изгиба плакированных металлов возможны случаи совпадения нейтрального слоя с границей спая между плакирующим и плакируемым слоями. Если при этом радиальные напряжения достигают величины, при которой хотя бы один из материалов бруса может течь в тангенциальном (а также в радиальном) направлении, а прочность по границе спая слоев не достаточна, то это является предпосылкой для расслоения плакированного бруса.

5. Величина изгибающего момента находится в интервале, одной границей которого является величина изгибающего момента для бруса из

материала плакирующего слоя, а другой — величина изгибающего момента для бруса из материала плакируемого слоя при прочих равных условиях.

6. Значение угла пружинения находится в интервале, одной границей которого является величина угла пружинения бруса из материала плакирующего слоя, а другой — величина угла пружинения бруса из материала плакируемого слоя при прочих равных условиях.

7. Объемный чисто пластический изгиб обычного бруса можно рассматривать как частный случай объемного чисто пластического изгиба такого же бруса из плакированного металла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелкин Б. Н. и Голованова А. П. Обработка давлением листовой двухслойной стали, НИИХИММАШ, сб. статей, вып. 19, М., 1956.

2. Мошнин Е. И. Исследование пластического изгиба, ЦНИИТМАШ, сб. статей, кн. 62, Машгиз, 1954.

3 Ильюшин А. А. Пластичность, ОГИЗ, 1948.