ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 22 1963

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

*Л. Н. Борисенко*

Рассмотрим задачу о движении точки под действием центральной силы и с помощью геометрического способа образования кривой, как огибающей семейства прямых, установим геометрическое и аналитическое соответствие между траекторией точки и ее годографом скоростей. Для этого воспользуемся известными из геометрии понятиями ([1], § 64).

1. Подерой $\Gamma'$ кривой $\Gamma$ относительно некоторой точки $O$ (рис. 1) называется геометрическое место проекций $M'$ этой точки на касательные к кривой $\Gamma$.

Кривую $\Gamma$ будем называть антиподерой кривой $\Gamma'$. Таким образом, антиподера кривой $\Gamma'$ относительно точки $O$ является огибающей семейства прямых, проходящих через точки $M'$ кривой $\Gamma'$ перпендикулярно к прямым $OM'$, соединяющим эти точки с точкой $O$.

Как видно из определения, способ образования антиподеры кривой тесно связан с методом тангенциальных координат; уравнение антиподеры $\Gamma$ кривой $\Gamma'$ в этих координатах легко найти, если известно уравнение кривой $\Gamma'$ в полярных координатах, и наоборот, зная уравнение кривой $\Gamma$ в тангенциальных координатах легко найти уравнение ее подеры $\Gamma'$ в полярных координатах. Уравнение семейства касательных к кривой $\Gamma$ запишем в виде:

$$ux + vy + 1 = 0 \qquad (1)$$

и в нормальной форме:

$$x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0; \qquad (2)$$

так как $p$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки $O$ на касательную, а $\theta$ — угол, образованный этим перпендикуляром и осью $Ox$, то $f(p, \theta) = 0$ является уравнением геометрического места точек $M'$, т. е. подеры $\Gamma'$ кривой $\Gamma$, в полярных координатах. Уравнение огибающей прямых (1) $\varphi(u, v) = 0$ называется уравнением кривой $\Gamma$ в тангенциальных координатах. Сравнивая (1) и (2), получим связь между переменными $u$ и $v$, с одной стороны, и $p$ и $\theta$ — с другой:

$$p = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{v}{u},$$

$$u = -\frac{\text{sos}\,\theta}{p}, \quad v = -\frac{\sin\theta}{p}. \qquad (3)$$

Переход от одного из уравнений $\varphi(u, v) = 0$, $f(p, \theta) = 0$ к другому осуществляется по формулам (3).

Если кривая $\Gamma'$ задана уравнением в полярных координатах $r_1=p=f(\theta)$, то радиус кривизны $\rho$ ее антиподеры $\Gamma$ в соответствующей точке выражается формулой [1]:

$$\rho=p+\frac{d^2p}{d\theta^2}, \tag{4}$$

а характеристическую точку на прямой семейства (1), в которой прямая касается кривой $\Gamma$, найдем, откладывая на этой прямой от точки $M$ отрезок $MM'$:

$$MM'=\frac{dp}{d\theta}. \tag{5}$$

2. Найдем подеру $\Gamma'$ некоторой кривой $\Gamma$ относительно какой-либо точки $O$, а затем инверсию $\Gamma''$ этой подеры относительно единичной окружности с центром в той же точке. Справедлива следующая теорема:

1) кривые $\Gamma$ и $\Gamma''$ обладают свойством взаимности, т. е. каждая из них является инверсией подеры другой относительно единичной окружности;

2) если в уравнении одной из этих кривых в точечных координатах $f(x, y)=0$ заменить $x$ на $-u$ и $y$ на $-v$, то получим уравнение другой кривой в тангенциальных координатах.

Действительно, если $r_1=p\ (\theta)$ — уравнение кривой $\Gamma'$ в полярных координатах, то по (5) расстояние $MM'=p$ и, как видно из рис. 1,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{p'}{p}=-\frac{\left(\frac{1}{p}\right)'}{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Найдем тангенс угла $\gamma$, образованного полярным лучом $OM''$ с нормалью к кривой $\Gamma''$ в точке $M''$: $\operatorname{tg}\gamma=\frac{r_2'}{r_2}$, где $r_2=\frac{1}{p}$ или из (6) $\operatorname{tg}\varphi=-\operatorname{tg}\gamma$ и $\gamma=-\varphi$. Таким образом, нормаль к кривой $\Gamma''$ в точке $M''$ параллельна, а касательная перпендикулярна $OM$, и геометрическим местом точек $M'''$ пересечения этой касательной с прямой $OM$ является подера $\Gamma'''$ кривой $\Gamma''$ относительно полюса $O$. Из подобия треугольников $\Delta OMM' \infty \Delta OM''M'''$ получаем $r_3=OM'''=\frac{1}{r}$, т. е. кривая $\Gamma'''$ является инверсией кривой $\Gamma$ относительно единичной окружности с центром в точке $O$.

Так как кривая $\Gamma'''$ — подера кривой $\Gamma''$, то по (3) имеем:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

т. е. $x=\varphi_1(\alpha)=-u$ и $y=\varphi_2(\alpha)=-v$. (7)

Исключая параметр $\alpha$ из уравнений (7), получим уравнение кривой $\Gamma$ в точечных координатах $f(x, y)=0$ и уравнение кривой $\Gamma''$ в тангенциальных координатах $f(-u, -v)=0$, что доказывает теорему.

3. Рассмотрим точку $M$ (рис. 1), масса которой равна $m$, движущуюся под действием центральной силы $F$ (центр сил находится в точке $O$). Пусть кривая $\Gamma$ является траекторией этой точки. Тогда ан-

типодера $\Gamma''$ инверсии этой кривой, относительно единичной окружности, подобна годографу скоростей точки $M$ и повернута относительно этого годографа на угол 90°*. Действительно, кривая $\Gamma''$ является огибающей семейства прямых, перпендикулярных ускорениям $W$ точки $M$.

Тогда из теоремы п. 2 следует, что уравнение в тангенциальных координатах этой кривой, подобной годографу скоростей, можно получить, заменяя в уравнении траектории $f(x, y)=0$ $x$ на $-u$ и $y$ на $-v$.

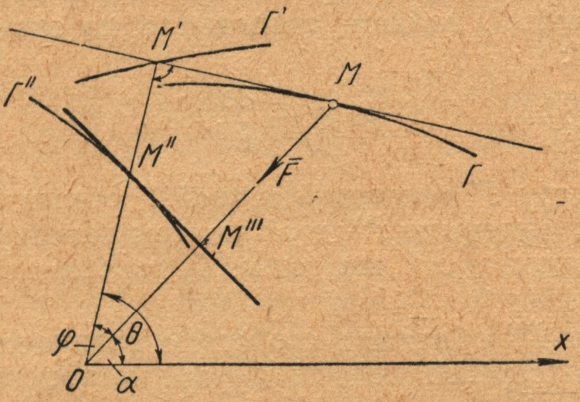


Рис. 1

С помощью той же теоремы легко получить известную формулу Бинэ и дать этой формуле геометрическое толкование.

Так как кривая $\Gamma''$ является антиподерой инверсии траектории $r_3 = \frac{1}{r} = f(\alpha)$, то радиус кривизны $\rho_1$ кривой $\Gamma''$ в точке $M''$ по (4)

$$\rho_1 = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''. \tag{8}$$

С другой стороны, радиус кривизны годографа скоростей

$$\rho_2 = \frac{Wdt}{d\varphi},$$

где $Wdt$ — элементарная дуга годографа скоростей,

$d\varphi$ — угол смежности, равный бесконечно малому углу поворота $d\alpha$ полярного луча $OM$.

Таким образом, $\rho_2 = \frac{Wdt}{d\alpha}$,

или, вводя удвоенную секториальную скорость $C = \frac{d\alpha}{dt} r^2$,

$$\rho_2 = \frac{Wr^2}{C} = \frac{Fr^2}{mC}. \tag{9}$$

Но кривая $\Gamma''$ подобна годографу скоростей, и коэффициент подобия, показано в [2], равен $C$, т. е. $\rho_2 = C\rho_1$. Тогда из (9) и (8) получаем формулу Бинэ:

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = \frac{Fr^2}{mC^2},$$

т. е. правая часть в формуле Бинэ является разделенным на $C$ радиусом кривизны годографа скоростей.

---

* Впервые показано Я. Л. Геронимусом [2].

В случае ньютонианского тяготения $F=\frac{k}{r^2}$ и

$$\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)''=\text{const},$$

т. е. годографом скоростей является окружность.

То же получим, найдя подеру траектории точки — конического сечения — относительно центра сил $O$, находящегося в фокусе. Для гиперболы и эллипса подерой является окружность, касающаяся этих кривых в вершинах, так что точка $O$ лежит внутри окружности в случае эллипса и вне ее в случае гиперболы; для параболы подера вырождается в касательную в вершине [1]. Таким образом, подера траектории, прямая или окружность, не проходит через точку $O$, т. е. после выполнения инверсии относительно единичной окружности с центром в этой точке получим окружность, подобную годографу скоростей. Полюс годографа скоростей лежит внутри окружности в случае эллипса, вне ее — в случае гиперболы и на окружности в случае параболы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов, Физматгиз, М., 1962.

2. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах движения под действием центральной силы, Труды ХАИ, вып. 15. Изд-во ХГУ, 1954.