

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ЗУБЬЯХ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ

*В. А. Ткаченко*

Планетарные зубчатые механизмы в современном машиностроении получили большое распространение из-за ряда их преимуществ перед другими механизмами. Однако конструкторы еще встречают значительные затруднения при проектировании таких передач. Одним из таких затруднений является вопрос учета—хотя бы приближенно—величины динамической нагрузки на зубьях. Известная зависимость А. И. Петрусевича [3] приведена для случая работы колес внешнего зацепления с неподвижными осями и не отражает работы зубчатых колес планетарной передачи, так как наличие нескольких сателлитов ( $k$ ), переносного движения, связанной с сателлитами массы водила вносит большое отличие в исследованный Петрусевичем случай.

Часто с сателлитной шестерней (например, в  $AI$ -передаче [4]) жестко связана другая шестерня, масса которой также оказывает влияние на величину динамической нагрузки. В. Н. Кудрявцев [2] рекомендует в этом случае динамическую нагрузку, определенную по формуле А. И. Петрусевича, увеличить вдвое. При больших скоростях формула Петрусевича дает большое расхождение с экспериментами, так как при ее выводе не учтены инерционные усилия, связанные с неравномерностью вращения колес при кромочном ударе и при кромочном зацеплении перед срединным ударом. Учет инерционных усилий выполнен Б. М. Абрамовым [1]; формулы, полученные им, дают результаты, близкие к экспериментам.

В настоящей статье сделана попытка на примере  $AI$ -передачи (наиболее распространенной в силовых планетарных механизмах) учесть действительные условия работы на величину динамической нагрузки.

В планетарной передаче на величину динамической нагрузки влияет также кратность или некратность чисел зубьев числу сателлитов. При кратности возникает одновременно или почти одновременно удар между зубьями центрального колеса и всеми сателлитами. При этом возможны следующие варианты: удар зубьев  $z_1-z_2$  при правильном зацеплении  $z_3-z_4$  и наоборот; удар зубьев  $z_1-z_2$  при кромочном зацеплении  $z_3-z_4$  и наоборот; одновременный или почти одновременный удар  $z_1-z_2$  и  $z_3-z_4$ .

Рассмотрим срединный удар зубьев  $z_1-z_2$  при кратности чисел зубьев центральных колес числу сателлитов  $k$ . Приведенная к основному шагу ошибка  $\Delta$  принимается для всех пар одинаковой. В этом случае возникает срединный удар одновременно в зацеплении со всеми сателлитами.



Подставляя в (4) значения  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим

$$\varphi_1 = \varphi_n i_{1n}^4 + \frac{1}{2} \varphi_n^2 B_1, \quad (6)$$

где

$$B_1 = (i_{34}^n)^2 \frac{\rho_1 (i_{12}^n)^2 - 2\rho_1 i_{12}^n - \rho_2}{r_{01}}.$$

Дифференцируя (6) и (5) по  $t$ , находим связь между угловыми скоростями звеньев при кромочном зацеплении колес  $z_1 - z_2$

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{1n}^4 + \varphi_n B_1. \quad (7)$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = 1 - i_{34}^n. \quad (8)$$

Для определения истинного закона движения звеньев планетарного механизма при кромочном зацеплении к уравнениям (7) и (8) необходимо добавить уравнение Лагранжа «второго рода»

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \omega_n} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_n} = Q_n. \quad (9)$$

Здесь  $E = \frac{\omega_n^2}{2} \left[ I_1 \left( \frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 + I_{nc} + I_c \left( \frac{\omega_c}{\omega_n} \right)^2 \right] = \frac{\omega_n^2}{2} [I_1 (i_{1n}^4 + \varphi_n B_1)^2 + I_{nc} + I_c (1 - i_{34}^n)^2]$  — кинетическая энергия механизма;

$I_1, I_{nc}, I_c$  — моменты инерции, соответственно, центрального колеса  $z$ , водила  $H$  с сателлитами и всех сателлитов относительно собственной центральной оси;

$\Pi$  — потенциальная энергия;

$Q_n$  — приведенная обобщенная сила механизма, определяемая из выражения

$$Q_n \omega_n = M_1 \omega_1 - M_n \omega_n - M_{тр} \omega_n = M_1 \omega_1 - M_n \omega_n - (M_1 i_{1n}^4 - M_n) \omega_n = M_1 \varphi_n B_1 \omega_n.$$

Принимаем  $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_n} = 0$ . После подстановки уравнение (9) приводится

к виду уравнения Бернулли

$$\epsilon_n [I_1 (i_{1n}^4 + \varphi_n B_1)^2 + I_{nc} + I_c (1 - i_{34}^n)^2] + \omega_n^2 I_1 B_1 (i_{1n}^4 + \varphi_n B_1) = M_1 \varphi_n B_1, \quad (10)$$

первый интеграл которого

$$\omega_n = \omega_{но} \sqrt{\frac{I_{про} + \frac{M_1}{\omega_{но}^2} \varphi_n^2}{I_{про} + 2I_1 B_1 \varphi_n + I_1 B_1^2 \varphi_n^2}}. \quad (11)$$

В момент удара  $r_{01} \psi_1 - r_{02} \psi_2 = \Delta$ . Отсюда с учетом (5) имеем

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2\Delta}{r_{01} B_1}}. \quad (12)$$

Угловые скорости звеньев в момент удара

$$\omega_H = \omega_{HO} D_1, \quad (13)$$

$$\omega_1 = \omega_{HO} D_1 \left( i_{1H}^4 + \sqrt{\frac{2\Delta B_1}{r_{01}}} \right), \quad (14)$$

$$\omega_c = \omega_{HO} D_1 (1 - i_{34}^H), \quad (15)$$

где

$$D_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{M_1}{\omega_{HO}^2 I_{про}} \cdot \frac{2\Delta}{r_{01} B_1}}{1 + 2 \frac{I_1}{I_{про}} \sqrt{\frac{2\Delta B_1}{r_{01}}} + \frac{I_1}{I_{про}} \cdot \frac{2\Delta B_1}{r_{01}}}}, \quad (16)$$

$$I_{про} = I_1 (i_{1H}^4)^2 + I_{HC} + I_c (1 - i_{34}^H)^2. \quad (17)$$

Скорость срединного удара зубьев  $z_1 - z_2$  определяется из зависимости  $V_c = r_{01}(\omega_1 - \omega_H) + r_{02}(\omega_c - \omega_H)$

$$V_c = r_{01} \omega_{HO} D_1 \sqrt{\frac{2\Delta B_1}{r_{01}}} = V_1^H \frac{\cos \alpha_1}{i_{1H}^4 - 1} B_1 \sqrt{\frac{2\Delta B_1}{r_{01}}}. \quad (18)$$

На рис. 2 показано кромочное зацепление зубьев  $z_3 - z_4$  в произвольный момент времени.

Из треугольника  $O_1 O_2 B$  имеем

$$R_{e3} \sin(\alpha_{e3} - \alpha_2 + \psi_3) = \frac{r_{04}}{\cos \beta_4} \sin(\varphi_{40} + \psi_4 - \theta_4) \quad (19)$$

$$R_{e3} \cos(\alpha_{e3} - \alpha_2 + \psi_3) = \frac{r_{04}}{\cos \beta_4} \cos(\varphi_{40} + \psi_4 - \theta_4) - A \quad (20)$$

$$\theta_4 = \text{tg } \beta_4 - \varphi_4 \quad (21)$$

Поступая как раньше, получим:

$$\psi_3 = \psi_4 i_{34}^H + \frac{1}{2} \psi_4^2 \frac{\rho_4 - 2\rho_3 i_{34}^H + \rho_3 (i_{34}^H)^2}{r_{03}} = \psi_4 i_{34}^H + \frac{1}{2} \psi_4^2 B_2. \quad (22)$$

При  $\psi_4 = \varphi_H$ ,  $\psi_3 = \varphi_H - \varphi_c$  и  $\frac{\varphi_1 - \varphi_H}{\varphi_c - \varphi_H} = i_{12}^H$  имеем:

$$\varphi_c = \varphi_H (1 - i_{34}^H) - \frac{1}{2} \varphi_H^2 B_2 \quad (23)$$

$$\varphi_1 = \varphi_H i_{1H}^4 - \frac{1}{2} \varphi_H^2 i_{12}^H B_2. \quad (24)$$

Следовательно, в этом случае

$$\frac{\omega_c}{\omega_H} = 1 - i_{34}^H - \varphi_H B_2, \quad (25)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{1H}^4 - \varphi_H i_{12}^H B_2. \quad (26)$$

Составляя уравнение Лагранжа „второго рода“ и беря первый интеграл аналогично предыдущему, имеем при  $\varphi_H = \sqrt{\frac{2\Delta}{r_{03}B_2}}$ .

$$\omega_H = \omega_{HO} D_2, \tag{27}$$

$$\omega_c = \omega_{HO} D_2 \left( 1 - i_{34}^H - \sqrt{\frac{2\Delta B_2}{r_{03}}} \right), \tag{28}$$

$$\omega_1 = \omega_{HO} D_2 \left( i_{1H}^4 - i_{12}^H \sqrt{\frac{2\Delta B_2}{r_{03}}} \right). \tag{29}$$

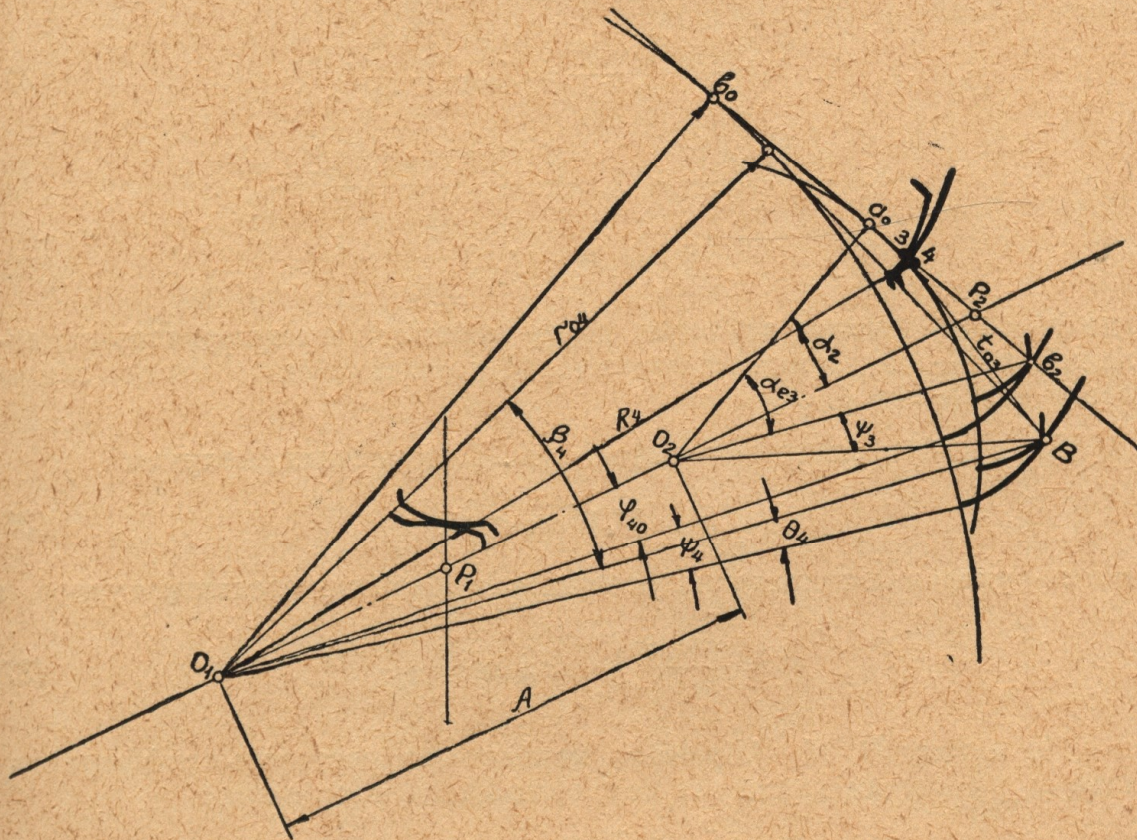


Рис. 2.

В приведенных выражениях

$$D_2 = \sqrt{\frac{1 - \frac{M_1 i_{12}^H}{\omega_{HO}^2 I_{про}} \cdot \frac{2\Delta}{r_{03}}}{1 + 2 \frac{I_c (i_{34}^4 - 1) - I_1 i_{12}^H i_{1H}^4}{I_{про}} \sqrt{\frac{2\Delta B_2}{r_{03}}} + \frac{I_c + I_1 (i_{12}^H)^2}{I_{про}} \cdot \frac{2\Delta B_2}{r_{03}}}}. \tag{30}$$

Скорость срединного удара в зацеплении  $z_3 - z_4$

$$V_c = r_{03} \omega_{HO} D_2 \sqrt{\frac{2\Delta B_2}{r_{03}}} = V_3^H \frac{\cos \alpha_2}{i_{34}^H} D_2 \sqrt{\frac{2\Delta B_2}{r_{03}}}. \tag{31}$$

Расчеты показывают, что для реальных планетарных передач на расчетном режиме величины  $D_1$  и  $D_2$  очень близки к единице. Следо-

вательно, в обычных расчетах можно и в первом и во втором случаях удара принимать равномерное вращение водила при кромочном зацеплении вплоть до удара.

Динамическую нагрузку при срединном ударе для сравнения определим двумя методами: методом А. И. Петрусевича и методом Б. М. Абрамова.

Пусть  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$  — приведенные к точкам ударов удельные массы ведущих и ведомых звеньев, отнесенные к одному сателлиту и определяемые из соотношений (см. рис. 1 и 2):

$$b_1 k \frac{m_1 (R_1 \omega_1)^2}{2} = I_1 \frac{\omega_1^2}{2} \quad (32)$$

$$b_1 k \frac{m_2 (R_2 \omega_c)^2}{2} = I_{nc} \frac{\omega_n^2}{2} + I_c \frac{\omega_c^2}{2} \quad (33)$$

$$b_2 k \frac{m_3 (l_{03} \omega_c)^2}{2} = I_1 \frac{\omega_1^2}{2} + I_{nc} \frac{\omega_n^2}{2} + I_c \frac{\omega_c^2}{2} \quad (34)$$

$$b_2 k m_4 R_4^2 = I_4, \quad (35)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — ширина зубчатых колес внешнего и внутреннего зацеплений, а  $l$  — расстояние от точки удара до мгновенного полюса зацепления (на линии  $A-B$ ).

Следуя буквально методике А. И. Петрусевича, получим

$$u = V_c \sqrt{cm} \leq c\Delta, \quad (36)$$

где  $c$  — удельная приведенная жесткость зубьев при срединном ударе, а

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ или } m = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}. \quad (37)$$

По методу Б. М. Абрамова необходимо составить дифференциальные уравнения движения соударяющихся масс в виде

$$m_{1,3}(\ddot{x}_{2,3} + \ddot{x}_0) = -c(x_{1,3} - x_{2,4}) \quad (38)$$

$$m_{2,4}\ddot{x}_{2,4} = c(x_{1,3} - x_{2,4}). \quad (39)$$

Начальное ускорение  $\ddot{x}_0$  учитывает инерционность массы  $m_{1,3}$ , настигающей массу  $m_{2,4}$ . Величину  $\ddot{x}_0$  можно определить из условия равноускоренного движения массы  $m_{1,3}$  на участке  $\Delta$ , т. е.  $\ddot{x}_0 = \frac{V_c^2}{2\Delta}$ .

Решение дифференциальных уравнений (38) и (39) дает наибольшую силу удара в виде

$$u = \frac{v_c}{2\Delta} \sqrt{m} [V \sqrt{V_c^2 m + 4\Delta^2 c} - V_c \sqrt{m}], \quad (40)$$

откуда и при  $m \rightarrow \infty$  и при  $V_c \rightarrow \infty$  получается  $u_{\max} = c\Delta$ .

Аналогичный вывод скорости удара и силы удара при кромочном зацеплении. При числе зубьев, не кратном числу сателлитов, составляется система уравнений Лагранжа. На рис. 3 при-

ведены графики зависимости силы удара от скорости и масс вычисленные по уравнению (36) и (40) для планетарной *AI*-передачи, у которой  $z_1=30$ ,  $z_2=36$ ,  $z^3=18$ ,  $z_4=84$ ,  $m=2,25$  мм,  $k=3$ ,  $b_1=1$  см,  $b_2=1,5$  см,  $M_1=300$  кгсм,  $\Delta=6 \cdot 10^{-4}$  см. Кривые  $u_1$  соответствуют данным  $J_1=0,015$  кгсмсек<sup>2</sup>,  $J_{нс}=0,2$  кгсмсек<sup>2</sup>,  $J_c=3 \cdot 0,005$  кгсмсек<sup>2</sup>,  $J_4 \rightarrow \infty$ , а кривые  $u_2 - J_1=0,015$  кгсмсек<sup>2</sup>,  $J_{нс}=1$  кгсмсек<sup>2</sup>,  $J_c=$

$=2 \cdot 0,01$  кгсмсек<sup>2</sup>. Там же нанесена зависимость коэффициента влияния масс  $\mu = \frac{u_2}{u_1}$ .

Кривые  $u_3$  соответствуют общепринятому расчету по выражению

$$u_3 = V_{1,3}^H \sqrt{\frac{A\Delta}{i^H}}$$

Действительная динамическая нагрузка на зубья бу-

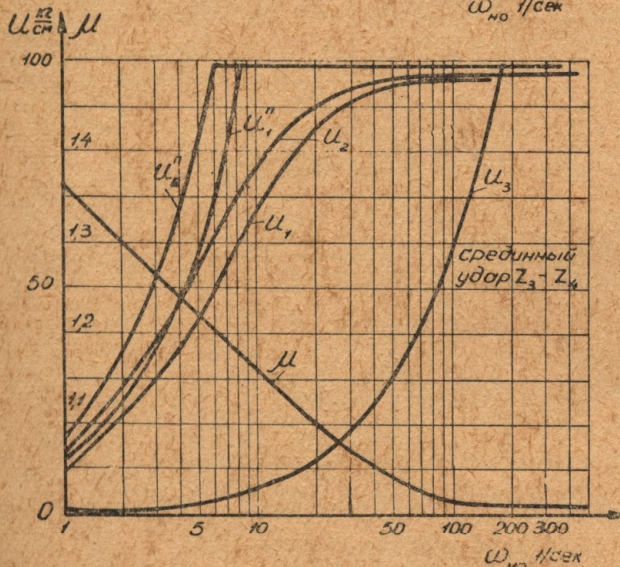
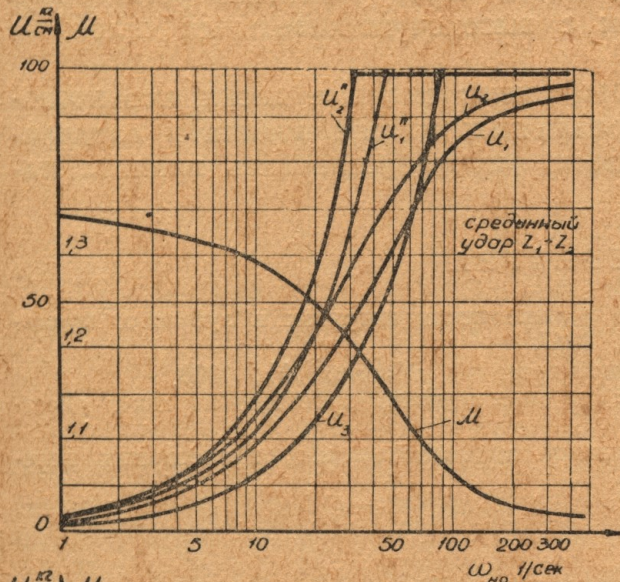


Рис. 3.

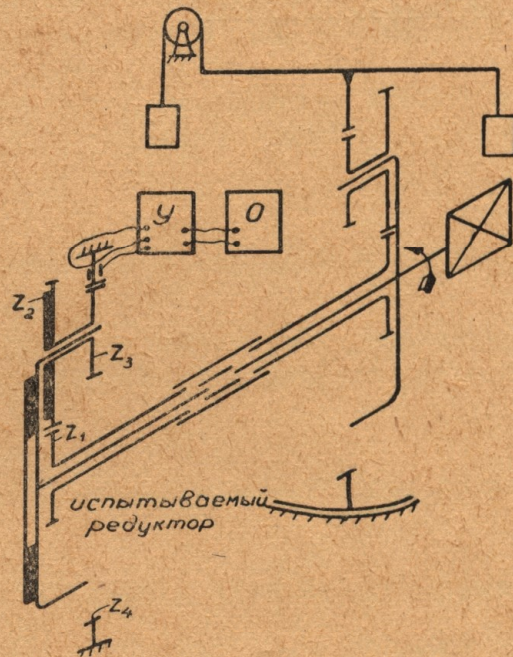


Рис. 4.

дет меньше из-за влияния жесткости неударяющейся пары, жесткой связи присоединенных масс (например, водила к сателлитам) и т. п. Однако коэффициент  $\mu$  сохраняет свое значение.

Для экспериментальной проверки влияния масс водила и сателлитов, а также окружной скорости на коэффициент  $\mu$  и, следовательно, на динамическую нагрузку зубьев нами сконструирована установка по замкнутой схеме (рис. 4) на базе двух редукторов типа *AI* с данными рассмотренного примера. Установка позволяет создать мощность в зацеплениях до 300 квт. При  $n_H=3000$  об/мин окружная скорость в зацеплении  $z_1-z_2$  достигает 58 м/сек. Для повышения жесткости системы и независимости ее от фундамента корпуса редукторов соединены между собой. Венец редуктора — нагрузителя освобожден от корпуса и соединен с двуплечим рычагом для создания момен-

та нагружения  $M_{\text{наг}}$ . Приводится установка во вращение мотором постоянного тока с широким диапазоном регулирования скоростей. Смазка подшипников скольжения и зацеплений производится под давлением от насоса автономным приводом.

На неподвижный венец испытываемого редуктора наклеены с двух торцов зубьев датчики с базой 5 мм, включенные в измерительный мост. Показания диагонали моста через усилитель регистрируются шлейфовым осциллографом с высокочувствительным шлейфом (до 17000 гц).

Водило и сателлиты редуктора имеют сменные диски, что позволяет проводить испытания при различных массах водила и сателлитов. Меняя момент на нагружателе, можно установить влияние нагрузки на силу удара.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Б. М. Определение динамических нагрузок в зубчатых прямо-зубых колесах. Труды ХАДИ, вып. 19, 1957.
2. Кудрявцев В. Н. Планетарные передачи, Машгиз, М., 1960.
3. Петрусевич А. И. Расчет на долговечность зубчатых передач. «Вестник машиностроения», 1942, № 1.
4. Ткаченко В. А. Проектирование многосателлитных планетарных передач, Изд-во ХГУ, 1961.