МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Державний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

О.В. Головченко, Г.І. Кошовий, Л.С.Найда

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчальний посібник

ХАРКІВ "ХАІ" 1999

УДК 512.942

Векторна алгебра та її застосування / О.В. Головченко, Г.І. Кошовий, Л.С. Найда.- Навч. посібник.- Харків: Держ. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 1999. - 58 с.

Розглянуто основні теоретичні питання з курсу векторної алгебри та аналітичної геометрії, передбачені програмою курсу "Вища математика" для технічних вузів з поширеною математичною підготовкою. Наведено велику кількість змістовних геометричних задач, для розв'язання яких використовується апарат векторної алгебри.

У першому розділі викладено основні теоретичні відомості з курсу векторної алгебри: вектори та лінійні операції над ними, теореми про лінійну залежність векторів, базис у просторі та на площині, скалярний, векторний та мішаний добутки.

У другому розділі розглянуто елементи аналітичної геометрії: пряма лінія на площині, пряма та площина у просторі.

Приклади кожного підрозділу, як правило, розташовані за зростанням їх складності.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів. Може бути також корисним для аспірантів.

Іл. 57 . Бібліогр.: 11 назв.

Р е ц е н з е н т и: канд. фіз.-мат. наук, доц. В.О. Дорошенко
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Макаричев

Р О З Д І Л 1

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Скалярні та векторні величини

У математиці, фізиці, механіці та інших прикладних науках розглядаються величини двох категорій: скалярні та векторні.

Скалярною величиною називається така фізична або механічна величина, яка у вибраній одиниці вимірювання характеризується тільки чисельним значенням (числом). Наприклад, маса, об'єм, температура відносяться до скалярних величин. Найпростішим скаляром є абстраговане число.

Векторною величиною називається така величина, яка визначається як своїм чисельним значенням у вибраних одиницях вимірювання, так і напрямком. Наприклад, переміщення точки, сила, швидкість є векторними величинами. Для абстрагованого зображення конкретних векторних величин використовуються вектори.

Вектором називається напрямлений відрізок прямої. Вектор позначається двома великими латинськими літерами зі стрілкою нагорі, де перша літера відноситься до початку вектора, а друга - до його кінця. Наприклад, $\overrightarrow{AB}$ - вектор, в якого A - початок, B - кінець. Вектор позначається також малими латинськими літерами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і т.п.

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{a}$) називається також модулем вектора і позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$) або $|AB|$ (a).

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим і позначається символом $\vec{0}$. Його довжина дорівнює нулю.

Вектори називаються співнапрямленими ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), якщо вони паралельні (колінеарні) і мають однакові напрямки.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Це означення вказує на те, що точка, в якій починаються такі вектори у просторі та на площині, не має ніякого значення. Тому такі вектори називають вільними, або геометричними.

Розглядаються також ковзні та зв'язані вектори. Ковзні вектори - це вектори, які вважаються рівними, якщо мають однакові довжини та напрямки і розташовані на одній прямій.

Зв'язані вектори - це вектори, які вважаються рівними, якщо вони мають не тільки рівні довжини й напрямки, але й спільний початок.

У подальшому розглядатимуться тільки геометричні вектори.

Вектори $\vec a$ і $\vec b$ називаються протилежно напрямленими, якщо $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$ і $|\vec a| = |\vec b|$. Для таких векторів використовується символика $\vec a = -\vec b$.

Рис. 1.1

На рис. 1.1 в паралелограмі ABCD: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$. В рівнобічній трапеції $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$.

1.2. Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами відносяться: додавання, віднімання та множення вектора на число.

Додавання векторів. Нехай точка M підлягає двом послідовним переміщенням: $\vec a = \overrightarrow{AB}$ і $\vec b = \overrightarrow{BC}$. Перше переміщення переводить точку M з початкового положення A (рис. 1.2) у положення B, а друге - з положення B у C. Тоді переміщення $\vec c = \overrightarrow{AC}$ доцільно назвати сумою векторів $\vec a$ і $\vec b$. Таким чином, щоб побудувати вектор $\vec c = \vec a + \vec b$, достатньо від будь-якої точки A простору або площини відкласти вектор $\vec a = \overrightarrow{AB}$,

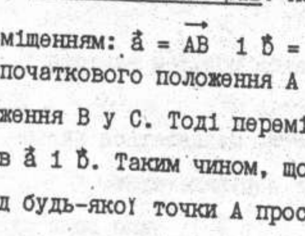


Рис. 1.2

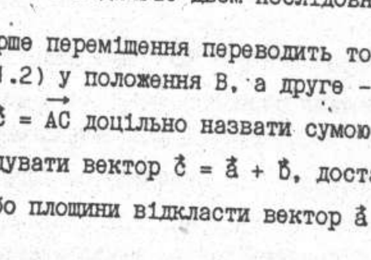


Рис. 1.3

а до його кінця прикласти вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$: Вектор, що з'єднує точки A і C, і буде вектором $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Наведене правило додавання векторів називається правилом трикутника.

На рис. 1.3 показано правило паралелограма для додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Додавання трьох (і більшої кількості) векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується за правилом багатокутника.

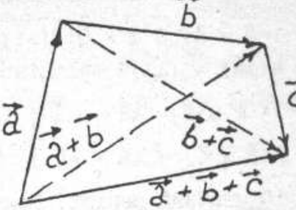


Рис. 1.4

Операція додавання векторів має такі властивості:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність операції додавання) - випливає з рис. 1.3;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативність операції додавання) - випливає з рис. 1.4;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Віднімання векторів. Вектор $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ називається різністю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$. Якщо додати до обох частин цієї рівності вектор ($-\vec{b}$), то одержимо: $\vec{x} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b})$. За властивостями 2 - 4 далі маємо $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Таким чином, щоб відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, достатньо до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-\vec{b})$, напрямок якого протилежний вектору $\vec{b}$.

З цього правила безпосередньо випливає, що доданки у векторних рівностях можна переносити з однієї частини рівності в другу з протилежним знаком. Геометричне правило віднімання векторів наведено на рис. 1.5.

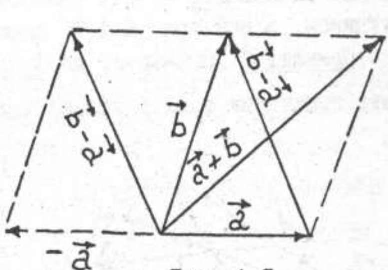


Рис. 1.5

Множення вектора на число. Якщо λ - дійсне число, то добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор, який позначається символом $\lambda\vec{a}$ або $\vec{a}\lambda$ і задовольняє умови:

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$, $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda \ge 0$, і $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Операція множення вектора на число має такі властивості:

1) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$; $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$; $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;

2) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (асоціативність операції множення на число);

3) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
4) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ } (дистрибутивність операції множення на число).

Одиничний вектор. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором, або ортом. Вектор $\vec{a}^0$ називається ортом вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}$ і $|\vec{a}^0| = 1$. Тому для будь-якого вектора $\vec{a}$ маємо $\vec{a} = a\cdot\vec{a}^0$ ($a = |\vec{a}|$). При цьому якщо $\vec{a} \ne \vec{0}$, то $\vec{a}^0 = \vec{a}/a$.

З операції множення вектора на число випливає ознака колінеарності векторів: вектор $\vec{b}$ колінеарен ненульовому вектору $\vec{a}$ тоді і тільки тоді, коли існує число $\alpha \ne 0$ таке, що $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. За умови колінеарності векторів $\vec{a} \ne 0$ і $\vec{b}$ число α знаходиться однозначно: $|\alpha| = |\vec{b}|/|\vec{a}|$. При цьому $\alpha > 0$, якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, і $\alpha < 0$, якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Наведемо приклади деяких задач, в процесі розв'язання яких використовуються лінійні операції над векторами.

Приклад 1. Указати особливість, яку повинні мати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб виконувалась рівність $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання. Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ збігаються з діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.1.5). Довжини діагоналей дорівнюють одна одній, тому цей паралелограм є прямокутником, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

Приклад 2. Показати, що з трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна побудувати трикутник тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

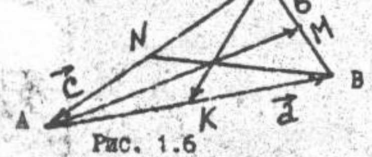


Рис. 1.6

Розв'язання. Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$. Ламана лінія ABCA замкнена тоді і тільки тоді і, як наслідок, утворює трикутник, коли $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (рис.1.6).

Приклад 3. Показати, що вектори, які збігаються з медіанами будь-якого трикутника, в свою чергу, можуть бути сторонами трикутника.

Нехай $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CK}$-медіани трикутника ABC, а сторони цього трикутника збігаються з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (див. рис.1.6). Зобразимо через ці вектори медіани $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \vec{b}/2$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \vec{c}/2$, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + AK = \vec{c} + \vec{a}/2$. Перевіримо, чи виконується умова прикладу 2: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = (\vec{a} + \vec{b}/2)+(\vec{b} + \vec{c}/2)+(\vec{c} + \vec{a}/2) = 3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/2=\dot{0}$.

Отже, умова прикладу 2 виконується, і тому з векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CK}$ дійсно можна утворити трикутник.

Приклад 4. У трикутнику ABC, побудованому на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, проведено бісектрису [AK] внутрішнього кута A. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний бісектрисі.

Розв'язання. Відкладемо від вершини A орти $\vec{a}^\circ = \vec{a}/a$ і $\vec{b}^\circ = \vec{b}/b$ (рис.1.7). Паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}^\circ$ і $\vec{b}^\circ$, є ромбом тому, що $|\vec{a}^\circ| = |\vec{b}^\circ|=1$. За властивостями діагоналей ромба діагональ $\overrightarrow{AM}$ є бісектрисою кута A, тобто $\overrightarrow{AM} \parallel AK$. Тому за вектор $\vec{x}$, що розшукується, можна взяти вектор $\vec{x} = \overrightarrow{AM} = \vec{a}^\circ + \vec{b}^\circ = \vec{a}/a + \vec{b}/b = (b\vec{a} + a\vec{b})/ab$.

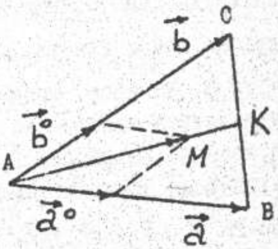


Рис. 1.7

У задачах курсу "Векторна алгебра" використовується поняття радіуса-вектора точки. Нехай в просторі або на площині зафіксовано деяку точку O. Назвемо її полюсом. Тоді між точками M простору (площини) і векторами $\overrightarrow{OM}$ встановлюється взаємно-однозначна відповідність і навпаки. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ називається радіусом-вектором точки M відносно полюса O. За заданим вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точка M знаходиться як кінець вектора $\vec{r}$. Той факт, що M визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, записується у вигляді $M(\vec{r})$.

Приклад 5(задача про ділення відрізка у даному співвідношенні).

Нехай $A(\vec{r}_1)$ і $B(\vec{r}_2)$ - різні точки. Задані ці точки радіусами-векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ відносно полюса O (рис. 1.8). Необхідно знайти радіус-вектор $\vec{r}$ такої точки $M(\vec{r})$ відрізка [AB], що ділить цей відрізок у співвідношенні $\lambda = \left|\frac{AM}{MB}\right| > 0$.

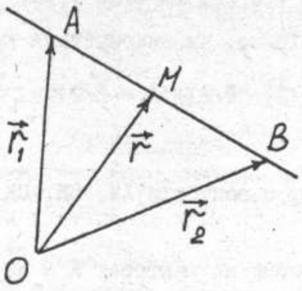


Рис. 1.8

Розв'язання. Визначимо вектори $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$ і $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$. Завдяки тому, що $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$, $\lambda = \left|\frac{AM}{MB}\right|$, за ознакою колінеарності векторів дістанемо: $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, або $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$. Розв'язавши дану векторну рівність відносно $\vec{r}$, знайдемо

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}.$$

Формула, одержана вище, називається формулою ділення відрізка у даному співвідношенні. Якщо $\lambda = 1$, точка $M(\vec{r})$ визначається посередині відрізка [AB]. Для такої точки $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$.

Приклад 6. Довести, що якщо діагоналі чотирикутника в точці їх перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник - паралелограм.

Розв'язання. Нехай $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ - радіуси-вектори чотирьох послідовних вершин чотирикутника ABCD. Середина діагоналі AC має радіус-вектор $\vec{r}\,' = (\vec{r}_1 + \vec{r}_3)/2$, а середина діагоналі BD - радіус-вектор $\vec{r}\,'' = (\vec{r}_2 + \vec{r}_4)/2$. За умовою діагоналі в точці перетину діляться навпіл, і тому точки $\vec{r}\,'$ і $\vec{r}\,''$ збігаються, тобто $(\vec{r}_1 + \vec{r}_3)/2 = (\vec{r}_2 + \vec{r}_4)/2$, або $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_3 - \vec{r}_4$. Таким чином, доведено, що протилежні сторони чотирикутника $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ і $\overrightarrow{DC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_4$ є рівними і паралельними, ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$), тобто ABCD - паралелограм.

Приклад 7. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з медіан у співвідношенні 2:1. Вважати, що точкою відліку є вершина.

Розв'язання. Нехай у Δ ABC точки M і K – середини сторін [AB] і [BC], Q - точка перетину медіан [AK] і [CM] (рис. 1 9). Позначимо

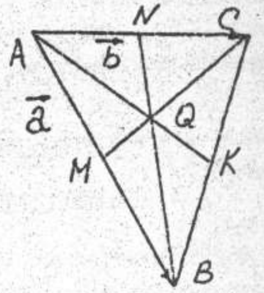


Рис. 1.9

$\lambda = \left|\frac{AQ}{QK}\right|$, $\mu = \left|\frac{CQ}{QM}\right|$, $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ і доведемо, що $\lambda=\mu=2$. За формулою ділення відрізка $[CM]$ точкою Q у співвідношенні μ маємо $\vec{Q} = \dfrac{\vec{b} + \mu\vec{a}}{1 + \mu}$. Тоді $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AQ}/\lambda$ (тому, що $|\overrightarrow{QK}|=|\overrightarrow{AQ}|/\lambda$), або $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \dfrac{\vec{b} + \mu\vec{a}}{1 + \mu}$. Точка K - середина відрізка $[BC]$, і тому $\overrightarrow{AK} = (\vec{b} + 2\vec{a})/2$. Порівняння виразів для вектора $\overrightarrow{AK}$ дає $\dfrac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \dfrac{\vec{b} + \mu\vec{a}}{1 + \mu} = \dfrac{\vec{b} + 2\vec{a}}{2}$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, і тому, якщо прирівняти коефіцієнти при цих векторах, дістанемо

$$\frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \mu} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu} = 1.$$

Ділення лівих і правих частин цих рівностей дає $\mu = 2$. Тому $\dfrac{\lambda + 1}{\lambda} = \dfrac{3}{2}$ і $\lambda = 2$. Таким чином, доведено, що точка Q, розташована на медіані $[CM]$ і така, що ділить її у співвідношенні 2:1, лежить також на медіані $[AK]$ і ділить її у тому ж самому співвідношенні. Аналогічно доводиться, що точка Q медіани $[CM]$ лежить на медіані $[BN]$ і ділить її у співвідношенні 2:1. Точка відліку знаходиться у вершині. Таким чином, всі три медіани трикутника ABC перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у співвідношенні 2:1.

Приклад 8 (векторно-параметричне рівняння прямої). Нехай у просторі або на площині введено полюс O, L - пряма лінія, яка проходить через задану точку $M_0(\vec{r}_0)$, $\vec{s}$ - заданий вектор, паралельний прямій L (рис. 1.10). Знайти радіус-вектор $\vec{r}$ довільної точки $M(\vec{r}) \in L$.

Рис. 1.10

Розв'язання. Точка $M(\vec{r})$ належить прямій L тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ колінеарний вектору $\vec{s}$. За ознакою колінеарності векторів існує число t, значення якого залежить від положення точки M на прямій L, і таке, що $\vec{r}-\vec{r}_0 =$

$= t\vec{s}$, або $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$. У цій рівності t - довільне дійсне число (параметр), $\vec{r}_0$ - радіус-вектор початкової точки $M_0(\vec{r}_0)$ прямої L, $\vec{s}$ - напрямний вектор прямої L. Сама рівність

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$$

називається векторно-параметричним рівнянням прямої лінії.

1.3. Лінійна залежність і незалежність системи векторів

Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ - деяка система векторів, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - дійсні числа. Вектор $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Означення. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо векторна рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{1.1}$$

виконується за умови, що хоча б один з коефіцієнтів $\alpha_i \neq 0$, де $i=\overline{1,n}$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0$).

Припустимо, що $\alpha_n \neq 0$. За властивостями лінійних операцій над векторами рівність (1.1) можна записати у вигляді

$$\vec{a}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\vec{a}_{n-1} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \ldots + \beta_n\vec{a}_{n-1}.$$

Внаслідок цього має місце інше означення лінійної залежності векторів, рівносильне першому.

Означення. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших.

Означення. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо векторна рівність (1.1) виконується тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти $\alpha_i = 0$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0$).

Теорема 1. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Необхідність. Нехай $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні. Тоді $\vec{b} \parallel \alpha\vec{a}$, звідки $\vec{b} \parallel \vec{a}$.

Достатність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то з рівності $1 \cdot \vec{0} +$

$+ 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$ одержуємо лінійну залежність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, то за ознакою колінеарності існує число α таке, що $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ і лінійна залежність має місце.

Теорема 2. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні (паралельні одній площині).

Необхідність. Нехай, наприклад, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, вони паралельні деякій прямій L, і цій прямій паралельні вектори $\alpha\vec{a}$ і $\beta\vec{b}$, а також вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ паралельні будь-якій площині, до якої належить пряма L.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, відкладемо їх від деякої точки O (рис.1.11). Позначимо через P площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Від точки O відкладемо також вектори $\alpha\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ і $\beta\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Тоді вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + OB = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ належатиме площині P, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні.

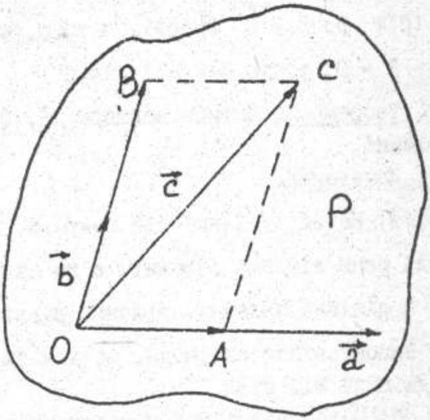


Рис. 1.11

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні. Якщо віднести їх до спільного початку O, то вони будуть розташовані в одній площині P (див. рис. 1.11). Припустимо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ парами не колінеарні. Проведемо через точку C пряму L паралельно вектору $\vec{b}$. За припущенням вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, тому пряма L перетинатиме вектор $\vec{a}$ в точці A. Тоді вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. За означенням, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні.

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то ці вектори лінійно залежні, тобто $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, або $\vec{b} = \alpha\vec{a} + 0\vec{c}$, що й підкреслює лінійну залежність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1.4. Базис на площині. Розкладання вектора за базисом

Означення. Впорядкована пара неколінеарних векторів $(\vec{a}, \vec{b})$, паралельних площині P, називається базисом у площині P.

Будь-який вектор $\vec{c}$, компланарний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{c} \parallel P$), може бути записаний у вигляді $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Числа α і β називаються координатами вектора $\vec{c}$ в базисі $(\vec{a}, \vec{b})$, а рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ - розкладанням вектора $\vec{c}$ за базисом $(\vec{a}, \vec{b})$. Те, що числа α і β є координатами вектора $\vec{c}$ в базисі $(\vec{a}, \vec{b})$, записують так: $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

Доведемо, що розкладання вектора $\vec{c}$ за базисом $(\vec{a}, \vec{b})$ єдине. Нехай $\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$ є деяким новим розкладанням вектора $\vec{c}$ за базисом $(\vec{a}, \vec{b})$. Тоді з рівності $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$ маємо $(\alpha' - \alpha)\vec{a} + (\beta' - \beta)\vec{b} = \vec{0}$. Внаслідок того, що $(\vec{a}, \vec{b})$ - базис, $\alpha' - \alpha = 0$ і $\beta' - \beta = 0$, тобто $\alpha' = \alpha$ і $\beta' = \beta$.

Теорема 3. Чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ і більше завжди лінійно залежні.

Доведення.

а) Нехай будь-які три вектори, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$,- компланарні. Тоді вони лінійно залежні, а це означає, що й чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ лінійно залежні. Дійсно, рівність $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + 0\vec{d} = \vec{0}$ повинна виконуватися за умови, що хоч би один з коефіцієнтів α, β, γ відмінний від нуля.

б) Нехай ніякі три з чотирьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ не є компланарними, наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Відкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ від деякої точки O: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ і $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони визначають площину (OAB), яку позначимо як P (рис. 1.12). Проведемо через точку D пряму L паралельно вектору $\overrightarrow{OC}$. У зв'язку з тим, що вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ не паралельний площині P, пряма L

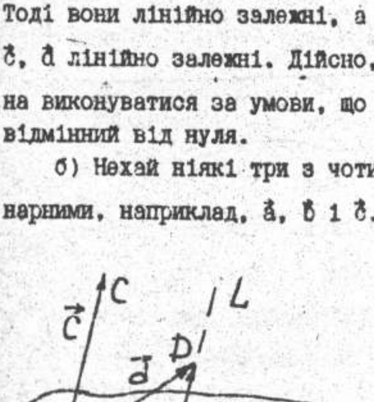


Рис. 1.12

перетинає площину P у деякій точці E. Вектори $\overrightarrow{ED}$ і $\overrightarrow{OC}$ колінеарні, і тому існує таке число γ, що $\overrightarrow{ED} = \gamma\vec{c}$. Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$ компланарні, крім того, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$- базис в площині P. Це означає, що $\overrightarrow{OE} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. З трикутника OED визначимо $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$, або $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

За означенням лінійної залежності, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ лінійно залежні.

1.5. Базис у просторі. Розкладання вектора за базисом

Базисом у просторі називається будь-яка впорядкована трійка некомпланарних (лінійно незалежних) векторів.

Якщо $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - базис, то будь-який вектор $\vec{d}$ простору можна розкласти за цим базисом єдиним чином за формулою

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Коефіцієнти α, β, γ називаються координатами вектора $\vec{d}$ в базисі $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Те що α, β, γ - координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, записують у вигляді $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Єдиність розкладання вектора $\vec{d}$ за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ доводиться так само, як і єдиність розкладання вектора $\vec{c}$ за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ (теорема 2): якщо $\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}$, то з некомпланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ маємо, що $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Наведемо властивості координат вектора. Нехай $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - базис, $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ і $\vec{e} = (\alpha', \beta', \gamma')$ - довільні вектори, λ - дійсне число.

1. Якщо $\vec{d} = \vec{e}$, то $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ і навпаки, тобто два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх однойменні координати.

2. $\vec{d} + \vec{e} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$, тобто координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат цих векторів.

3. $\lambda\vec{d} = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$, тобто якщо помножити вектор на число, й координати множаться на це число.

Для доведення наведених властивостей використовуються властивості лінійних операцій над векторами.

Зауважимо, що властивості 2 і 3 є окремими випадками такої властивості лінійності координат: для будь-яких m і n $m\vec{d} + n\vec{e} = (m\alpha + n\alpha', m\beta + n\beta', m\gamma + n\gamma')$. Дійсно: $m\vec{d} + n\vec{e} = m(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) + n(\alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}) = (m\alpha + n\alpha)\vec{a} + (m\beta + n\beta')\vec{b} + (m\gamma + n\gamma')\vec{c} = (m\alpha + n\alpha', m\beta + n\beta', m\gamma + n\gamma')$.

Приклад 9 (умова колінеарності векторів). Нехай $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис простору. Вектори $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ - колінеарні. Довести, що

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} . \qquad (1.2)$$

Розв'язання. З колінеарності векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ маємо, що $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, тобто $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \lambda(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$. За властивостями 1 і 3 одержуємо $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $x_3 = \lambda y_3$ і, як наслідок, рівності (1.2).

Приклад 10 (умова компланарності векторів). Нехай $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис простору. Довести, що вектори $x = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \vec{x}_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$, $\vec{z} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3$ компланарні тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.3)$$

Розв'язання. З теореми 2 маємо, що вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні, тобто векторна рівність

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \qquad (1.4)$$

виконується за умови, що коефіцієнти α, β, γ одночасно не дорівнюють нулю.

Запишемо векторну рівність (1.4) у вигляді

$$\alpha(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) + \beta(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) + \gamma(z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3) = \vec{0},$$

або

$$(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)\vec{e}_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)\vec{e}_2 + (\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

З останньої рівності, тому що $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис, дістанемо

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = 0 , \quad \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0, \quad \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 0.$$

Однорідна система відносно α, β, γ має нетривіальні розв'язки, якщо визначник цієї системи дорівнює 0, тобто у випадку, коли виконується рівність (1.3).

Приклад 11. У базисі ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) задано вектори $\vec{m} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{n} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{p} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Довести, що ($\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$) - теж базис у просторі. Знайти розкладання вектора $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ за базисом ($\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$).

Розв'язання. За базис у просторі може бути вибрана трійка некомпланарних векторів. Перевіримо умову (1.3) компланарності векторів $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, тобто обчислимо визначник, що складається з координат цих векторів:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Внаслідок цього ($\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$) - базис простору, відносно якого запишемо розкладання вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{p}$, або $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \alpha(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \gamma(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$. Якщо прирівняти однойменні координати, одержимо систему

$$\alpha + \gamma = 1, \quad \alpha + \beta = 2, \quad \beta + \gamma = -1.$$

Розв'язок цієї системи - $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, а тому $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$.

1.6. Проекція вектора на вісь

Віссю називається пряма, на якій вибрані додатний напрямок і одиниця довжини. Вісь визначається ортом. Позначимо за L деяку вісь.

Проекцією точки M на вісь L називається основа перпендикуляра, проведеного з даної точки M на вісь L.

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь L називається довжина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, розташованого між проекціями початку і кінця вектора $\overrightarrow{AB}$. Ця довжина береться зі знаком "плюс", якщо вектор $\overrightarrow{A'B'}$ має напрямок орта осі, і зі знаком "мінус", якщо вектор

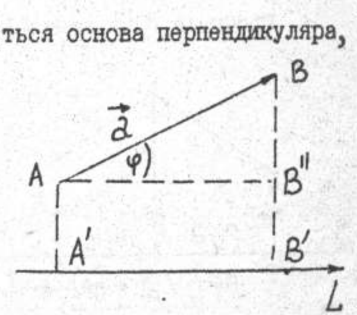


Рис. 1.13

$\overrightarrow{A'B'}$ і орт осі мають протилежні напрямки (рис. 1.13).

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь L позначають символом пр$_L$ $\vec{a}$. Проекція - скалярна величина. З прямокутного трикутника ABB'' випливає, що

$$пр_L\vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a},L}) = |\vec{a}| \cos \varphi. \qquad (1.5)$$

Знак пр$_L\vec{a}$ регулюється знаком cos φ, а саме: якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, то пр$_L\vec{a} \ge 0$; якщо ж $\pi/2 < \varphi \le \pi$, то пр$_L\vec{a} < 0$ (1.5).

Розглянемо основні властивості проекції.

1. При паралельному перенесенні вектора $\vec{a}$ його проекція не змінюється.

2. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь L дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \perp L$.

3. Скалярний множник можна винести за знак проекції, тобто

$$пр_L(\lambda\vec{a}) = \lambda\, пр_L\vec{a}. \qquad (1.6)$$

Дійсно: $пр_L(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, L}) = |\lambda||\vec{a}| \cos(\widehat{\lambda\vec{a}, L})$;

якщо $\lambda > 0$, то $|\lambda| = \lambda$, $\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, L}) = \cos(\widehat{\vec{a}, L})$ і $пр_L(\lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, L}) = \lambda\, пр_L\vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то $|\lambda| = -\lambda$, $\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, L}) = -\cos(\widehat{\vec{a}, L})$ і $пр_L(\lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, L}) = \lambda\, пр_L\vec{a}$.

4. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій цих векторів.

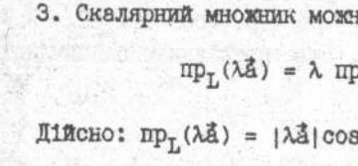


Рис. 1.14

Доведення для проекції суми двох векторів проілюстровано на рис. 1.14. Таким чином, $пр_L(\vec{a}+\vec{b}) = пр_L\vec{a} + пр_L\vec{b}$. У випадку, коли за осі проекції вибрано вектор $\vec{b}$ ($\vec{a}$), маємо

$$пр_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \qquad (1.7)$$

$$\left[пр_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\right].$$

1.7. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин (модулів) цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток позначається одним із символів $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, або $(\vec{a},\vec{b})$. Таким чином,

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{1.8}$$

Якщо один з множників - нульовий вектор, то за означенням приймаємо $\vec{a}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{b} = 0$.

З формули (1.8) для ненульових векторів дістанемо

$$\cos (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{1.9}$$

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називається скалярним квадратом вектора $\vec{a}$, позначається $\vec{a}^{\,2}$ і дорівнює $|\vec{a}|^2$. Отже, довжина вектора $\vec{a}$ визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}. \tag{1.10}$$

За формулами (1.7) скалярний добуток (1.8) можна записати через проекцію одного з множників на другий:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \text{ пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{ пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

З останніх формул одержуємо важливі залежності для обчислення проекцій

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \text{і} \quad \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Властивості скалярного добутку такі:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність);

2) $(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$, тобто скалярний множник можна винести за знак скалярного добутку;

3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c}) + (\vec{b}\cdot\vec{c})$ (дистрибутивність).

Доведення властивості 1 випливає із означення скалярного добутку (1.8) і того, що $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{a}})$.

Для доведення властивості 2 скористаємося формулою (1.6):

$$пр_{\vec b}(\lambda\vec a) = \lambda\ пр_{\vec b}\vec a.$$

Помножимо кожну з частин цієї рівності на $|\vec b| = b$. Будемо мати

$$b\ пр_{\vec b}(\lambda\vec a) = \lambda\ b\ пр_{\vec b}\vec a.$$

Звідси за формулою (1.11) дістанемо $(\lambda\vec a\cdot\vec b) = \lambda(\vec a\cdot\vec b)$.

Властивість 3 доводиться так само: з рівності $пр_{\vec c}(\vec a + \vec b) = пр_{\vec c}\vec a + пр_{\vec c}\vec b$ маємо $c\,пр_{\vec c}(\vec a + \vec b) = c\,пр_{\vec c}\vec a + c\,пр_{\vec c}\vec b$. Тому $(\vec a + \vec b)\vec c = (\vec a\cdot\vec c) + (\vec b\cdot\vec c)$.

Приклад 12 (теорема косинусів). Припустимо, що трикутник ABC побудовано на векторах $\vec a$, $\vec b$, $\vec c = \vec a - \vec b$ і $\varphi = (\vec a\cdot\vec b)$ (рис. 1.15). Довести теорему косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

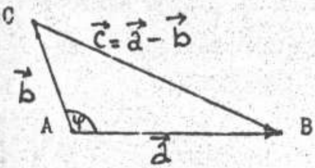


Рис. 1.15

Розв'язання. З формули (1.10) і властивостей скалярного добутку маємо

$$c^2 = \vec c^2 = (\vec a - \vec b)^2 = \vec a^2 + \vec b^2 - 2\vec a\vec b = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = \pi/2$, з теореми косинусів одержуємо теорему Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

Приклад 13. Довести, що сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин всіх його сторін.

Рис. 1.16

Розв'язання. Якщо $\vec a = \overrightarrow{AB}$, $\vec b = \overrightarrow{AD}$ - вектори сторін паралелограма, то $\vec a + \vec b = \overrightarrow{AC}$ і $\vec a - \vec b = \overrightarrow{DB}$ (рис. 1.16). Тоді

$$(\vec a + \vec b)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec a\cdot\vec b,$$

$$(\vec a - \vec b)^2 = a^2 + b^2 - 2\vec a\cdot\vec b.$$

Якщо додати почленно ці рівності, матимемо $(\vec a + \vec b)^2 + (\vec a - \vec b)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Оскільки $|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\vec a + \vec b)^2$, $|\overrightarrow{DB}|^2 = \overrightarrow{DB}^2 = (\vec a - \vec b)^2$, то $|AC|^2 + |DB|^2 = 2|AB|^2 + 2|AD|^2$.

Приклад 14. Перевірити, що в трикутнику висоти перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Проведемо висоти [AM] і [CK] та позначимо через O точку їх перетину (рис.1.17). Покажемо, що $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, тобто $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{AC}$. Для цього позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$,

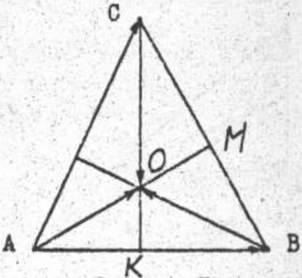


Рис. 1.17

$\overrightarrow{BO} = \vec{x}$. Тоді $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{x}$, $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{x} - \vec{b}$. Завдяки тому, що $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AB}$, маємо $(\vec{a} + \vec{x} - \vec{b})\vec{a} = 0$, або $a^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{x}\vec{a} = 0$. Аналогічно з умови $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$ дістанемо $(\vec{a} + \vec{x})(\vec{b} - \vec{a}) = 0$, або $\vec{a}\vec{b} - a^2 - \vec{x}\vec{a} + \vec{x}\vec{b} = 0$. Із системи

$$\begin{cases} a^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{x}\vec{a} = 0, \\ \vec{a}\vec{b} - a^2 - \vec{x}\vec{a} + \vec{x}\vec{b} = 0 \end{cases}$$

знаходимо $\vec{x}\vec{b} = 0$, тобто $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{AC}$.

Приклад 15. На векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудовано трикутник ABC (рис. 1.18). Розкласти за цими векторами вектор $\vec{c}$, який збігається з висотою цього трикутника, проведеною до сторони $\vec{a}$.

Розв'язання. Таке розкладання можливе тому, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, тобто лінійно залежні. Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{CK}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AB}$ колінеарні, тобто існує число λ таке, що $\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{a}$. З трикутника ACK $\vec{c} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a} - \vec{b}$. За

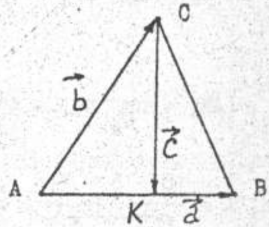


Рис. 1.18

умовою $\vec{c} \perp \vec{a}$, і тому $(\lambda\vec{a} - \vec{b})\vec{a} = 0$ і $\lambda a^2 - \vec{a}\vec{b} = 0$. З останньої рівності знаходимо $\lambda = \vec{a}\vec{b} / a^2$, і тому $\vec{c} = \lambda\vec{a} - \vec{b} = (\vec{a}\vec{b}/a^2)\vec{a} - \vec{b}$.

Приклад 16. У рівнобедреному прямокутному трикутнику проведено медіани з вершин гострих кутів. Обчислити кут між ними.

Розв'язання. Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{CK}$ – медіани, $\varphi = (\overrightarrow{MB}, \widehat{\ }\ \overrightarrow{CK})$ – гострий кут між медіанами (рис. 1.19). Визначимо

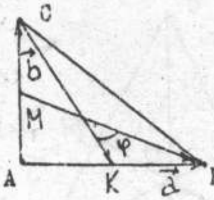


Рис. 1.19

$\overrightarrow{MB} = \vec{a} - \vec{b}/2$, $\overrightarrow{CK} = \vec{a}/2 - \vec{b}$. Тоді

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{MB} \,\widehat{,}\, \overrightarrow{CK}) = \frac{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CK})}{|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{CK}|} =$$

$$= \frac{(\vec{a} - \vec{b}/2)(\vec{a}/2 - \vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}/2||\vec{a}/2 - \vec{b}|} =$$

$$= \frac{a^2/2 - \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b}/4 + b^2/2}{\sqrt{a^2 - \vec{a}\vec{b} + b^2/4}\,\sqrt{a^2/4 - \vec{a}\vec{b} + b^2}} = \frac{a^2}{5a^2/4} = \frac{4}{5}\text{, тому що } \vec{a} \perp \vec{b},$$

тобто $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Звідси $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, $\varphi = \arccos\frac{4}{5}$.

Приклад 17. На векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, де $m = 2$, $n = 1$, $(\vec{m} \,\widehat{,}\, \vec{n}) = \pi/3$, побудовано трикутник. Знайти довжину висоти цього трикутника, проведеної до сторони $\vec{a}$.

Розв'язання. Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CK}$ - висота трикутника ABC (див. рис. 1.18). За теоремою Піфагора $|CK| = \sqrt{|AC|^2 - |AK|^2}$.

Обчислимо: $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{b}| = |2\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(2\vec{m} - \vec{n})^2} = \sqrt{(2\vec{m} - \vec{n})^2} =$

$$= \sqrt{4m^2 - 4\vec{m}\vec{n} + n^2} = \sqrt{4\cdot4 - 4\cdot2\cdot1\cdot\cos(\pi/3) + 1} = \sqrt{13};$$

$$|AK| = |\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}\,| = \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{|(\vec{m} - 2\vec{n})(2\vec{m} - \vec{n})|}{\sqrt{(\vec{m} - 2\vec{n})^2}} = \frac{|2m^2 - 5\vec{m}\vec{n} + 2n^2|}{\sqrt{m^2 - 4\vec{m}\vec{n} + 4n^2}} =$$

$$= \frac{|8 - 5 + 2|}{\sqrt{4 - 4 + 4}} = \frac{5}{2}\text{. Тоді } |CK| = \sqrt{13 - 25/4} = 3\sqrt{3}/2.$$

1.8. Ортонормований базис. Декартова прямокутна система координат. Декартові координати точки і вектора в просторі

Базис простору називається ортонормованим (декартовим), якщо він складається з упорядкованої трійки одиничних парами ортогональних векторів. Вектори такого базису прийнято позначати $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вони задовольняють умови $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$.

Базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ називається правим, якщо з кінця вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот вектора $\vec{i}$ до збігу з вектором $\vec{j}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки. У протилежному випадку базис - лівий. У подальшому за основу прийнято правий базис.

Декартова прямокутна система координат Oxyz в просторі визначається вибором початку координат (точки O) і базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називаються відповідно ортами координатних осей Ox (вісь абсцис), Oy (вісь ординат) і Oz (вісь аплікат)(рис. 1.20). Площина, яка визначається осями Ox і Oy, називається координатною площиною xOy. Аналогічно визначаються координатні площини xOz і yoz. Нехай M - довільна точка простору, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ - її радіус-вектор, розкладання якого в базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ має вигляд $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

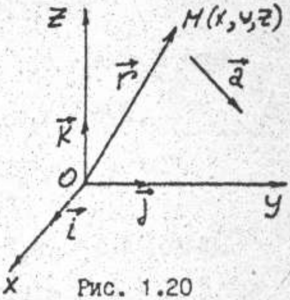


Рис. 1.20

Числа x, y, z називаються декартовими координатами вектора $\vec{r}$. Декартовими координатами точки M називаються координати її радіуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Це записують у вигляді M(x, y, z).

Розкладання довільного вектора $\vec{a}$ за базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ запишемо у вигляді $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ або $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, де a_x, a_y, a_z - декартові координати вектора $\vec{a}$.

Зокрема, для базисних векторів маємо: $\vec{i}=(1, 0, 0)$, $\vec{j}=(0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Розглянемо геометричне тлумачення координат вектора $\vec{a}$. Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{i} = (\vec{a}_x i + \vec{a}_y j + \vec{a}_z k)\cdot\vec{i} = a_x\vec{i}^2 + a_x(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_z(\vec{i}\cdot\vec{k}) = a_x$, а з іншого боку - $\vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\,\text{пр}_x\vec{a} = \text{пр}_x\vec{a}$, то $a_x = \text{пр}_x\vec{a}$.

Таким чином, a_x- проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ox. Аналогічно можна довести, що $a_y = \text{пр}_y\vec{a}$, $a_z = \text{пр}_z\vec{a}$.

Важливим випадком є розкладання одиничного вектора $\vec{e}$ за базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{e} = e_x\vec{i} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k}$.

За формулою (1.5) $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$ маємо:

$e_x = |\vec{e}|\cos(\vec{e}\,\hat{,}\,x) = \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,x)$, $e_y = \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,y)$, $e_z = \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,z)$.

Отже, розкладання одиничного вектора в ортонормованому базисі має вигляд

$$\vec{e} = \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,x)\vec{i} + \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,y)\vec{j} + \cos(\vec{e}\,\hat{,}\,z)\vec{k}. \qquad (1.11)$$

1.9. Скалярний добуток в декартових координатах. Застосування скалярного добутку

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \qquad (1.12)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (1.13)$$

Дійсно, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x \vec{i}^2 + a_y b_y \vec{j}^2 + a_z b_z \vec{k}^2 + (a_x b_y + a_y b_x)(\vec{i}\cdot\vec{j}) + (a_x b_z + a_z b_x)(\vec{i}\cdot\vec{k}) + (a_y b_z + a_z b_y)\cdot(\vec{j}\cdot\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

З формул (1.10) і (1.13) знаходимо

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Умови колінеарності й ортогональності двох векторів. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), то з результатів, одержаних в прикладі 9, маємо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\,.$$

Умову ортогональності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b}$) можна дістати з умови $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ і формули (1.12):

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Напрямні косинуси вектора. Нехай $\vec{a}$ - ненульовий вектор, $\vec{a}^0 = \vec{a}/|\vec{a}|$ - орт вектора $\vec{a}$. З виразу (1.11) і умови $\vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}$ одержимо

$$\vec{a}^0 = \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,x)\vec{i} + \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,y)\vec{j} + \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,z)\vec{k},$$

де $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,x) = a_x/a$, $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,y) = a_y/a$, $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,z) = a_z/a$ -

напрямні косинуси вектора $\vec{a}$. З формули (1.13) і умови $|\vec{a}^0| = 1$ маємо

$$\cos^2(\vec{a} \hat{,} x) + \cos^2(\vec{a} \hat{,} y) + \cos^2(\vec{a} \hat{,} z) = 1. \tag{1.14}$$

Вектор, який з'єднує дві точки. Нехай $A(\vec{r}_1)=A(x_1,y_1,z_1)$, $B(\vec{r}_2)=B(x_2,y_2,z_2)$ - - точки, задані своїми декартовими координатами (рис. 1.21). За властивостями лінійності координат $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$. Позначимо через $\rho(A,B)$ відстань між точками A і B. Тоді

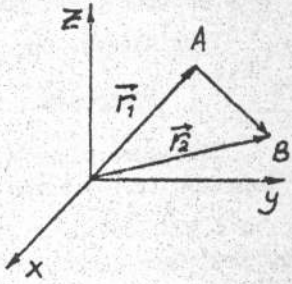


Рис. 1.21

$$\rho(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ділення відрізка у даному співвідношенні. Нехай точки $A(\vec{r}_1) = A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(r_2)=B(x_2,y_2,z_2)$ задають відрізок [AB], а точка $M(\vec{r})=M(x,y,z)$ ділить цей відрізок у співвідношенні $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$. Необхідно визначити координати точки $M(x,y,z)$ (рис. 1.22). Скористаємося векторною рівністю з прикладу 5

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}.$$

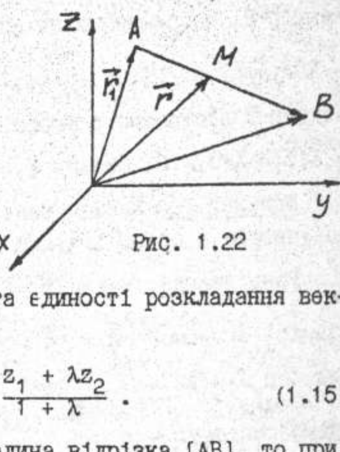


Рис. 1.22

За властивостями лінійності координат та єдиності розкладання вектора за базисом маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{1.15}$$

Зокрема, якщо точка $M(x,y,z)$ - середина відрізка [AB], то при $\lambda = 1$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Зауваження 1. $\lambda > 0$, якщо M - внутрішня точка відрізка [AB], і

$\lambda < 0$ ($\lambda \neq -1$), якщо M знаходиться за межами відрізка [AB].

Зауваження 2. У подальшому, якщо на це не звертається увага, припускається, що вектори задаються в ортонормованому базисі { $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$}.

Приклад 18. Знайти проекцію вектора $\vec{a}(1,-2,4)$ на вісь L, орт $\vec{L}^0$ якої утворює рівні гострі кути з осями координат.

Розв'язання. Орт $\vec{L}^0$ визначимо за формулою (1.11):

$$\vec{L}^0 = \cos(\vec{L}^0\hat{,}\ x)\vec{i} + \cos(\vec{L}^0\hat{,}\ y)\vec{j} + \cos(\vec{L}^0\hat{,}\ z)\vec{k}.$$

Позначимо рівні кути $(\vec{L}^0\hat{,}\ x) = (\vec{L}^0\hat{,}\ y) = (\vec{L}^0\hat{,}\ z) = \alpha$. Тоді за формулою (1.14) маємо $3/\cos^2\alpha = 1$, звідки, з урахуванням умови $0 < \alpha < 90^0$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. Таким чином, $\vec{L}^0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ і, внаслідок цього, за формулою (1.10)

$$\text{пр}_{L}\,\vec{a} = \text{пр}_{\vec{L}^0}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{L}^0}{|\vec{L}^0|} = (1-2+4)/\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Приклад 19. Знайти вектор $\vec{x}$, що має напрямок бісектриси кута між векторами $\vec{a}(-2,1,2)$ і $\vec{b}(1,2,-2)$, якщо $|\vec{x}| = \sqrt{10}$.

Розв'язання. Скористаємося результатом прикладу 4 і визначимо вектор $\vec{c}$, напрямлений за бісектрисою кута $(\vec{a}\hat{,}\ \vec{b})$: $\vec{c} = \vec{a}^0 + \vec{b}^0 = \vec{a}/|\vec{a}| + \vec{b}/|\vec{b}| = \frac{1}{3}(-2,1,2) + \frac{1}{3}(1,2,-2) = \frac{1}{3}(-1,3,0)$. Шуканий вектор $\vec{x}$ дістанемо з умови $\vec{x} \parallel \vec{c}$: $\vec{x} = \lambda\vec{c}$, $\lambda > 0$. За умовою $|\vec{x}| = \lambda|\vec{c}| = \lambda\sqrt{3}/10$, звідки $\lambda = 3$. Отже, $\vec{x} = (-1,3,0)$.

Приклад 20. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a} = (1,-2,2)$, що утворює з ортом $\vec{i}$ тупий кут і має довжину $|\vec{x}| = 9$.

Розв'язання. Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. З умови колінеарності векторів $\vec{x}$ і $\vec{a}$ маємо $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{2}$. У зв'язку з тим, що кут $(\vec{x}\hat{,}\vec{i})$ – тупий, $\text{пр}_{L}\vec{a} = x_1 < 0$, і тому для визначення координат вектора $\vec{x}$ одержуємо систему:

$$x_1 = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{2}; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9; \quad x_1 < 0.$$

Якщо підставити у друге рівняння $x_2 = -2x_1$, $x_3 = 2x_2$, дістанемо $x_1^2 = 1$, $x_1 < 0$, тобто $x_1 = -1$; тому $\vec{x} = (-1,2,-2)$.

Приклад 21. У трикутнику з вершинами у точках A(1,-1,1), B(2,1,3), C(0,-1,1) визначити: 1)величину кута A; 2)довжину медіани [AM]; 3)довжину бісектриси [AN]; 4)довжину вектора [AK](рис. 1.23).

Розв'язання: 1. Кут A - це кут між векторами $\overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ і $\overrightarrow{AC} = (-1,0,0)$, тому $\cos(\angle A) = \cos(\overrightarrow{AB} \hat{,} \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})/ /(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|) = -\frac{1}{3}$.

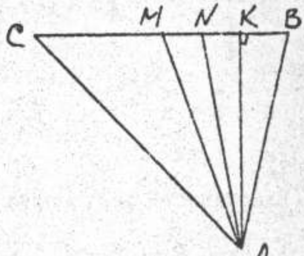


Рис. 1.23

2. Вектор $\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/2 = ((1,2,2)+ + (-1,0,0))/2 = (0,1,1)$, тобто $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{2}$.

3. Знайдемо координати точки N, яка ділить відрізок [BC] у співвідношенні $\lambda = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{1} = 3$ за властивостями бісектриси внутрішнього кута трикутника. Тоді за формулою (1.15)

$$x_N = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}$$

1, так само, $y_N = -\frac{1}{2}$, $z_N = \frac{3}{2}$. Звідси вектор $\overrightarrow{AN} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ і $|AN| = \sqrt{3}/2$.

4. З трикутника AKC за теоремою Піфагора $|AK| = \sqrt{|AC|^2 - |KC|^2}$. Визначимо

$$|KC| = \text{пр}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AC} = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = 1/\sqrt{3}. \text{ Тоді } |AK| = \sqrt{1 - 1/3} = \sqrt{6}/3.$$

1.10. Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається правою, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти ходу годинникової стрілки. У протилежному випадку трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається лівою.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який позначається символом $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (або $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$) і задовольняє три вимоги (рис. 1.24): 1) довжина вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ чисельно

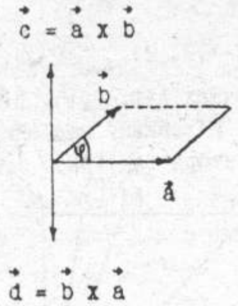


Рис. 1.24

дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}); \quad (1.16)$$

2) вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (тобто вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ортогональний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$); 3) упорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - права.

Властивості векторного добутку такі:

1. Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Зокрема, завжди $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Цю властивість можна одержати з формули (1.16).

2. Якщо у векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ множники переставити місцями, то добуток змінює знак, тобто

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\,\vec{a} \times \vec{b} \text{ (антикомутативність).}$$

Дійсно, якщо множники переставляти місцями, площа паралелограма та його площина не змінюються. Але тепер впорядкована трійка векторів $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ буде правою (див. рис. 1.24).

3. Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку, тобто

$$(\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

При $\lambda > 0$ ця формула очевидна, тому що із зростанням (зменшенням) однієї із сторін паралелограма в λ разів площа паралелограма теж зростає (зменшується) в λ разів. При $\lambda < 0$ властивість має місце тому, що векторний добуток за модулем залишається незмінним, якщо змінюється знак одного з множників, а напрямок змінює на протилежний.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивність). Властивість наводиться без доведення.

5. Векторний добуток у координатній формі. Розглянемо в ортонормованому базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ вектори $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді векторний добуток через координати векторів обчислюється так:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

або записується за допомогою символічного визначника третього порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.17)$$

Доведення. Визначимо векторний добуток ортів базису. За першою властивістю векторного добутку

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

З означення векторного добутку, з урахуванням того, що ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)- правий базис (рис. 1.25) і другої властивості векторного добутку маємо

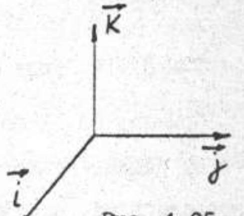


Рис. 1.25

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \qquad (1.18)$$

Завдяки властивості дистрибутивності векторного добутку вектори можна множити за правилом множення многочлена на многочлен, зберігая при цьому порядок розташування множників. Скалярні множники можна виносити за знак векторного добутку. Звідси

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(\vec{i} \times \vec{i}) +$$
$$+ a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) +$$
$$+ a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k}).$$

Праву частину за формулами (1.18) зведемо до вигляду

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_xb_y\vec{k} - a_xb_z\vec{j} - a_yb_x\vec{k} + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} - a_zb_y\vec{i} =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} =$$
$$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$ звідки й дістанемо (1.17).

Зауваження. Формулу (1.17) можна було б прийняти за означення векторного добутку. Тоді вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ із (1.17) задовольняв би властивості 1 - 3 з підрозд. 1.7.

Приклад 22. Обчислити площу трикутника ABC, якщо $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ і $C(2,1,1)$

Розв'язання. Площа S трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)$ і $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$. За формулою (1.16) $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. Знайдемо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Тоді $S=|-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}|/2=\sqrt{3}/2$.

Приклад 23. В базисі $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, де $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=\pi/6$, задано вектори $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ і $\vec{b}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Площу паралелограма визначаємо за формулою

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=|(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)|=|2\vec{e}_1\times\vec{e}_1-\vec{e}_1\times\vec{e}_2+$$

$$+2\vec{e}_2\times\vec{e}_1-\vec{e}_2\times\vec{e}_2|=|\vec{0}+\vec{e}_2\times\vec{e}_1+2\vec{e}_2\times\vec{e}_1-\vec{0}|=3|\vec{e}_2\times\vec{e}_1|=$$

$$=3|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\sin(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Приклад 24. Обчислити $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ і навести геометричне тлумачення модуля цього добутку, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ довільні неколінеарні вектори.

Розв'язання. Знайдемо $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=2\vec{a}\times\vec{b}$. Тоді $|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|=2|\vec{a}\times\vec{b}|$. Ця рівність означає, що подвоєна площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює площі паралелограма, побудованого на діагоналях паралелограма, введеного за умовою.

Приклад 25. Визначити орт вектора $\vec{x}$, що ортогональний векторам $\vec{a}=(1,0,-1)$ і $\vec{b}=(1,2,0)$ і утворює з віссю Oz гострий кут.

Розв'язання. Вектор $\vec{x}$ ортогональний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{x}=\vec{a}\times\vec{b}$, тобто

$$\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}=(2,-1,2).$$

За означенням одиничного вектора (див. підрозд. 1.2), орт вектора $\vec{x}$ визначимо як $\vec{x}^0 = \pm \vec{x}/|\vec{x}| = \pm \frac{1}{3}(2,-1,2)$.

За умовою кут $(\widehat{\vec{x}^0, z})$ гострий, тобто $\text{пр}_z \vec{x}^0 > 0$, і тому $\vec{x}^0 =$ $= \frac{1}{3}(2,-1,2)$.

<u>Приклад 26</u>. Довести, що $S = \frac{3}{4}\sigma$, де σ - площа трикутника ABC, а S - площа трикутника, сторони якого дорівнюють медіанам трикутника ABC.

Розв'язання. Позначимо $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (див. рис.1.6). Тоді $\sigma =$ $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Медіани трикутника ABC збігаються з векторами $\overrightarrow{AM} = \vec{a} +$ $+ \vec{b}/2$ і $\overrightarrow{KC} = \vec{a}/2 + \vec{b}$. Обчислимо $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{KC}| = \frac{1}{2}|(\vec{a} + \vec{b}/2) \times$ $\times (\vec{a}/2 + \vec{b})| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{a}/2 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a}/4 + \vec{b} \times \vec{b}/2| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} -$ $- \vec{a} \times \vec{b}/4| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sigma/4$.

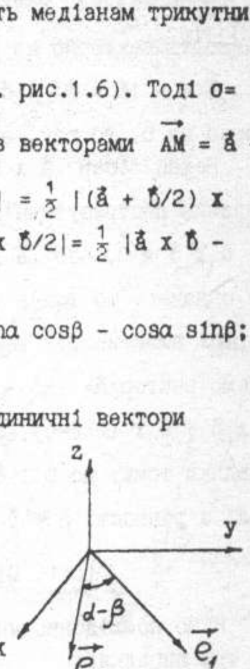
<u>Приклад 27</u>. Довести формули $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

<u>Розв'язання</u>. За формулами (1.11) введемо одиничні вектори

$\vec{e}_1 = \cos(\widehat{\vec{e}_1, x})\vec{i} + \cos(\widehat{\vec{e}_1, y})\vec{j} + \cos(\widehat{\vec{e}_1, z})\vec{k}$,

$\vec{e}_2 = \cos(\widehat{\vec{e}_2, x})\vec{i} + \cos(\widehat{\vec{e}_2, y})\vec{j} + \cos(\widehat{\vec{e}_2, z})\vec{k}$

і позначимо $(\widehat{\vec{e}_1, x}) = \alpha$, $(\widehat{\vec{e}_1, y}) = 90^\circ - \alpha$, $(\widehat{\vec{e}_1, z}) = 90^\circ$ і $(\widehat{\vec{e}_2, x}) = \beta$, $(\widehat{\vec{e}_2, y}) = 90^\circ -$ $- \beta$, $(\widehat{\vec{e}_2, z}) = 90^\circ$ (рис. 1.26). Тоді



$\vec{e}_1 = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}$ і $\vec{e}_2 = \cos\beta\, \vec{i} + \sin\beta\, \vec{j}$.

Рис. 1.26

Обчислимо

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}(\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta).$$

Завдяки тому, що $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \alpha - \beta$, маємо $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| =$ $= |\vec{e}_1||\vec{e}_2|\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, і тому $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta -$

$- \cos\alpha \sin\beta$. Далі $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \cos(\alpha - \beta)$, тобто $\cos(\alpha - \beta)=\cos\alpha \cos\beta +$ $+ \sin\alpha \sin\beta$.

Приклад 28. Довести, що якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ парами не колінеарні, то векторні рівності $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ рівносильні.

Розв'язання. Нехай $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Помножимо кожну з частин цієї рівності векторно на $\vec{a}$. Одержимо $\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$, звідки $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \times \vec{a}$. Якщо ж помножити наведену рівність векторно на $\vec{b}$, то так само дістанемо $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$.

Нехай тепер $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. З рівності $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ завдяки дистрибутивній властивості векторного добутку маємо $\vec{a} \times \vec{b} -$ $- \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$, або $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{0}$, тобто $(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$. Це означає, що існує число λ таке, що $\vec{a} + \vec{c} = - \lambda \vec{b}$ (наслідок з першої властивості векторного добутку). З останньої залежності знайдемо вектор $\vec{a} = -\lambda\vec{b} - \vec{c}$ і підставимо його в рівність $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$: $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times (-\lambda\vec{b}-\vec{c})$, звідки $\vec{b} \times \vec{c} = \lambda \times (\vec{b} \times \vec{c})$, або $(1-\lambda)(\vec{b} \times \vec{c})= \vec{0}$. Завдяки тому, що $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не колінеарні, тобто $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$, маємо $\lambda = 1$. Тоді з рівності $\vec{a} + \vec{c} = - \lambda\vec{b}$ при $\lambda = 1$ одержимо $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

1.11. Мішаний добуток векторів

Якщо послідовно множити три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, то логічно можливі три випадки:

1. Спочатку два вектори множаться скалярно. В результаті цього одержимо число $\lambda=\vec{a}\vec{b}$. Наступне множення $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}=\lambda\vec{c}$ є добутком вектора на число. Тому такий добуток не дає нічого нового.

2. Спочатку два вектори множаться векторно і результат множиться на третій вектор теж векторно. Дістанемо подвійний векторний добуток, який позначається символом $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, або $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Цей добуток також не має спеціального змісту. Тому обмежимося лише вказівкою (без доведення) на формулу, яка відома як правило "бац" і "цаб":

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\, \vec{b}). \qquad (1.19)$$

3. Два вектори множаться векторно: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$, а після цього век-

тор $\vec{d}$ множиться скалярно на вектор $\vec{c}$. В результаті такого множення одержимо деяке число, яке позначається символом $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ і називається мішаним, або векторно-скалярним добутком.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ - некомпланарні, то мішаний добуток має спеціальне геометричне тлумачення, а саме: модуль мішаного добутку $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Якщо впорядкована трійка векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ права, то мішаний добуток векторів дорівнює $+V$ (V - об'єм паралелепіпеда), а якщо - ліва, то $-V$.

Таким чином, має місце формула

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{cases} V, & \text{якщо } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ - права трійка;} \\ -V, & \text{якщо } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ - ліва трійка.} \end{cases} \tag{1.20}$$

Доведення. Нехай $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ - права трійка некомпланарних векторів. На цих векторах, як на ребрах, побудовано паралелепіпед (рис. 1.27). Позначимо $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тоді $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$ - площа основи паралелепіпеда. Обчислимо $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{d}\,\vec{c} = |\vec{d}|\,\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = SH = V$, де V - об'єм паралелепіпеда. Якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - ліва трійка, то $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} < 0$, тобто $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = -H$ (див. рис. 1.27). Суттєве в цьому випадку те, що $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -SH = -V$.

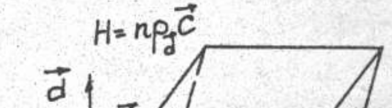


Рис. 1.27

Наведемо деякі важливі властивості мішаного добутку векторів:

1. Якщо провести кругове переставлення векторів, то мішаний добуток не змінюється, тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}. \tag{1.21}$$

Слід звернути увагу на те, що круговим (циклічним) переставленням векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається таке переставлення, за яким $\vec{b}$ ставиться на місце $\vec{a}$, $\vec{a}$ - на місце $\vec{c}$, $\vec{c}$ - на місце $\vec{b}$ (рис. 1.28).

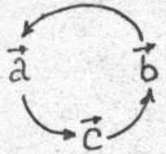


Рис. 1.28

Доведення рівностей (1.21) можна одержати з таких тверджень:

а) кожний з добутків за абсолютною величиною дорівнює об'єму того ж самого паралелепіпеда;

б) знаки цих добутків однакові, тому що при круговому переставленні векторів орієнтація трійки не змінюється (наприклад, якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - права трійка, то $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ і $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ - теж праві трійки)).

За формулою (1.21) рівність $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$ можна переписати у вигляді $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$. Ця рівність є поясненням того факту, що мішаний добуток впорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ записують без указання знаків множення, тобто у вигляді $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

2.Якщо у мішаному добутку поміняти місцями будь-які два множники, то добуток змінить знак: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$. Це наслідок того, що трійки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ і $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ мають різну орієнтацію.

3. Мішаний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли множники компланарні.

Доведення: а) Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = V = \vec{0}$.

б) Нехай $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$. Тоді $\vec{c} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$. З означення векторного добутку маємо також $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ і $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$. Тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ перпендикулярні тому ж самому вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, тобто є компланарними. Зокрема, якщо у мішаному добутку два множники однакові, то він дорівнює нулю.

4. Якщо в ортонормованому базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.22)$$

Доведення.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c = \left\{ \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \right.$$

$$- \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \Bigg] (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 29. Тетраедр ABCS побудовано на трьох некомпланарних векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Довести, що його об'єм V визначається за формулою $V = \frac{1}{6} | \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} |$.

Розв'язання. Визначимо об'єм тетраедра за формулою $V = \frac{1}{3} HS_{ABC}$, де H - довжина висоти тетраедра, проведеної з вершини S, S_{ABC} - площа основи тетраедра. Добудуємо тетраедр до паралелепіпеда (рис. 1.29). Відомо, що $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC}$ і $HS_{ABDC} = | \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} |$ - об'єм паралелепіпеда, і тому об'єм тетраедра визначається за формулою $V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Слід звернути увагу на те, що замість трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можна взяти будь-яку трійку некомпланарних векторів, які збігаються з ребрами тетраедра.

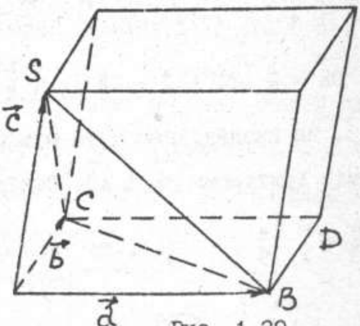


Рис. 1.29

Приклад 30. Вершини тетраедра розташовані у точках A(1,-1,2), B(2,-1,1), C(2,-3,2), D(2,-3,0). Визначити: 1) об'єм тетраедра V; 2) вектор, який збігається з висотою тетраедра, проведеною з вершини D; 3) кут φ між ребром [AD] і площиною основи тетраедра.

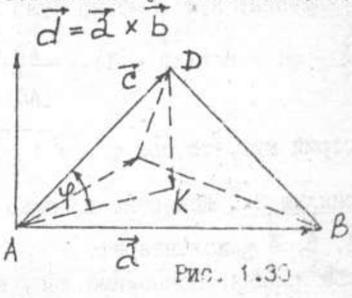


Рис. 1.30

Розв'язання. Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}\,(1,0,-1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(1,-2,0)$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}\,(1,-2,-2)$ (рис. 1.30).

1. Об'єм тетраедра знайдемо за формулою $V = \frac{1}{6} |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$. Оскільки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4$, то $V = 2/3$. Слід звернути увагу на те, що $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - права трійка, тому що $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$.

2. Шуканий вектор $\overrightarrow{DK}$ і $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ колінеарні, тобто $\overrightarrow{DK} = \lambda\vec{d}$. Для визначення λ треба врахувати, що вектори $\overrightarrow{DK}$ і $\vec{d}$ розташовані по одну сторону від площини (ABC) тому, що $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ і $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ - праві трійки. Звідси $\overrightarrow{DK} \uparrow\downarrow \vec{d}$ і $\overrightarrow{DK} = -|\overrightarrow{DK}|\vec{d}\,/|\vec{d}|$. Якщо знайти $|\overrightarrow{DK}|$ за формулою $|\overrightarrow{DK}| = |\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}| = \frac{|\vec{d}\,\vec{c}|}{|\vec{d}|} = \frac{|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}{|\vec{d}|}$, то одержимо $|\overrightarrow{DK}| = -\frac{|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|}{|\vec{d}|}\vec{d}$. Обчислимо вектор

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$ Звідси $|\vec{d}| = 3$, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 4$, $\overrightarrow{DK} = \frac{4}{9}(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = (\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$.

3. За визначенням кута між прямою і площиною введемо кут φ як кут між векторами $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AD}$. Оскільки $\overrightarrow{AD} = \vec{c} = (1,-2,-2)$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = (\frac{17}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{10}{9})$, то $\cos\varphi = \cos(\widehat{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\overrightarrow{AK}\,\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AK}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{\sqrt{65}}{9}$.

Тому $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{65}}{9}$.

Зауваження. Кут φ можна було б визначити за формулою $\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \vec{d}}) = \frac{\overrightarrow{AD}\,\vec{d}}{|\overrightarrow{AD}||\vec{d}|} = \frac{4}{9}$. Якщо тепер показати, що φ - гострий кут, то $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{65}}{9}$.

Приклад 31. Довести, що якщо $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - колінеарні.

Розв'язання. Помножимо дану векторну рівність скалярно на вектор $\vec{a}$: $\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$. Оскільки за властивістю 3 мішаного добутку $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{0}$, то мішаний добуток $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{0}$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарні.

Приклад 32. Паралелепіпед побудовано на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{m} = \vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{c}\times\vec{a}$, дорівнює квадрату об'єма паралелепіпеда, наведеного за умовою.

Розв'язання. Позначимо через $V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$ об'єм паралелепіпеда, поданого за умовою, $V' = |\vec{m}\,\vec{n}\,\vec{p}|$ - об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Оскільки $\vec{m}\,\vec{n}\,\vec{p} = (\vec{m}\times\vec{n})\vec{p}$, то попередньо обчислимо добуток $\vec{m}\times\vec{n}$ за формулою (1.19): $\vec{m}\times\vec{n} = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}((\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}) - \vec{c}((\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}) = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{b}$. Враховано, що за властивістю 3 мішаного добутку $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{b} = \vec{0}$. Тоді $V' = |\vec{m}\,\vec{n}\,\vec{p}| = |(\vec{m}\times\vec{n})\vec{p}| = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})| = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})|$. За круговою властивістю мішаного добутку (1.21) $\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ маємо $V = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2| = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})|^2 = V^2$.

Приклад 33 (теорема косинусів для тригранного кута). Нехай плоскі кути $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ і $C\hat{O}A$ тригранного кута $OABC$ дорівнюють α, β і γ (рис. 1.31) відповідно. Довести, що величина кута B двогранного кута при ребрі (OB) задовольняє співвідношення

$$\cos(\angle B) = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Розв'язання. Розглянемо орти $\vec{e}_1 = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$, $\vec{e}_3 = \frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$.

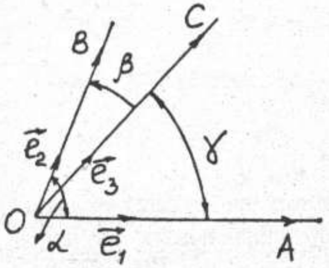


Рис. 1.31

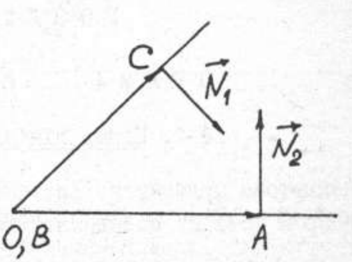


Рис. 1.32

Тоді $\vec{N}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$ і $\vec{N}_2 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ - вектори, перпендикулярні площинам (COB) і (AOB) відповідно (на рис. 1.32 зображено проекцію шуканого двогранного кута при ребрі (OB)). За властивістю кутів з відповідно перпендикулярними сторонами

$$\cos(\angle B) = \cos(\pi - (\vec{N}_1 \hat{,} \vec{N}_2)) = -\cos(\vec{N}_1 \hat{,} \vec{N}_2) = -\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}.$$

Оскільки $|\vec{N}_1| = |\vec{e}_2 \times \vec{e}_3| = |\vec{e}_2||\vec{e}_3|\cos(\vec{e}_2 \hat{,} \vec{e}_3) = \sin\beta$,

$|\vec{N}_2| = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_1| = |\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos(\vec{e}_1 \hat{,} \vec{e}_2) = \sin\alpha$, то $\cos(\angle B) =$

$= -\dfrac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\sin\alpha\,\sin\beta}$.

Обчислимо добуток $\vec{N}_1\vec{N}_2 = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$. За формулою (1.19) подвійного векторного добутку маємо $\vec{e}_2 \times \vec{N}_1 = \vec{e}_2 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) =$ $= \vec{e}_2(\vec{e}_2\,\vec{e}_3) - \vec{e}_3(\vec{e}_2\,\vec{e}_2)$. Помножимо цю рівність скалярно на $\vec{e}_1$:
$\vec{e}_1(\vec{e}_2 \times \vec{N}_1) = (\vec{e}_1\,\vec{e}_2)(\vec{e}_2\,\vec{e}_3) - (\vec{e}_1\,\vec{e}_3)|\vec{e}|^2$. А оскільки

$\vec{e}_1(\vec{e}_2 \times \vec{N}_1) = \vec{N}_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2$, $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \cos\alpha$, $\vec{e}_2\vec{e}_3 = \cos\beta$,

$\vec{e}_2\vec{e}_3 = \cos\gamma$ і $|\vec{e}_2| = 1$, то $\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2 = \cos\alpha\,\cos\beta - \cos\gamma$.

Таким чином,

$$\cos(\angle B) = -\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta}.$$

Р О З Д І Л 2

П Р Я М А І П Л О Щ И Н А

2.1. Пряма лінія на площині

Декартова прямокутна система координат xOy на площині задається вибором початку координат (точки O) і ортонормованого базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$ називаються ортами координатних осей Ox і

Oy. Довільна точка $M(x,y)$ площини однозначно визначається своїм радіусом-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Будь-який вектор $\vec{a}$ єдиним чином можна записати у вигляді $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, тобто $\vec{a} = (a_x, a_y)$, де $a_x = пр_x\vec{a}$, $a_y = пр_y\vec{a}$ - декартові координати вектора $\vec{a}$.

Розглянемо на площині xOy деяку лінію L. Рівняння

$$F(x,y) = 0 \text{ (або } y = f(x))$$

називається рівнянням лінії L, якщо виконується така умова: точка $M(x,y)$ належить лінії L тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють це рівняння (тобто рівняння перетворюється в тотожність).

Таким чином, рівняння лінії L є співвідношенням, яке зв'язує координати точок даної лінії. Це співвідношення являє собою аналітичний запис (тобто деяку формулу) тієї властивості, яка виділяє серед точок площини точки даної лінії L. Якщо $F(x,y)$ - многочлен степеня n відносно змінних x і y, то лінія $F(x,y) = 0$ називається алгебраїчною порядку n.

Нехай L - пряма лінія на площині xOy. Залежно від способу задання цієї прямої її рівняння мають різні вигляди.

2.1.1. Рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом

Потрібно написати рівняння прямої L, що не паралельна осі Oy, якщо її початкова ордината b і кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$, де α - кут нахилу кривої L до осі Ox (рис. 2.1).

Для будь-якої точки $M(x,y)$ прямої L $пр_x \overrightarrow{BM} = x$,

$пр_y \overrightarrow{BM} = пр_y(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}) =$

$= пр_y \overrightarrow{OM} - пр_y \overrightarrow{OB} = y - b$.

Тому з трикутника ABM маємо

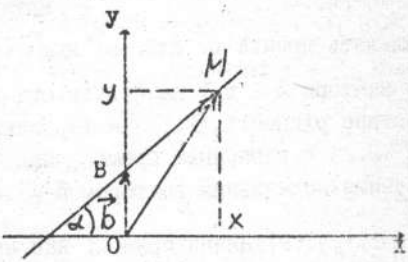


Рис. 2.1

$$\frac{y - b}{x} = tg\alpha, \text{ або}$$

$$y = kx + b. \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) задовольняють координати тих і тільки тих точок $M(x,y)$, які належать прямій L. Тому рівняння (2.1) є рівнянням прямої L, яке називається рівнянням із заданим кутовим коефіцієнтом.

Звернемо увагу на окремі випадки рівняння (2.1):

а) якщо $b = 0$, то рівняння $y = kx$ визначає пряму, що проходить через початок координат;

б) якщо $k = 0$, то рівняння $y = b$ задає пряму, паралельну осі Ох і таку, що відсікає на осі Оу відрізок величини b;

в) якщо пряма L паралельна осі Оу і відсікає на осі Ох відрізок величини a, то координати довільної точки $M(x,y)$ цієї прямої задовольняють рівняння $x = a$.

2.1.2. Рівняння прямої, що проведена через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт

Нехай пряма L проведена через задану точку $M_0(x_0,y_0)$. Введемо вектор $\vec{n} = (A,B)$, перпендикулярний до цієї прямої. Цей вектор називається нормальним вектором прямої L (рис. 2.2).

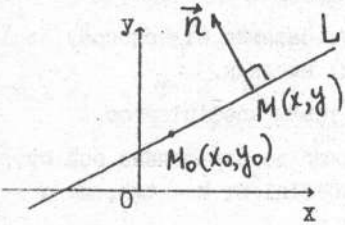


Рис. 2.2

Якщо $M(x,y)$ – довільна точка прямої L, то вектори $\vec{n} = (A,B)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)$ ортогональні, а тому

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) задовольняють координати тільки тих точок $M(x,y)$, які належать прямій L. Дійсно, якщо точка $P(x,y)$ не належить прямій L, то вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0P}$ не будуть ортогональними і внаслідок цього ліва частина рівності (2.2) не дорівнюватиме нулю. Таким чином, рівняння (2.2) є рівнянням прямої, яка проходить через точку $M(x_0,y_0)$ із заданим нормальним вектором $\vec{n} = (A,B)$.

2.1.3. Рівняння прямої, яка проведена через точку $M_0(x_0,y_0)$ і має заданий напрямний вектор

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s} = (m,n)$. Вектор $\vec{s}$ називається напрямним вектором цієї прямої (рис. 2.3). Існують різні варіанти рівняння цієї прямої.

1. Рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \qquad (2.3)$$

називається векторно-параметричним рівнянням прямої L (див. приклад 8).

2. Векторне рівняння (2.3) рівносильне двом координатним рівнянням, тобто

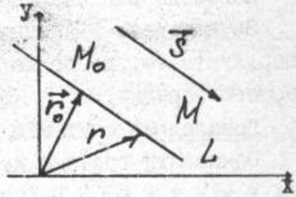


Рис. 2.3

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty). \qquad (2.4)$$

Рівняння (2.4) називаються параметричними рівняннями прямої L.

3. Якщо виключити з рівняннь (2.4) параметр t, одержимо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (2.5)$$

2.1.4. Загальне рівняння прямої

Рівняння (2.5) можна записати у вигляді

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.6)$$

де $C = -Ax_0 - By_0 = \text{const}$. Таким чином, будь-яке рівняння (2.6) є рівнянням прямої на площині. Для цієї прямої вектор $\vec{n} = (A,B)$ є нормальним вектором, а саме рівняння називається загальним рівнянням прямої на площині. Якщо $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то пряма (2.6) проходить через точки $(0, -C/B)$ і $(-C/A, 0)$. У випадку $A = 0$, $B \neq 0$, рівняння $By + C = 0$ визначає пряму $y = -\frac{C}{B} = b$, а якщо $A \neq 0$, $B = 0$, рівняння $Ax + C = 0$ задає пряму $x = -\frac{C}{A} = a$.

2.1.5. Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма L відсікає на осях Ox і Oy відрізки величин a і b відповідно (рис. 2.4). Напрямним вектором цієї прямої є вектор $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$. За точку $M_0(x_0, y_0)$ візьмемо точку $A(a,0)$ і скористаємося рівнянням (2.5). Маємо

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}, \text{ або } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

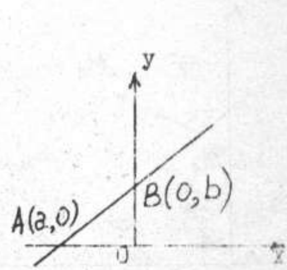


Рис. 2.4

Наведене рівняння називається рівнянням прямої у відрізках.

Зауваження. Рівняння, одержані у підрозд. 2.1.1 - 2.1.5, підтверджують те, що пряма лінія на площині є алгебраїчною лінією першого порядку.

Приклад 34 (кут між прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$).

Обчислити гострий кут φ між не паралельними осі Oy прямими L_1: $y = k_1x + b_1$ і L_2: $y = k_2x + b_2$ (рис. 2.5).

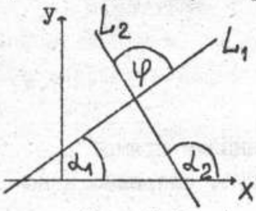


Рис. 2.5

Розв'язання. Нехай $k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$. З геометричних міркувань $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо

$$\varphi \neq \pi/2, \text{ то } tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2},$$

і тому $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Приклад 35 (відстань від точки до прямої). Довести, що відстань $\rho(M_0, L)$ від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L - $Ax + By + C = 0$ - визначається за формулою

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Розв'язання. Якщо $Ax_0 + By_0 + C = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ розташована на прямій L, тобто $(M_0, L) = 0$. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ не лежить на прямій L. Виберемо довільну точку $M_1(x_1, y_1)$ на прямій L з умови $Ax_1 + By_1 + C = 0$ (рис. 2.6) і визначимо вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$. Тоді

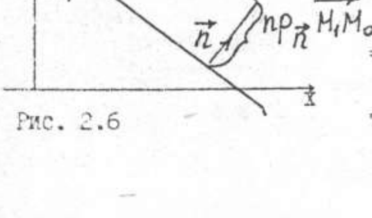


Рис. 2.6

$$\rho(M_0, L) = |пр_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\vec{n}\ \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

тому що $-Ax_1 - By_1 = C$. До речі, відстань $\rho(M_0,L)$ не залежить від вибору точки M_1.

Приклад 36. Для трикутника ABC з вершинами, що знаходяться у у точках A(0,-2), B(4,1), C(6,6) (рис. 2.7) написати рівняння: 1) висоти (AK), 2) медіани (AM), 3) бісектриси (AN) внутрішнього кута A.

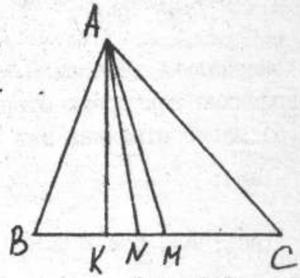


Рис. 2.7

Розв'язання: 1. Вектор $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2,5)$ є нормальним вектором висоти (AK). Ця висота (AK) проходить через відому точку A(0,-2). Тому скористаємося рівнянням (2.2). Маємо

$$AK:\ 2(x - 0) + 5(y + 2) = 0,$$

$$\text{або } 2x + 5y + 10 = 0.$$

2. Визначимо координати точки M: $x_M = 5$, $y_M = \frac{7}{2}$. Оскільки $\overrightarrow{AM}(5,\frac{7}{2})$, то за напрямний вектор медіани (AM) візьмемо вектор $\vec{s} = 2\overrightarrow{AM} = (10,7)$. З рівняння (2.5) маємо (AM): $\frac{x - 0}{10} = \frac{y + 2}{11}$, або

$$11x - 10y - 20 = 0.$$

3. Знайдемо напрямний вектор бісектриси (AN) за формулою з пр кладу 4: $\vec{x} = \overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}| + \overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AC}|$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (4,3)$, $\overrightarrow{AC} = 6,8)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 10$, то $\vec{x} = (\frac{7}{5}, \frac{7}{5})$. Напрямним вектором бісектрис буде також вектор $\vec{e} = \frac{5}{7}\vec{x} = (1,1)$. Тоді з рівняння (2.5) одержим рівняння (AN): $\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 2}{1}$, або $x - y - 2 = 0$.

Приклад 37. У трикутнику ABC відомі рівняння сторони (AB) – $3x + 2y - 12 = 0$, висот (AM) – $4x + y - 6 = 0$ і (BM) – $x + 2y - 4 = 0$, де M – точка перетину висот. Написати рівняння сторін (AC) і (BC) (рис. 2.8).

Розв'язання. Координати вершин A(0,6) і B(4,0) трикутника ABC як точок перетину прямих (AB),(AM) і (AB),(BM) відповідно знаходи із систем лінійних алгебраїчних рівнянь

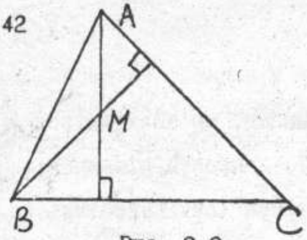


Рис. 2.8

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0, \\ 4x + y - 6 = 0, \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Нормальні вектори $\vec{n}_1 = (1,2)$ і $\vec{n}_2 = (4,1)$ висот (BM) і (AM) є напрямними векторами сторін (AC) і (BC) відповідно. З рівняння (2.5) маємо рівняння цих сторін, а саме:

(AC): $\dfrac{x - 0}{1} = \dfrac{y - 6}{2}$, або $2x - y + 6 = 0$

і

(BC): $\dfrac{x - 4}{4} = \dfrac{y - 0}{1}$, або $x - 4y - 4 = 0$.

2.2. Площина

Рівняння $F(x,y,z) = 0$ (або $z = f(x,y)$) називається рівнянням поверхні P в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$, якщо виконано таку умову: точка $M(x,y,z)$ належить поверхні P тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють це рівняння.

У випадку, коли вираз $F(x,y,z)$ - многочлен степеня n відносно змінних x, y, z, поверхня P називається алгебраїчною порядку n.

Окремим випадком поверхні P є площина. Як і у випадку прямої лінії, рівняння площини P має різні варіанти запису. Вони залежать від способу задання площини в просторі.

2.2.1. Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до заданого вектора

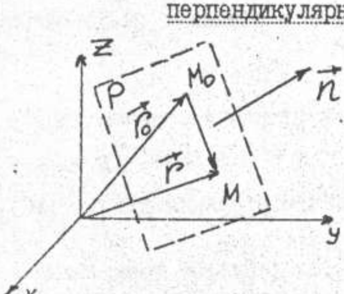


Рис. 2.9

Нехай площина P, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярна (ортогональна) до вектора $\vec{n} = (A,B,C)$. Вектор $\vec{n}$ називається нормальним вектором площини P (рис. 2.9). Точка $M(x,y,z)$ - поточна точка площини P (єдина вимога до точки M -

це те, що вона повинна належати площині P). Тоді вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ортогональні, тобто

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \qquad (2.7)$$

Рівність (2.7) виконується тоді і тільки тоді, коли точка M(x, y,z) належить площині P, тому ця рівність називається векторним рівнянням площини. Координатний запис рівняння (2.7) має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.8)$$

Рівняння (2.8) називається рівнянням площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

2.2.2. Рівняння площини, яка проходить через три точки

Складемо рівняння площини P, яка проходить через точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ і $M_3(\vec{r}_3)$. Ці точки задано, відповідно, радіусами-векторами $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ (рис.2.10). Виберемо у площині P довільну точку $M(\vec{r})$, де $\vec{r} = (x, y, z)$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ і $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ - компланарні для будь-якого положення точки M у площині P. За властивістю 3 мішаного добутку векторів (див. підрозд. 1.11) це можливо тоді і тільки тоді, коли

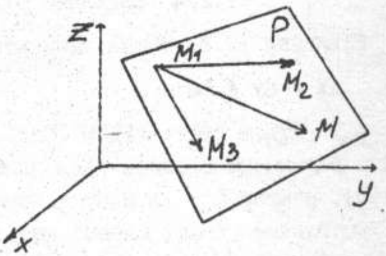


Рис. 2.10

$$(\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0.$$

У координатній формі це рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.9)$$

2.2.3. Рівняння площини у відрізках

Напишемо рівняння площини P, яка відсікає на координатних осях Ox, Oy, Oz відрізки, величини яких дорівнюють, відповідно, a, b, c.

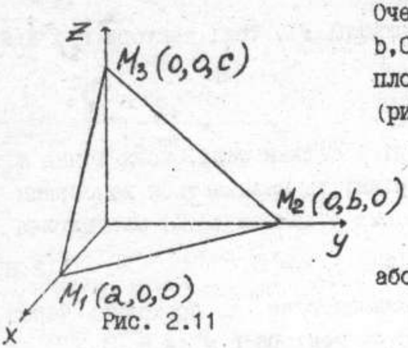


Рис. 2.11

Очевидно, що точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ є точками перетину площини P з координатними осями (рис. 2.11).

З рівняння (2.9) знаходимо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

або $bcx + acy + abz = abc$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2.10)$$

Рівняння (2.10) називається рівнянням площини у відрізках.

2.2.4. Загальне рівняння площини

Рівняння (2.8) можна записати у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.11)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = \text{const}$. Таке рівняння називається загальним рівнянням площини. Для площини, яка задається рівнянням (2.10), вектор $\vec{n} = (A,B,C)$ є нормальним вектором.

Розглянемо деякі окремі випадки рівняння (2.11):

а) $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ - площина проходить через початок координат;

б) $A = 0$, тобто $\text{пр}_x\vec{n} = 0$, $By + Cz + D = 0$ - площина паралельна осі Oz;

в) $A = D = 0$, $By + Cz = 0$ - площина проходить через вісь Ox;

г) $A = B = 0$, $Cz + D = 0$ - площина паралельна координатній площині xOy і відсікає на осі Oz відрізок величини $z = - D/C$;

д) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ - рівняння координатних площин yOz, xOz, xOy відповідно.

Можливі й інші окремі випадки рівняння (2.11).

Зауваження. Площина - це алгебраїчна поверхня першого порядку.

Приклад 38. Написати загальне рівняння площини, яка відсікає на осях Ox і Oy відрізки величин $a = 2$, $b = -1$ і проходить через точку $M_0(1,0,-1)$.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини у відрізках (2.11) зі значеннями параметрів $a = 2$ і $b = -1$. Маємо

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{1} + \frac{z}{c} = 1.$$

Координати точки M_0 задовольняють це рівняння, тобто $\frac{1}{2} - \frac{1}{c} = 1$, або $c = -2$. Рівняння площини у відрізках записується так: $\frac{x}{2} - \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$, а шукане загальне рівняння площини має вигляд $x - 2y - z - 2 = 0$.

Приклад 39. Написати рівняння площини P, яка проходить через точки $M_1(1,1,-1)$ і $M_2(2,1,-3)$ паралельно вектору $\vec{a} = (1,1,0)$.

Розв'язання. Визначимо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (1,0,-2)$. Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}$ паралельні шуканій площині P, тому за нормальний вектор $\vec{n}$ до площини P можна взяти вектор

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, 1).$$

У рівнянні (2.8) за точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ візьмемо точку $M_1(1,1,-1)$. Будемо мати рівняння шуканої площини: $2(x-1)-2(y-1)+z+1 = 0$, або $2x - 2y + z + 1 = 0$.

Приклад 40 (кут між площинами). Визначити кут $\varphi = (P_1 \hat{,} P_2)$ між площинами P_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ і P_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$.

Кут між паралельними площинами за означенням вважається рівним нулю. Площини P_1 і P_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2,B_2,C_2)$, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Рис. 2.12

Кутом між непаралельними площинами P_1 і P_2 називається найменший з двох суміжних двогранних кутів, які утворені цими площинами. Нехай $\alpha = (\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)$ - кут між нормальними векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ (рис. 2.12). Тоді $\varphi = \alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, і $\varphi = 180^\circ - \alpha$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

У кожному з цих випадків

$$\cos\alpha = |\cos(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Приклад 41 (відстань від точки до площини). Довести, що відстань $\rho(M_0,P)$ від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини P, рівняння якої $Ax + By + Cz + D = 0$, визначається за формулою

$$\rho(M_0,P) = \frac{|Ax_0+ By_0+ Cz_0+ D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

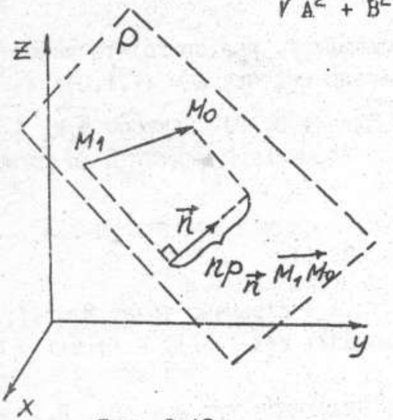


Рис. 2.13

Розв'язання. Якщо $Ax_0+ By_0+ Cz_0+ D = 0$, то точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить площині P, і тому $\rho(M_0,P)=0$. Нехай точка M_0 не лежить в площині P. Виберемо у цій площині деяку точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ з умови $Ax_1+ By_1+ Cz_1+ D = 0$ і початок нормального вектора $\vec{n} = (A,B,C)$ віднесемо до площини P (рис. 2.13). Визначимо вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$. Тоді

$$\rho(M_0,P) = |\text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\vec{n}\, \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\,\vec{n}\,|} = \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

А оскільки $-Ax_1- By_1- Cz_1 = D$, то

$$\rho(M_0,P) = \frac{|Ax_0+ By_0+ Cz_0+ D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Доцільно звернути увагу на те, що відстань від точки M_0 до площини P не залежить від того, яка точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ вибирається в площині P.

2.3. Пряма лінія у просторі

Довільна лінія L у просторі в загальному випадку визначається як лінія перетину двох поверхонь (поверхні задаються неоднозначно тому, що через ту ж саму лінію L можна провести різні поверхні), тобто системою двох рівнянь

$$L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Лінію L можна розглядати також як траєкторію точки, що переміщується у просторі. У цьому випадку координати довільної точки $M(x,y,z)$ лінії L є функціями часу t (або іншої величини), тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I, \tag{2.12}$$

де I - деякий інтервал числової осі. Рівняння (2.12) називаються параметричними рівняннями лінії L у декартовій прямокутній системі координат, якщо: для будь-якого значення параметра $t \in I$ точка $M(x(t), y(t), z(t))$ належить лінії L, і навпаки, для будь-якої точки $M(x,y,z)$ лінії L існує таке значення параметра $t \in I$, що $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Отже, вважатимемо, що L - пряма лінія у просторі.

2.3.1. Загальні рівняння прямої у просторі

Пряма лінія L у просторі може бути задана як лінія перетину двох непаралельних площин $-\ P_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $P_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тобто системою рівнянь

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ . \end{cases} \tag{2.13}$$

Система (2.13) називається загальними рівняннями прямої L.

Цю ж саму пряму можна задати рівняннями двох інших площин, які проходять через пряму (2.13). Особливо зручно вибирати площини, що проектуються на які-небудь дві координатні площини. Ці площини паралельні, відповідно, двом координатним осям, а їх рівняння містять лише дві змінні. Таким чином, систему рівнянь (2.13) можна звести, наприклад, до вигляду

$$L: \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1 = 0, \\ m_2x + n_2y + p_2 = 0\ . \end{cases}$$

Ці рівняння називаються рівняннями прямої L у проекціях (наприклад, рівняння $m_1x + n_1y + p_1 = 0$ є рівнянням проекції прямої L на площину xOy).

2.3.2. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно заданому вектору

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s} = (m,n,p)$, який будемо називати напрямним вектором цієї прямої (рис. 2.14). Як і у випадку прямої лінії на площині (див. рис. 2.3), існують різні варіанти рівнянь прямої:

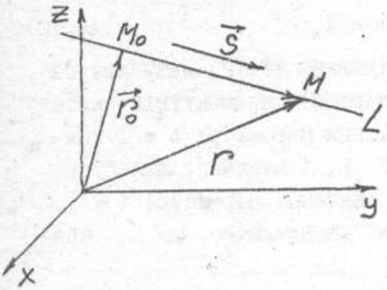


Рис. 2.14

а) рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (-\infty < t < \infty) \qquad (2.14)$$

називається векторно-параметричним рівнянням прямої у просторі (див. приклад 8);

б) векторно-параметричні рівняння (2.14) рівносильні трьом координатним рівнянням

$$L: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \quad (-\infty < t < \infty); \end{cases} \qquad (2.15)$$

в) якщо з рівнянь (2.15) виключити параметр t, то одержимо канонічні рівняння прямої:

$$L: \qquad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.16)$$

У випадку, коли знаменник будь-якого дробу дорівнює нулю, то дорівнює нулю і чисельник цього дробу. Дійсно, якщо $m = 0$, то з рівняння (2.15) маємо, що $x = x_0$, або $x - x_0 = 0$. Рівняння (2.16) записуються у вигляді

$$L: \begin{cases} x = x_0, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Канонічні рівняння (2.16) рівносильні трьом рівнянням, які проектують пряму L на координатні площини (рівняння прямої у проекціях).

Приклад 42. Пряму L задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Написати для прямої L: а) параметричні рівняння; б) канонічні рівняння; в) рівняння в проекціях.

Розв'язання. Згідно з рівняннями (2.15) і (2.16) виберемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить прямій L. Це точка $M_0(1, -2, 0)$. Напрямний вектор $\vec{s}(m, n, p)$ прямої L визначимо за формулою $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ і $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ - нормальні вектори площин, лінією перетину яких є пряма L (рис. 2.15). Звідси

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2). \text{ Тоді:}$$

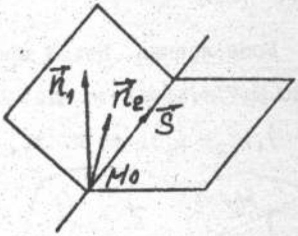


Рис. 2.15

а) параметричні рівняння прямої L

$x = 1 - t,\ y = 2 - 3t,\ z = 2t;$

б) канонічні рівняння прямої L

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z}{2};$$

в) рівняння прямої L в проекціях

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{3}, \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{z}{2}, \quad \frac{y + 2}{3} = \frac{z}{2}, \text{ або } 3x + y - 1 = 0,$$

$2x + z - 2 = 0$ і $2y - 3z + 4 = 0$.

Приклад 43. Написати канонічні рівняння і рівняння в проекціях прямої L, яка проходить через точку $M_0(1, 2, -1)$ паралельно осі Oz (рис. 2.16).

Розв'язання. За напрямний вектор прямої L візьмемо вектор $\vec{s} = \vec{k} = (0, 0, 1)$. Тоді з рівнянь (2.16) маємо

$$L: \frac{x - 1}{0} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z + 1}{3} -$$

канонічні рівняння прямої L.

Рівняння прямої L в проекціях:

$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$, або $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

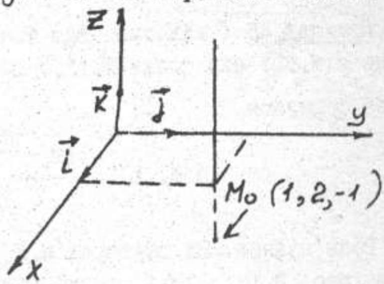


Рис. 2.16

Приклад 44 (умова належності двох прямих одній площині). Довести, що прямі $L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} =$

$= \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ належать одній площині тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.17)$$

Розв'язання. Нехай прямі L_1 і L_2 розташовані в одній площині P (рис.2.17). Тоді до цієї площини належить вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - точки, через які проходять прямі L_1 і L_2. Внаслідок цього вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ і напрямні вектори $\vec{s} = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ компланарні. Тоді за властивістю 3 (див. підрозд. 1.11) мішаного добутку маємо

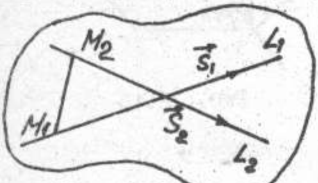


Рис. 2.17

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ \vec{s}_1\ \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 45 (відстань від точки до прямої). Довести, що відстань $\rho(M_1, L)$ від точки $M_1(\vec{r}_1)$ до прямої L: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ визначається за формулою

$$\rho(M_1, L) = \frac{|(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{s}|}{|\ \vec{s}\ |}.$$

Розв'язання. На векторах $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ побудуємо паралелограм (рис. 2.18). Тоді шукана відстань $\rho(M_1, L)$ дорівнює довжині висоти h паралелограма, проведеної з точки M_1 до вектора $\vec{s}$ цієї прямої, тобто

$$\rho(M_1, L) = h = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|}{|\ \vec{s}\ |}.$$

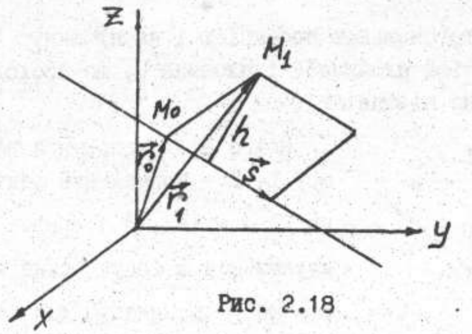


Рис. 2.18

Приклад 46 (відстань між перехресними прямими). Довести, що відстань $\rho(L_1,L_2)$ між перехресними прямими L_1: $\vec r = \vec r_1 + t\vec s_1$ і L_2: $\vec r = \vec r_2 + t\vec s_2$ визначається за формулою

$$\rho(L_1,L_2) = \frac{|(\vec r_2 - \vec r_1)\,\vec s_1\vec s_2\,|}{|\vec s_1 \times \vec s_2|}\,.$$

Розв'язання. Прямі L_1 і L_2 називаються перехресними, якщо вони не лежать в одній площині. Шукана відстань $\rho(L_1,L_2)$ – довжина відрізка $|KN|$ спільного перпендикуляра (KN) до прямих L_1 і L_2 (рис. 2.19). Напрямний вектор $\vec s$ спільного перпендикуляра (KN) визначається за формулою $\vec s = \vec s_1 \times \vec s_2$, тому

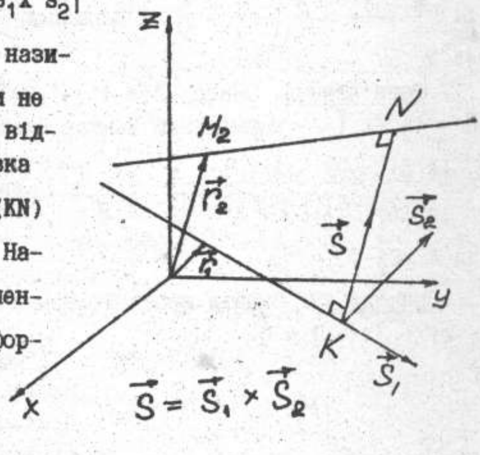


Рис. 2.19

$$\rho(L_1,L_2) = |\text{пр}_{\vec s}\,\overrightarrow{M_1M_2}| =$$

$$=|\text{пр}_{\vec s}\,(\vec r_2 - \vec r_1)| =$$

$$= \frac{|(\vec r_2 - \vec r_1)\,(\vec s_1 \times \vec s_2)|}{|\vec s|} = \frac{|(\vec r_2 - \vec r_1)\,\vec s_1\vec s_2\,|}{|\vec s_1 \times \vec s_2|}\,.$$

2.4. Деякі задачі стосовно прямої і площини

Приклад 47 (кут між прямою і площиною). Обчислити кут φ між прямою L і площиною P.

Розв'язання. Кутом між прямою L і площиною P називається кут φ

між прямою L та її ортогональною проекцією l на площину P (l- пряма, по якій перетинаються площина P і площина Q, що проходить через пряму L перпендикулярно площині P).

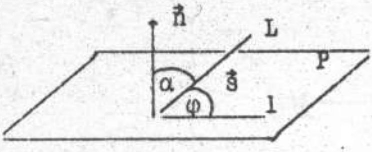


Рис. 2.20

Нехай $\vec{s}$ - напрямний вектор прямої L, $\vec{n}$ - нормальний вектор площини P, $\alpha = (\widehat{\vec{s}, \vec{n}})$ (рис. 2.20). Між кутами φ і α існує такий зв'язок: $\varphi = 90^\circ - \alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, і $\varphi = \alpha - 90^\circ$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. В кожному з цих випадків кут φ визначається за формулою

$$\sin\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{s}\,\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}\ .$$

Приклад 48. При якому значенні параметра λ кут φ між прямою L: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{0}$ і площиною P: $\lambda x - y + z + 3 = 0$ дорівнює 45°?

Розв'язання. Вектор $\vec{s} = (1,-1,0)$ - напрямний вектор прямої L, $\vec{n} = (\lambda,-1,1)$ - нормальний вектор площини P. За формулою $\sin\varphi = \frac{|\vec{s}\,\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|} = \frac{|\lambda+1|}{\sqrt{2}\,\sqrt{\lambda^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ маємо $|\lambda + 1| = \sqrt{\lambda^2 + 2}$, звідки $\lambda = \frac{1}{2}$.

Приклад 49. Знайти проекцію точки M(1,0,2) на площину P: $x - 2y + 3z - 9 = 0$.

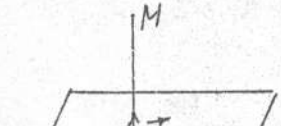


Рис. 2.21

Розв'язання. Проекцією точки M на площину P називається основа K перпендикуляра [MK], проведеного до цієї площини (рис. 2.21). Напрямний вектор $\vec{n} = (1,-2,3)$ площини P є напрямним вектором перпендикуляра (MK), проведеного через точку M до площини P. Тому параметричні рівняння [MK] такі: $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = -2 + 3t$. Визначимо значення параметра t у точці K з системи

$$x - 2y + 3z - 9 = 0,\quad x = 1 + t,\quad y = -2t,\quad z = -2 + 3t\ .$$

Маємо $(1 + t) - (-2t) + (-2 + 3t) = 0$, $t = 1$. Підставимо значення $t = 1$ у параметричні рівняння (MK), звідки $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$. Таким чином, точка $K(2,-2,1)$ - проекція точки M на площину P.

Приклад 50. Знайти проекцію точки $M(1,-2,2)$ на пряму L: $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{2}$ і рівняння перпендикуляра, проведеного з точки M на цю пряму (рис. 2.22).

Розв'язання. Проекцією точки M на пряму L називається основа K перпендикуляра [MK], проведеного до цієї прямої. Запишемо рівняння площини P, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої L. Нормальним вектором площини P є напрямний вектор $\vec{s}=(1,0,2)$ прямої L. Тоді з рівняння (2.8) маємо рівняння площини P: $1(x-1)+0(y+2)+2(z-2)=0$ або $x + 2z - 5 = 0$. Запишемо рівняння прямої L в параметричній формі L: $x = t$, $y = -3$, $z = 2t$. Із системи $x + 2z - 5 = 0$, $x = t$, $y = -3$, $z = 2t$ знаходимо $t = 1$.

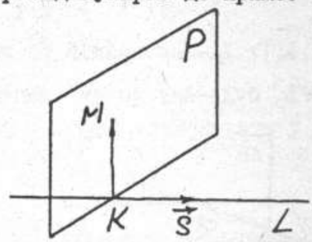


Рис.2.22

Таким чином, $K(1,-3,2)$ - проекція точки M на пряму L. Напрямним вектором перпендикуляра [MK] є вектор $\vec{s} = \overrightarrow{KM} = (0,3,0)$. З виразу (2.16) маємо [MK]: $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{0}$ - канонічні рівняння шуканого перпендикуляра.

Приклад 51. Написати рівняння площини P, яка проходить через точку $M(1,2,0)$ і пряму L: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$ (рис. 2.23).

Розв'язання. З рівняння прямої L маємо, що $M_0(-1,3,0)$ - точка прямої, $\vec{s} = (-2,1,-1)$ - напрямний вектор прямої L. Вектори $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_0M} = (2,-1,0)$ лежать в площині P, тому нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини визначається за формулою

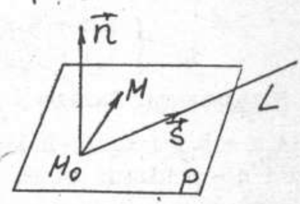


Рис. 2.23

$$\vec{n} = \vec{s} \times \overrightarrow{M_0M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-2,0).$$

Внаслідок цього рівняння площини P має вигляд $-1(x-1)-2(z-2)=0$, або $x + 2z - 1 = 0$.

Приклад 52. Показати, що прямі L_1: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$ і

L_2: $x - y + z - 1 = 0,\ x + y - 2z + 3 = 0$ паралельні. Написати рівняння площини, в якій лежать ці прямі.

Розв'язання. Вектор $\vec{s}_1=(1,3,2)$ – напрямний вектор прямої L_1. Вектори $\vec{n}_1= (1,-1,1)$ і $\vec{n}_2= (1,1,-2)$ – нормальні вектори площин, які перетинаються по прямій L_2, її напрямний вектор –

$$\vec{s}_2= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1,3,2).$$ Таким чином, $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$, і тому $L_1 \| L_2$. На прямій L_1 задано точку $M_1(1,-1,0)$. Виберемо на прямій L_2 будь-яку точку, наприклад $M_2(-1,-2,0)$. Тоді вектори $\vec{s}_1$ і $\overrightarrow{M_1M_2}(-2,-1,0)$ лежать в площині P (рис. 2.24). Тому нормальний вектор $\vec{n}$ площини P визначається за формулою

Рис. 2.24

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2}= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (2,-4,5)$. Використовуючи рівняння (2.8), одержимо рівняння площини P: $2(x-1)-4(y+1)+5(z-0)=0$, або $2x - 4y + 5z-6=0$.

Приклад 53. (в'язка площин, що проходять через задану пряму). Написати рівняння всіх площин, які проходять через пряму L:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2.18)$$

де α і β – довільні числа, які одночасно не перетворюються в нуль $(\alpha^2+ \beta^2 > 0)$.

Очевидно, що при будь-яких α і β рівняння (2.18) є рівнянням площини, тобто рівнянням першого степеня. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ –

довільна точка прямої L:

$$\begin{cases} A_1x_0+ B_1y_0+ C_1z_0+ D_1 = 0, \\ A_2x_0+ B_2y_0+ C_2z_0+ D_2 = 0. \end{cases}$$

Підставимо координати точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в рівняння (2.18). Маємо

$$\alpha(A_1x_0+ B_1y_0+ C_1z_0+ D_1) + \beta(A_2x_0+ B_2y_0+ C_2z_0+ D_2) = 0.$$

Останнє рівняння вказує на те, що площина (2.18) проходить через пряму L. Рівняння (2.18) називається рівнянням в'язки площин, які проходять через пряму L.

Приклад 54. Написати рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(0, 1, -1)$ і пряму L:

$$L: \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Рівняння шуканої площини P можна розшукувати у вигляді (2.18), тобто

$$P: \alpha(2x - y + z + 3) + \beta(x + y - z - 1) = 0.$$

Точка $M_0(0,1,-1)$ належить площині P. Зв'язок між α і β одержимо саме з цієї умови:

$P: \alpha(2\cdot 0 - 1 - 1 + 3) + \beta(0 + 1 - (-1) - 1) = 0$, або $\alpha + \beta = 0$.

Після підстановки в рівняння площини $\beta = -\alpha$ і скорочення α дістанемо рівняння шуканої площини $P: (2x - y + z + 3)-(x + y - z- 1) = 0$, або $x - 2y + 2z + 4 = 0$.

Приклад 55. Написати рівняння площини P, яка проходить через пряму $L_1: \begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ паралельно прямій $L_2: \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

Розв'язання. Рівняння площини P запишемо у вигляді

$P: \alpha(x + y + 1)+ \beta(x - y + z - 2) = 0$, або $(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y + \beta z + (\alpha - 2\beta) = 0$.

Нормальний вектор $\vec{n} = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta)$ площини P ортогональний напрямному вектору $\vec{s} = (1,-3, 2)$ прямої L_2, і тому з умови ортогональності маємо $1\cdot(\alpha + \beta) - 3\cdot(\alpha - \beta) + 2\beta = 0$, або $\alpha = 3\beta$. У рівнянні площини P замінимо параметр α на 3β і скоротимо його на β. Одержимо P: $3(x + y + 1) + (x - y + z - 2) = 0$, або $4x+2y+z+1=0$.

Приклад 56. Написати канонічне рівняння ортогональної проекції l прямої L: $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ на площину P: $x - y + 2z + 1 = 0$.

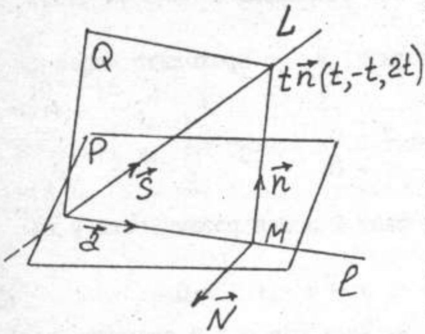


Рис. 2.25

Розв'язання. Запишемо рівняння площини Q, яка проходить через пряму L перпендикулярно до площини P, у вигляді $\alpha(x-y-1)+\beta(2x + z - 1) = 0$, або $(\alpha + 2\beta)x - \alpha y + \beta z - \alpha - \beta = 0$ (рис. 2.25). Нормальний вектор $\vec{n} = (1,-1, 2)$ площини P і нормальний вектор $\vec{N} = (\alpha + 2\beta,-\alpha,\beta)$ площини Q ортогональні. Тому $\alpha + 2\beta + \alpha + 2\beta =0$, або $\alpha = -2\beta$. Після заміни α на $- 2\beta$ у рівнянні площини Q і скорочення лівої частини рівняння площини Q на β будемо мати Q: $-2(x - y - 1) + 2x + z - 1 = 0$, або $2y + z + 1 = 0$. Таким чином, загальне рівняння ортогонально проекції l:

$$\begin{cases} 2y + z + 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Виберемо на прямій l точку $M_0(1,0, -1)$ і визначимо напрямний вектор прямої l:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,\ 1,\ -2).$$ Тоді із рівняння (2.16) одержуємо канонічні рівняння ортогональної проекції прямої L на площину P

$$l:\ \frac{x - 1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{-2}.$$

Інше розв'язання. Точка $M(x,y,z)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли: 1) точка M лежить в площині P, тобто $x - y + 2z=$

$= 0$; 2) існує значення параметра t таке, що точка $K(x+t, y-t, z+2t)$ лежить на прямій L, тобто
$$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ (x + t) - (y - t) - 1 = 0, \\ 2(x + t) + (z + 2t) - 1 = 0. \end{cases}$$
З цієї системи виразимо x, y і z через параметр t. Будемо мати параметричні рівняння шуканої проекції l: $x = 1 - \frac{5}{2}t$, $y = -\frac{1}{2}t$, $z = t - 1$. Якщо виключити параметр t, одержимо канонічні рівняння проекції l: $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1985.

2.Беклемишева Л.А.,Петрович А.Ю.,Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.- М.: Наука,1987.

3.Вища математика. Основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник /Г.Л. Кулініч, В.В. Максименко, В.В. Плахотник та ін.: В 2 кн. - К.: Либідь, 1994. Кн. I.

4.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 3 ч. - М.: Высш шк , 1980. Ч. 1.

5.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.- М.: Наука, 1982.

6.Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1965.

7.Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике.- М: Наука, 1973.

8. Найда Л.С., Рвачев В.А., Колодяжный В.М. Элементы линейной алгебры и теории матриц: Учеб. пособие.- Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1981.

9.Робочий зошит з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Упорядники: І.В. Брисіна, О.В. Головченко, Ю.О. Крашаниця та ін.- Харків: Харк. авіац. ін-т, 1997.

10.Сборник задач по математике: В 4 ч. /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.- М.: Наука,1981. Ч. 1.

11.Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1966.

ЗМІСТ

Олександр Васильович Головченко

Георгій Іванович Кошовий

Леонід Семенович Найда

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 1999
Підписано до друку 04.10.99
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 3,3. Облік.-вид. арк. 3,69. Т. 500 прим.
Замовлення 152. Ціна вільна

Державний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні "ХАІ"
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17