ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 22 1963

ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОТ ДЕЙСТВИЯ ТОРЦОВЫХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩИХ

Н. А. Шеломов

Рассмотрим тонкостенную коническую оболочку постоянной толщины, срединная поверхность которой отнесена к системе ортогональных криволинейных координат α, β. На торце $\alpha=\alpha_1$ вдоль образующей $\beta_0=\mathrm{const}$ к оболочке приложена сила N. Будем считать, что возникающее под действием этой силы основное напряженное состояние оболочки состоит из нормальных T_1 и сдвигающих S тангенциальных погонных усилий.

По условию равновесия усилия T_1 и S связаны между собой:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AS)=0, \tag{1}$$

где $A=1$, $B(\alpha,\beta)=\alpha\cdot B_0(\beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

Поэтому, если T_1 задать в виде некоторого конечного разложения

$$T_1=\frac{1}{\alpha B_0(\beta)}\cdot\sum_{i=1}^{i=p}c_i\varphi_i(\alpha)\cdot n_i(\beta). \tag{2}$$

усилие S может быть найдено по (1):

$$S=-\sum_{i=1}^{i=p}\dot{\varphi}_i(\alpha)\,[c_i\int_0^{\beta}n_i(\beta)\cdot d\beta-g_i]. \tag{3}$$

В векторной форме

$$\mathbf{T}_1=T_1\cdot\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}$$

$$\mathbf{S}=S\cdot\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} \tag{4}$$

где $\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}$, $\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}$ — единичные векторы, касательные к кривым $\beta=\mathrm{const}$ и $\alpha=\mathrm{const}$, соответственно.

Отсюда следует, что основное напряженное состояние оболочки полностью определяется функциями $\varphi_i(\alpha)$, $n_i(\beta)$ и постоянными c_i и g_i.

Функции $n_i(\beta)$ задаются в начале расчета. Функции $\varphi_i(\alpha)$ и произвольные постоянные c_i, g_i определяются из условий равновесия отсеченной части конуса, заключенной между сечениями $\alpha_1=\mathrm{const}$ и $\alpha=\mathrm{const}$, с помощью принятой гипотезы.

Условия равновесия

Если полюс векторного момента поместить в вершине конуса, то получим:

$$\left.\begin{aligned} &\oint (T_1 + S)\, B d\beta = -N \\ &\oint (r \times S)\, B d\beta = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

или в развернутом виде:

$$\sum_{=1}^{i=p} \left\{ c_i \varphi_i(\alpha) \oint n_i(\beta) \cdot M_\alpha \cdot d\beta + \alpha \cdot \dot{\varphi}_i(\alpha) \oint \left[g_i - c^i \int_0^\beta n_i(\beta) d\beta \right] \cdot \frac{M_\beta}{B} \cdot B_0(\beta) d\beta \right\} = -N, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha \cdot \dot{\varphi}_i(\alpha) \oint \left[g_i - c_i \int_0^\beta n_i(\beta) d\beta \right] \cdot B_0(\beta) \left(r \times \frac{M_\beta}{B} \right) d\beta = 0.$$

Первые три функции $\varphi_i(\alpha)$ разложения (2) принимаем равными единице. После этого уравнения (6) распадаются на две системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{i=3} c_i \oint n_i(\beta) \cdot M_\alpha d\beta = -N \tag{7}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=4}^{j=p} \left\{ c_j \varphi_j(\alpha) \oint n_j(\beta) \cdot M_\alpha d\beta + \alpha \cdot \dot{\varphi}_j(\alpha) \oint \left[g_j - c_j \int_0^\beta n_j(\beta) d\beta \right] \cdot \frac{M_\beta}{B} \cdot B_0(\beta) d\beta \right\} = 0 \\ &\sum_{j=4}^{j=p} \alpha \cdot \dot{\varphi}_j(\alpha) \oint \left[g_j - c_j \int_0^\beta n_i(\beta) d\beta \right] \cdot B_0(\beta) \left(r \times \frac{M_\beta}{B} \right) \cdot d\beta = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Система (7) служит для определения $c_i (i = 1, 2, 3)$. Система (8) однородная и содержит остальные j-тые члены разложения (2)($i = i > 3$). Из (8) при произвольных $\varphi_j(\alpha)$ и c_j следуют условия самоуравновешенности функций $n_j(\beta)$. Для определения $\varphi_j(\alpha)$ и c_j необходимо либо решить вариационную задачу, либо использовать какую-нибудь гипотезу.

Гипотеза

Самоуравновешенные напряженные состояния типа T_{1j} имеют тенденцию к затуханию и при $\alpha \gg \alpha_1$

$$\begin{gathered} \varphi_j(\alpha) \approx 0, \\ \alpha \gg \alpha_1. \end{gathered} \tag{9}$$

Равенство (9) служит идейной основой гипотезы Навье для поверхности нормальных напряжений, согласно которой в разложении (2) учитываются только три первые члена, определяемые из уравнения (7).

В действительности скорость затухания T_{1j} в тонкостенных оболочках нулевой Гауссовой кривизны весьма незначительна. Поэтому для оболочек средней и малой длины равенство (9) практически не осуществляется в пределах оболочки. В этом случае на всем интервале изменения α более предпочтительным может оказаться другое приближенное равенство:

$$\varphi_j(\alpha) \approx 1, \tag{10}$$

которое будет тем точнее, чем меньше относительная толщина оболочки h^* и изменяемость функции $n_j(\beta)$[1].

Отсюда следует, что самоуравновешенные члены разложения (2) с малой изменяемостью должны учитываться при определении основного напряженного состояния оболочки.

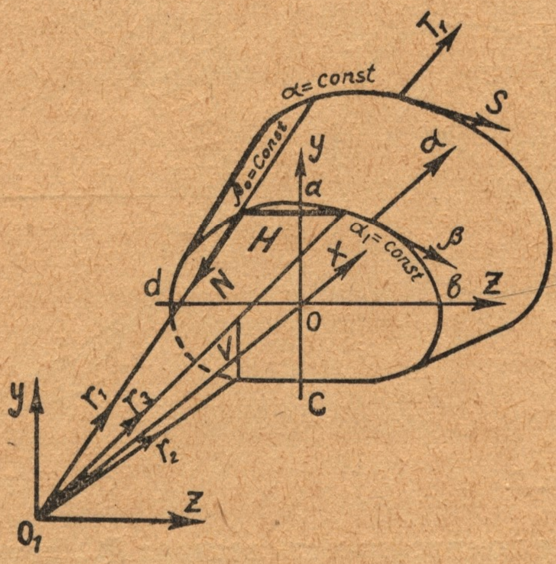

Рис. 1.

Необходимыми для этого условиями являются: принимаемое нами условие максимума усилия T_1 по всей образующей $\beta_0=\text{const}$ (вдоль которой приложена сила N).

$$\frac{\partial T_1(\alpha, \beta_0)}{\partial \beta} = 0 \tag{11}$$

и гипотеза о совпадении плоскости действия внешних и внутренних сил, предложенная профессором Л. П. Винокуровым для тонкостенных систем постоянного сечения.

При нагружении оболочки силой **N** все плоскости, проходящие через образующую $\beta_0=\text{const}$ суть плоскости действия внешних сил, в том числе и плоскости H и V (рис. 1). Плоскость $H \| OZ$, плоскость $V \| OY$ (OZ, OY—главные центральные оси сечения $\alpha=\text{const}$).

Указанная гипотеза, применительно к конической оболочке при рассматриваемом случае нагружения, выражается двумя векторными уравнениями:

$$\lambda_1 R_{1T} + \lambda_2 r_1 + \lambda_3 r_2 = 0, \tag{12}$$

$$\nu_1 R_{2T} + \nu_2 r_1 + \nu_3 r_3 = 0, \tag{13}$$

[1] «Под этим (изменяемостью) мы условимся понимать свойство функции, характеризуемое числом μ, равным отношению некоторого среднего (для рассматриваемого интервала) абсолютного значения ее производной к среднему абсолютному значению самой функции...».

(А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек, ГИТТЛ, М., 1953, стр. 414).

$R_{1T} = \int\limits_{\widehat{dab}} T_1 B d\beta$, $R_{2T} = \int\limits_{\widehat{cda}} T_1 B d\beta$ — равнодействующие усилий T_1 соответственно по дугам $\widehat{dab}$ и $\widehat{cda}$.

(12)—условие компланарности вектора R_{1T} двум не коллинеарным векторам r_1 и r_2 в плоскости V;

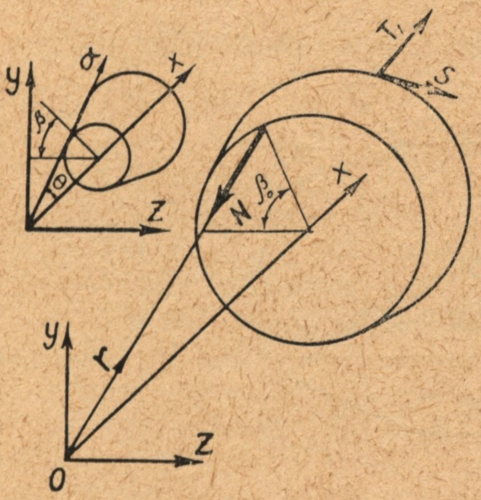

Рис. 2.

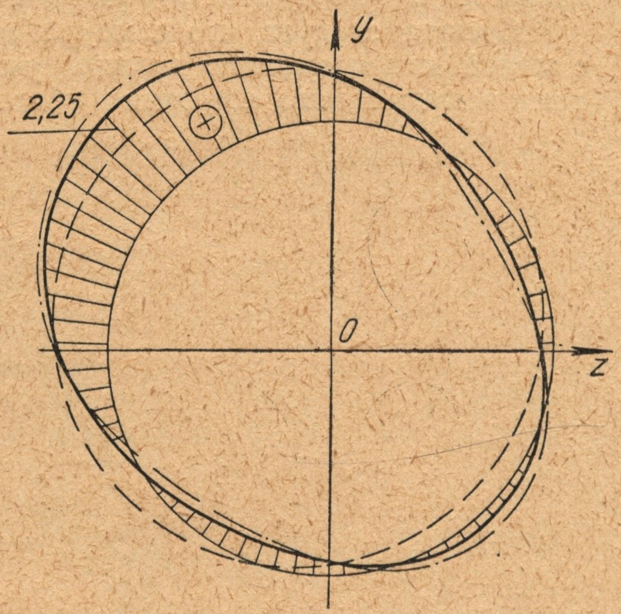

Рис. 3.

(13) — условие компланарности вектора R_{2T} двум не коллинеарным векторам r_1 и r_3 в плоскости H.

Пример. Круговая коническая оболочка с замкнутым контуром нагружена силой $N = -N\dfrac{M_\alpha(\beta_0)}{A}$ вдоль образующей $\beta_0 = \text{const}$. Геометрия оболочки представлена рис. 2 и следующими зависимостями:

$$M(\alpha,\ \beta) = ix + jy + kz = i\alpha\cos\theta + j\alpha\sin\theta\sin\beta + k(-\alpha\sin\theta\cos\beta)$$

$$A = 1;\quad B = \alpha\sin\theta;\quad \frac{M_\alpha}{A} = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial M}{\partial\alpha},\quad \frac{M_\beta}{B} = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial M}{\partial\beta}. \tag{14}$$

Найти T_1 и S.

Пусть

$$T_1 = \frac{1}{\alpha\sin\theta}[c_0 + c_1\sin\beta + c_2\cos\beta + c_3\sin 2\beta + c_4\cos 2\beta]. \tag{15}$$

Из условий (7), (11), (12), (в силу симметрии сечения условие (13) ничего не прибавляет к условию (12)) получим:

$$c_0 = \frac{N}{2\pi};\quad c_1 = \frac{N\sin\beta_0}{\pi};\quad c_2 = \frac{N\cos\beta_0}{\pi};$$

$$c_3 = \frac{\frac{3}{4}N\sin 2\beta_0}{\pi};\quad c_4 = \frac{\frac{3}{4}N\cos 2\beta_0}{\pi}.$$

Таким образом,

$$S = 0$$

$$T_1 = \frac{N}{\pi\alpha\sin\theta}\left[\frac{1}{2} + \cos(\beta-\beta_0) + \frac{3}{4}\cos 2(\beta-\beta_0)\right]. \tag{16}$$

На рис. 3 представлены для сравнения законы измерения величины $\frac{T_1 \pi \alpha \sin\theta}{N}$ на кривой $\alpha = \text{const}$ при $\beta_0 = 45°$, полученные тремя способами:

1. Предлагаемым методом (жирная сплошная линия).
2. Элементарным методом (пунктирная линия).
3. По теории безмоментных оболочек (путем разложения силы в ряд Фурье с учетом всех членов ряда с $\mu \leqslant 2$, штрихпунктирная линия).