Выпуск 22 1963

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Л. Н. Борисенко

При решении задач синтеза механизмов по методу Чебышева мы приходим к задаче о нахождении некоторого обобщенного полинома, наименее уклоняющегося от заданной непрерывной функции на некотором отрезке, причем точки, в которых достигается максимальное отклонение, заранее неизвестны. Многие авторы, решая такие задачи, предполагают, без всякого обоснования, что концы отрезка являются точками максимального отклонения искомого обобщенного полинома от заданной функции[1]. Это, конечно, значительно упрощает задачу, ибо уменьшает число отыскиваемых неизвестных.

Слегка видоизменяя рассуждение, которое применил Чебышев при рассмотрении частного случая[2], весьма нетрудно указать простое достаточное условие для того, чтобы концы отрезка были точками максимального отклонения.

Пусть непрерывные и линейно независимые между собой функции

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x) \tag{1}$$

образуют систему Чебышева T_n на отрезке $[a, b]$, т. е. ни один обобщенный полином

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

не может иметь более n нулей на отрезке $[a, b]$.

Покажем следующее: *для того чтобы разность между заданной функцией $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, и обобщенным полиномом $P_n^*(x)$, наименее уклоняющемся от $f(x)$, на отрезке $[a, b]$ достигала значений, максимальных по модулю на концах отрезка, достаточны следующие два условия:*

1) *система функций Чебышева $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ должна содержать единицу;*

2) *система функций $\{f(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ должна быть системой Чебышева T_{n+1} на отрезке $[a, b]$.*

Для доказательства обозначим через L максимальное отклонение:

$$L = \max |f(x) - P_n^*(x)| < \max |f(x) - P_n(x)|,\quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{3}$$

и рассмотрим уравнение:

$$\{f(x) - P_n^*(x) - L\}\{f(x) - P_n^*(x) + L\} = 0. \tag{4}$$

Пусть максимальное отклонение L достигается в m внутренних

---

[1] См. [1], [2].

[2] См. [3], стр. 174—176.

точках отрезка $[a, b]$ с чередующимися знаками разности $f(x)-P_n^*(x)$ и в l концевых точках, причем очевидно, что $0 \leqslant l \leqslant 2$.

При наших условиях каждое выражение в фигурных скобках является обобщенным полиномом системы T_{n+1} и поэтому может иметь на отрезке $[a, b]$ не более $n+1$ нулей; следовательно, уравнение (4) имеет на отрезке $[a, b]$ не более $2n+2$ нулей; так как нули во внутренних точках должны быть двойными, то имеем неравенство:

$$2m + l \leqslant 2n + 2. \tag{5}$$

С другой стороны, по теореме Чебышева, число точек максимального отклонения должно быть не менее, чем $n+2$, т. е. мы должны иметь:

$$m + l \geqslant n + 2. \tag{6}$$

Из этих двух неравенств находим:

$$2m + 2l \geqslant 2n + 4, \quad 2m + l \leqslant 2n + 2, \quad l \geqslant 2, \tag{7}$$

т. е. *оба конца отрезка должны быть точками максимального отклонения.*

Рассмотрим несколько примеров, встречающихся при решении задач синтеза:

$$f(x) = x^2, \quad T_2 = \left\{x,\ 1,\ \frac{1}{x}\right\}; \quad 0 < a;$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}},\ T_2 = \{\sqrt{x(1-x)},\ x,\ 1\};\ 0 < a < b < 1; \tag{8}$$

$$f(x) = x,\ T_2 = \left\{\frac{x}{1+x^2},\ \frac{1}{1+x^2},\ 1\right\};$$

нетрудно видеть, что во всех этих примерах выполняются указанные нами достаточные условия, откуда вытекает, что концы отрезка являются точками максимального отклонения.

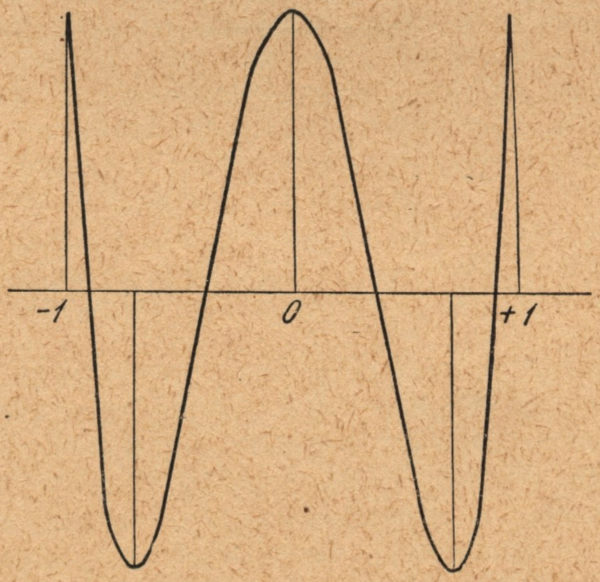

Рис. 1.

Нетрудно привести примеры, в которых концы отрезка не будут точками максимального отклонения. Рассмотрим, например,

$$\frac{\cos 4\varphi}{8} = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}, \quad x = \cos\varphi \tag{9}$$

известный многочлен Чебышева четвертой степени, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, +1]$ при заданном старшем коэффициенте (рис. 1); точки максимального отклонения таковы:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \; x_5 = -1,$$

причем две из них совпадают с концами отрезка. Рассмотрим теперь функцию $f(x = x^4 - x^2$ и поставим задачу о наилучшем ее приближении на некотором отрезке $[a, b]$, где $-1 < a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b < 1$, посредством многочлена первой степени $\alpha x + \beta$. Так как разность $f(x) - \alpha x - \beta$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[a, b]$, то она должна достигать своего максимального модуля L по крайней мере в трех точках отрезка с чередующимися знаками, причем этими условиями искомый многочлен определяется единственным образом. Но многочлен Чебышева (9) удовлетворяет этим условиям, следовательно он наименее уклоняется от нуля при заданном старшем коэффициенте не только на отрезке $[-1, +1]$, но и на любом отрезке $[a, b]$ при условии $a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b$. Если $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a$, $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то концы отрезка $[a, b]$ не являются точками максимального отклонения; таких примеров, очевидно, можно привести сколько угодно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н И. Левитский. Синтез механизмов по Чебышеву, Изд-во АН СССР, 1946.

2. З. Ш. Блох. Приближенный синтез механизмов, Машгиз, М., 1948.

3. П. Л. Чебышев. О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси, полн. собр. соч., т. IV, М.-Л., Изд-во АН СССР, 1948.