

514
Z-49

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

М.М. Чернецький

ПРОЕКЦІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Навчальний посібник

научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0184484

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА
БІБЛІОТЕКА
Національного аерокосмічного
університету ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Харків "ХАІ" 2000

УДК 514

Проекційна оптимізація /М.М. Чернецький. - Навч. посібник.
- Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. Ін-т", 2000.
- 101 с.

Розглянуто приклади графічного розв'язання оптимізаційних задач лінійного та нелінійного програмування на графічних моделях двовимірному простору та на проекційних моделях тривимірного й багатовимірного просторів.

У навчальному процесі та дослідницькій роботі матеріал посібника може бути використано для розв'язання оптимізаційних задач як технічного, економічного й природничого напрямку, так і прикладного чи наукового змісту.

Для студентів, викладачів і науковців машинобудівного та економічного профілів.

Іл. 53. Бібліогр.: 22 назви.

Рецензенти: канд. техн. наук, проф. В.М. Апухтін,
канд. техн. наук, доц. Ю.М. Тормосов

© Національний аерокосмічний університет
Ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний Інститут", 2000 р.

ПЕРЕДМОВА

Мета посібника - сприяти ознайомленню у навчальному процесі з деякими можливостями застосування графічних, зокрема проєкційних, моделей до розв'язання задач оптимізації як у лінійному, так і у нелінійному програмуванні.

З різних методів, що вживаються при розв'язанні задач оптимізації, методи, які використовують графічні моделі, поширені мало. Проте перевага графічних методів полягає у тому, що вони прості й відразу показують, чи існує розв'язок, чи ні. З другого боку, вони можуть застосовуватись у тих випадках, коли критерій якості є функцією одної або максимум двох незалежних змінних [16, с. 10]. Ця цитата, як і багато інших подібних [5, с. 64; 6, с. 39], вказує на те, що для розв'язання оптимізаційних задач як лінійного, так і нелінійного програмування поки що знайдли застосування лише графічні моделі двовимірного простору. Однак існують проєкційні графічні моделі як тривимірного, так і багатовимірного евклідового простору, які можна вживати при розв'язанні оптимізаційних задач. Прикладами такого застосування моделей багатовимірного простору є роботи П.В. Філіпова та його учнів [14, 15]. Приклад застосування іншої проєкційної моделі багатовимірного простору з тією ж метою наведено у праці [17].

Саме ознайомленню з особливостями застосування проєкційних графічних моделей до розв'язання оптимізаційних задач і служить зміст посібника. Про використання іншого типу графічних моделей, наприклад, номограм або графів, тут не йдеться.

У першому розділі розглядаються загальні питання програмування, а саме формулюється загальна задача лінійного та нелінійного програмування.

У другому розділі наводяться приклади застосування до розв'язання задач оптимізації графічної моделі двовимірного простору, яку одержуємо за допомогою декартової прямокутної системи координат.

У третьому розділі дано приклади використання з тією ж метою проєкційної графічної моделі тривимірного простору-епюра Монжа, а в четвертому - проєкційної графічної моделі багатовимірного простору - ПКП-п.

Мається на увазі, що всі проєкційні моделі можуть знайти застосування при розв'язанні оптимізаційних задач як технічного, економічного чи природничого напрямків, так і практичного чи наукового змісту.

На особливій сподівання заслуговує залучення до використання проєкційних графічних моделей такого засобу графічного моделювання, як моделювання за допомогою ЕОМ.

І. ЗАГАЛЬНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

І.І. Оптимізаційні задачі математичного програмування зводяться до оптимізації (мінімізації чи максимізації) деякої функції – математичної моделі якогось процесу, операції, системи, форми об'єкта та ін. [7, 16, 21, 22].

Зазначену функцію-модель звичайно називають цільовою. До знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) цільової функції за умов-обмежень її зводиться розв'язання задачі оптимізації.

Отже, нехай цільова функція має вигляд

$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$, де $x_i \in E^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, (І.І)
а умови-обмеження, яких m , складаються або з рівнянь h^j ($\exists x$
 p , $j = 1, 2, \dots, p$), або з нерівностей g^j ($\exists x$ $m - p$, $j =$
 $= p + 1, \dots, m$), або з рівнянь та нерівностей:

$$\begin{aligned} h^1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0; \\ h^p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 0; \\ g^{p+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &\leq 0; \\ g^m(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &\leq 0. \end{aligned} \tag{І.2}$$

Розв'язком оптимізаційної задачі є таке екстремальне значення цільової функції (І.І), яке відповідає значенням x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняють також систему (І.2).

І.2. Якщо функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $h^j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $g^j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ – усі лінійні,

то маємо задачу лінійного програмування [7, 22]; якщо ж хоча б одна з них - нелінійна, одержуємо задачу нелінійного програмування [16, 21].

Якщо нелінійні функції - квадратичні, задача оптимізації перетворюється у задачу квадратичного програмування.

1.3. Для графічного розв'язання задачі оптимізації першорядне значення має те, якими геометричними та графічними моделями подаються як цільова функція, так і умови-обмеження. Найпростішими з них є двовимірні графічні моделі, а саме графіки функцій.

1.4. Графічне розв'язання задачі оптимізації здійснюємо за таким алгоритмом:

1) визначаємо геометричні та графічні моделі цільової функції та умов-обмежень: $f, h^1, \dots, h^p, g^{p+1}, \dots, g^m \Rightarrow$
 $\Rightarrow f_{1\dots n}, h^1_{1\dots n}, \dots, h^p_{1\dots n}, g^{p+1}_{1\dots n}, \dots, g^m_{1\dots n};$

2) знаходимо геометричне місце точок (т.м.т.), що являє собою переріз усіх графічних моделей умов-обмежень - умовну фігуру ($U\Phi$), що позначається через σ :

$$\sigma = h^j_{1\dots n} \cap h^{j'}_{1\dots n} \cap g^k_{1\dots n} \cap g^{k'}_{1\dots n}, \text{ де } j, j' = 1, 2, \dots, p, \\ j \neq j', k, k' = p+1, \dots, m, k \neq k';$$

3) визначаємо переріз умовної фігури з графічною моделлю цільової функції: M (або M) = $\sigma \cap f_{1\dots n}$ - екстремальний геометричний елемент (M або M), координати точки (точок) якого (якої) відповідають екстремальному значенню f .

2. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНОЇ МОДЕЛІ ДВОВИМІРНОГО ПРОСТОРУ

2.1. У цьому випадку цільова функція (1.1) набуває вигляду

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad (2.1)$$

де система умов-обмежень (1.2) -

$$h^1(x_1, x_2) = 0;$$

$$h^p(x_1, x_2) = 0; \\ g^{p+1}(x_1, x_2) \leq 0; \quad (2.2)$$

$$g^m(x_1, x_2) = 0.$$

У даному випадку розв'язок - це екстремальне значення цільової функції f , яке відповідає значенням x_1, x_2 , що задовольняють систему (2.2). Очевидно, це можуть бути як координати окремої точки M , так і координати сукупності точок - множини \mathcal{M} точок, що належать якомусь геометричному об'єкту.

2.2. Графічними моделями, що моделюють об'єкти двовимірного простору, є графіки відповідних функцій. Для побудови графіків відповідних функцій (f, h^i, g^j) скористаємося прямокутною декартовою системою координат, однак з протилежним звичайному напрямком відліку вздовж осі $x = x_1$, та позначенням $y = x_2$ (рис. 2.1), що зумовлено необхідністю спрощення подальшого узагальнення у випадках графічного моделювання тривимірного та багатовимірного просторів.

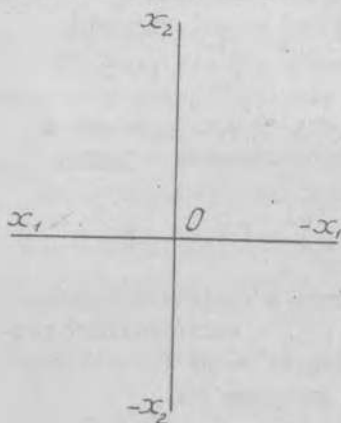


Рис. 2.1

2.3. Розглянемо приклади використання графічної моделі двовимірного простору для розв'язання оптимізаційної задачі лінійного програмування.

Тут $f, h^i, \dots, h^p, g^{p+1}, \dots, g^m \Rightarrow f_{12}, h^i_{12}, \dots, h^p_{12}, g^{p+1}_{12}, \dots, g^m_{12}$ та $\sigma = h^i_{12} \cap h^j_{12} \cap g^k_{12} \cap g^{k'}_{12}$.

Приклад 2.1. Мінімізувати $4x_1 + 5x_2$, якщо $3x_1 - 2x_2 - 2 = 0$, $5x_1 + 10x_2 - 10 \leq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$, а $x_1, x_2 \in E^2$.*

Отже, тут (I.1) та (I.2) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} f: & 4x_1 + 5x_2; \\ h: & 3x_1 - 2x_2 - 2 = 0; \\ g^2: & 5x_1 + 10x_2 - 10 \leq 0; \\ g^3: & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

тобто всі функції, як цільова, так і функції-умови, є лінійними. Надамо функціям f, h^i, g^j аналітичної форми, більш зручної для геометричного, а тому й графічного моделювання - $f_{12}, h^i_{12}, g^j_{12}$:

*) Остання умова має місце в усіх прикладах посібника.

$$\left. \begin{aligned} f: 4x_1 + 5x_2; \\ h^1: 3x_1 - 2x_2 - 2 = 0; \\ g^2: 5x_1 + 10x_2 - 10 \leq 0; \\ g^3: x_1 x_2 \geq 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}^0: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} = I; \\ h_{12}^1: \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} = I; \\ g_{12}^2: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{1} = I; \\ g_{12}^3: 0x_1^+ x_2^+, \end{aligned} \right.$$

де $c > 0 - \text{const}$, яка є параметром сім'ї паралельних прямих (рис.2.2). До нього належить і шукана пряма f_{12}^{min} (з мінімальним значенням параметра c), що несе на собі точку M , координати якої відповідають мініальному значенню f . Довільну пряму сім'ї прямих f_{12} одержуємо, прийнявши $c = 20$. Позначимо її через $f_{12}^0: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} = I$.

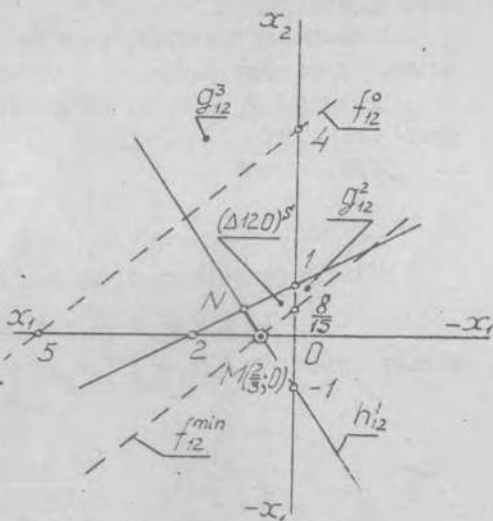


Рис. 2.2

Умова-обмеження h^1 моделюється прямою h_{12}^1 , умова-обмеження g^2 - нижньою координатною півплощиною, обмеженою прямою $g_{12}^2 = 0$, і до якої належить початок системи координат, умова-обмеження g^3 - додатним координатним квадрантом $g_{12}^3: x_1^+ 0 x_2^+$.

Враховуючи, що $h_{12}^1 \cap x_1^+ 0 x_2^+ = [M, +\infty)$ - промінь з кінцевою точкою $M(\frac{2}{3}; 0)$, а $g_{12}^2 \cap x_1^+ 0 x_2^+ = (\Delta I20)^5$ - відрізок квадранта $x_1^+ 0 x_2^+$, обмежений $\Delta I20$, одержуємо, нарешті, відрізок $MN = [M, +\infty) \cap (\Delta I20)^5$, координати всіх точок якого задовольняють умови $h^1, g^2, g^3: УФ = 6$. Саме точка $M(\frac{2}{3}; 0)$ і є точкою, що визначає мінімальне значення параметра c цієї

льової функції, тобто у даному випадку найнижчу пряму з тих, що перетинають відрізок $MN - f_{12}^{\min} : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{15} = 1$. Значення ж цільової функції у точці $M - f^{\min}(\frac{2}{3}; 0) = \frac{8}{3}$.

2.4. Якщо цільова функція (або хоча б одна з умов-обмежень) є нелінійною, маємо справу з задачею нелінійного програмування. Коли нелінійна функція – квадратична, то маємо задачу квадратичного програмування.

Розглянемо приклади, коли на нелінійну цільову функцію накладено лише одну умову.

Приклад 2.2 [16, с. 367]. Мінімізувати $x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9$, якщо $x_1, x_2 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$f : x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9;$$

$$g^1 : x_1, x_2 \geq 0.$$

Цільова функція графічно моделюється сім'єю кіл, бо

$$f : x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 + 9 \Rightarrow f_{12} : (x_1 + 3)^2 + x_2^2,$$

а тому, поклавши $(x_1 + 3)^2 + x_2^2 = C^2 = R^2$, одержуємо сім'ю концентричних кіл з центром

$\bar{O}(-3; 0)$ та параметром $C = R$ – радіусом. Приймаючи $C = R = 4$, одержуємо графічну модель довільного кола цієї сім'ї:

$$f_{12}^0 : (x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 16 \quad (\text{рис. 2.3}).$$

Умова g^1 графічно моделюється, як і у попередньому прикладі, додатним квадрантом координатної площини: $x_1^+ 0 x_2^+ = g_{12}^1$. Він у даному випадку є умовною фігурою: $U\Phi = \sigma$. Тож

найближча точка додатного квадранта до центра сім'ї кіл (\bar{O}) – початок системи координат $O = M(0; 0)$, а радіус кола мінімального радіуса, яке несе на собі хоча б одну точку M квадранта – $R = 3$.

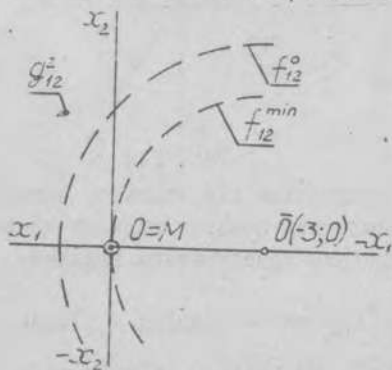


Рис. 2.3

Отже, мінімальним значенням цільової функції, що задовольняє умову-обмеження, є

$$f^{\min} = f(0;0) = (x_1 + 3)^2 + x_2^2 = 3^2.$$

Що складніше розв'язується аналогічна задача у випадку цільової функції, яка моделюється еліпсом.

Приклад 2.3. Мінімізувати $4(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2$, якщо $x_1, x_2 \geq 0$.

Тож маємо:

$$f: 4(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2;$$

$$g^1: x_1, x_2 \geq 0.$$

Поклавши $4(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2 = c^2$, помічаємо, що цільова функція моделюється тут сім'єю еліпсів з центром $O(-2; -3)$ та параметром c , адже

$$f: 4(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 3)^2 = c^2 \Rightarrow f_{12}: \frac{(x_1 + 2)^2}{(\frac{c}{2})^2} + \frac{(x_2 + 3)^2}{c^2} = 1.$$

Надавши значення параметру $c = 6$, одержуємо $f_{12}^0: \frac{(x_1 + 2)^2}{3^2} + \frac{(x_2 + 3)^2}{36} = 1$ - довільний еліпс сім'ї \mathcal{E} (рис. 2.4).

Розв'язання задачі й тут зводиться до визначення мінімального значення параметра c . Мініальному ж значенню c повинні відповідати осі найменшої довжини (рис. 2.5). Отже, достатньо визначити еліпс, який хоча б дотикався до квадранта $x_1^+ \cup x_2^+$ - $УФ = 6$.

На рис. 2.5 видно, що такий еліпс визначає точка мінімуму $M(0;0)$, як найближче розташована від центра сім'ї.

Отже, $f^{\min} = f(0;0) = 25$. Для знаходження мінімального значення f не знадобилися тут і мінімальне значення параметра c . І побудова мінімального еліпса.

Якби виникла потреба у побудові останнього, це можна було б виконати так, як показано на рис. 2.5. Відрізки $A\bar{O}$ та

\bar{A} Графічну побудову еліпса доцільно виконати за допомогою якоїсь з відомих побудов за двома осями.

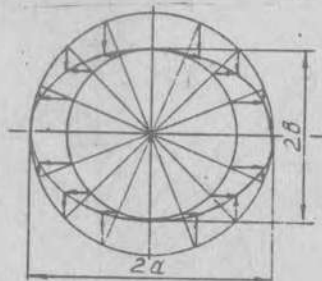


Рис. 2.4

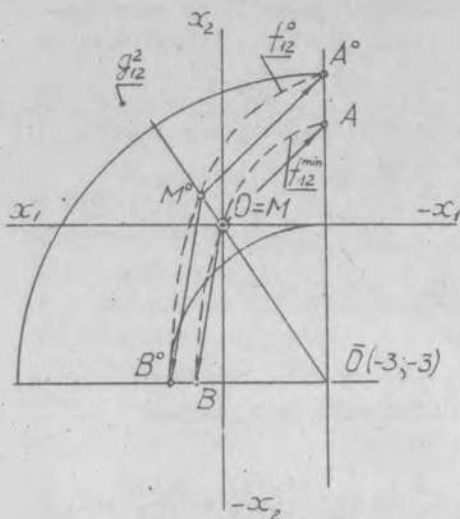


Рис. 2.5

Якщо при графічному моделюванні оптимізаційної задачі квадратичного програмування використовуються лише прямі та кола, ускладнень мало.

Приклад 2.4 [16, с. 395]. Мінімізувати $-x_1 - x_2$, якщо $9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$, тобто

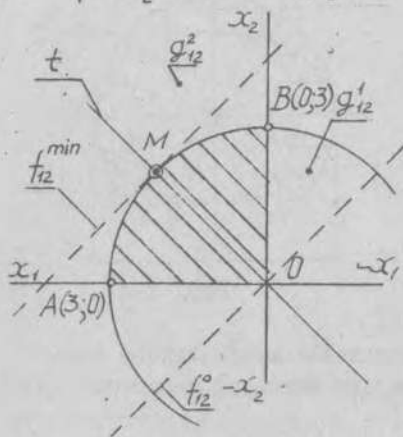


Рис. 2.6

$\bar{O}\bar{O}$ - півосі еліпса f_{12}^{\min} .

Значно простіше було б мінімізувати $4(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ за умови q^1 : $x_1, x_2 \geq 0$. У цьому випадку центр $\bar{O}(2;3)$ сім'ї еліпсів f_{12} : $\frac{(x_1 - 2)^2}{(c/2)^2} + \frac{(x_2 - 3)^2}{c^2} = 1$

належить квадранту $q_{12}^1 = x_1^+ 0 x_2^+$ і тому всім еліпсам сім'ї належить хоча б одна з точок квадранта. Звідси випливає, що мінімальною точкою тут є $M = \bar{O}(2;3)$, а $f^{\min} = f(2;3) = 0$.

Якщо при графічному

$$\left. \begin{aligned} f: & -x_1 - x_2; \\ q^1: & 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0; \\ q^2: & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: & -(x_1 + x_2); \\ q_{12}^1: & x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0; \\ q_{12}^2: & 0x_1^+ x_2^+. \end{aligned} \right.$$

Отже, цільова функція графічно моделюється сім'єю паралельних прямих (рис. 2.6), умова q^2 - додатним квадрантом q_{12}^2 , а умова q^1 - кругом з центром O радіусом $R = 3$ (q_{12}^1). Г.м.т., що задовольня-

ють умови g^1 та g^2 , є відсік-сектор АВО квадранта $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ - УФ = б. Оскільки сектор АВО є г.м.т. з додатними значеннями координат, то саме точка, приналежна АВО, з максимальною сумою додатних координат повинна забезпечити мінімум виразу $-(x_1 + x_2)$. Точку мінімуму M знаходимо як точку дотику до дуги АВ однієї з прямих f_{12}^{min} сім'ї $-f_{12} : x_1 + x_2 = C$. Точку M визначаємо так: будемо прямою $t \geq 0 \wedge t \perp f_{12}^0$, $M = t \cap g_{12}^1$, де $g_{12}^1 = 0$ - коло. Маємо $M(2, 1; 2, 1)$ та $f^{min} = f(2, 1; 2, 1) = -4, 2$.

Якби вираз $-(x_1 + x_2)$ треба було б максимізувати, то точкою максимуму, очевидно, була б $O = M(0; 0)$ - початок системи координат.

Аналогічно розв'язується й екстремальна задача у такому прикладі, хоч тут уже цільова функція моделюється сім'єю концентричних кіл.

Приклад 2.5 [16, с. 333]. Мінімізувати $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$, якщо $x_1 + x_2 - 4 = 0$, а $x_1, x_2 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{array}{l} f : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2; \\ h^1 : x_1 + x_2 - 4 = 0; \\ g^2 : x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{12} : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = C^2; \\ h^1_{12} : \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} = 1; \\ g^2_{12} : 0 \leq x_1, x_2. \end{array} \right.$$

Отже, цільова функція графічно моделюється сім'єю концентричних кіл з центром $\bar{O}(3; 2)$ та параметром-радіусом $c = R$. Оскільки графічна модель g^2 - додатний квадрант $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, а графічна модель h^1 - пряма, то тільки відрізок $AB = h^1_{12} \cap x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (АВ - УФ = б) може належати точка мінімуму f . Її визначаємо як найближчу до \bar{O} основу перпендикуляра, опущеного з центра \bar{O} на $[AB] : t \cap [AB] = M$ (рис. 2.7).

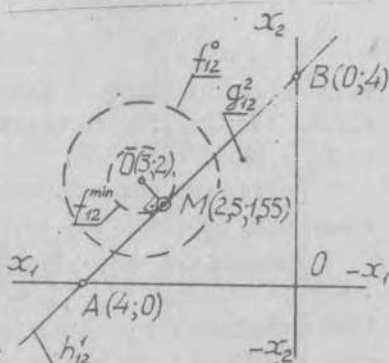


Рис. 2.7

Точка мінімуму $M(2, 5; 1, 55)$, а мінімальну цільову функцію f^{min} графічно моделює коло радіусом $R = |\bar{O}M| \approx 0, 673$,

і тому $f^{\min} \approx 0,4525$.

У наступному прикладі точка мінімуму вже належить дузі кола.

Приклад 2.6 [16, с. 368]. Мінімізувати $x_1^2 + x_2^2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 - 9x_2 + 4,25 = 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{aligned} f: x_1^2 + x_2^2; \\ h^1: x_1^2 + x_2^2 - 9x_2 + 4,25 = 0; \\ g^2: x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: x_1^2 + x_2^2 = c^2; \\ h_{12}^1: x_1^2 + (x_2 - 4,5)^2 - 16 = 0; \\ g_{12}^2: 0x_1^+, x_2^+. \end{aligned} \right.$$

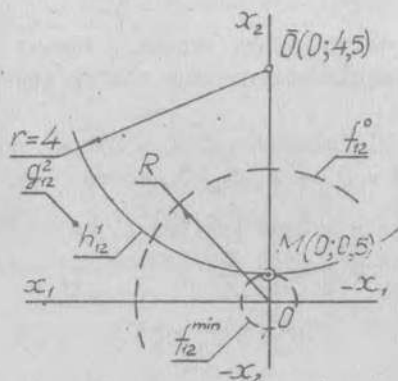


Рис. 2.8

точка мінімуму цільової функції. Ця точка - $M = h_{12}^1 \cap 0x_2$. Оскільки $M(0; 0,5)$, то одержуємо $f^{\min} = f(0; 0,5) = x_1^2 + x_2^2 = (0,5)^2$.

Розглянемо приклад, коли г.м.т., що задовольняють умови обмеження, визначається чотирма умовами.

Приклад 2.7 [21, с. 248]. Мінімізувати $-3x_1 - x_2$, якщо $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - \frac{9}{4} \leq 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$, $0 \leq x_1 \leq 2$ та $0 \leq x_2 \leq 2$.

Маємо:

Сім'я концентричних кіл з центром O і радіусом-параметром $c = R$ графічно моделює цільову функцію. Умова h^1 графічно моделюється тем колом з центром у точці $O(0; 4,5)$ і радіусом $r = 4$ (рис. 2.8).

Умову g^2 графічно моделює додатний квадрант $g_{12}^2 = x_1^+ \cap x_2^+$. Отже, дуга $AM = x_1^+ \cap x_2^+ \cap h_{12}^1$ саме й є г.м.т. - $U\Phi = \sigma$, що задовольняють умови h^1 та g^2 .

Звідси випливає: Її належить

$$\left. \begin{aligned}
 f &: -3x_1 - x_2; \\
 g^1 &: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - \frac{9}{4} \leq 0; \\
 g^2 &: x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0; \\
 g^3 &: 0 \leq x_1 \leq 2; \\
 g^4 &: 0 \leq x_2 \leq 2.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{12} &: -(3x_1 + x_2) = -c; \\
 g_{12}^1 &: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0; \\
 g_{12}^2 &: x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0; \\
 g_{12}^3 &: 0 \leq x_1 \leq 2; \\
 g_{12}^4 &: 0 \leq x_2 \leq 2.
 \end{aligned} \right.$$

Нехай $f_{12} : -(3x_1 + x_2) = -c \Rightarrow \frac{x_1}{\frac{c}{3}} + \frac{x_2}{c} = 1$, де $c =$

const (параметр). Маємо сім'ю паралельних прямих, що графічно моделюють цільову функцію (рис. 2.9). Умова g^1 графічно моделюється кругом з центром у точці $\bar{O}(2;2)$ радіусом

$r_1 = \frac{3}{2}$, а умова g^2 - кругом з центром у початку системи координат O радіусом $r_2 = 2$.

Умови g^3 та g^4 графічно моделюються відповідно вертикальною та горизонтальною смугами, обмеженими вертикальними та горизонтальними прямими відповідно: g_{12}^3 - вертикальна, g_{12}^4 - горизонтальна смуги.

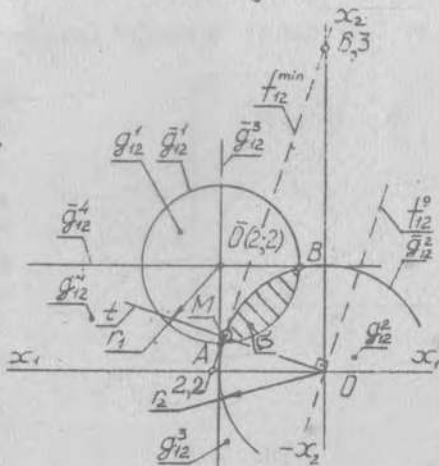


Рис. 2.9

Усі перелічені умови задовольняються координатами точок г.м.т. ($УФ = c_1$), обмеженого двома дугами AB , одна з яких належить колу \bar{g}_{12}^1 круга g_{12}^1 , а друга - колу \bar{g}_{12}^2 круга g_{12}^2 .

Отже, та пряма з сім'ї, що відповідає мінімальному значенню цільової функції, має бути дотичною до $\cup AB \subset \bar{g}_{12}^1$. Точку дотику знаходимо, як точку перетину перпендикуляра $t \perp f_{12}$ з колом \bar{g}_{12}^1 : $M = t \cap \bar{g}_{12}^1$. Одержуємо $M(1, 0,7)$.

Аналітична модель цільової функції, що відповідає мінімальному значенню, має вигляд $f^{\min} : \frac{x_1}{2,2} + \frac{x_2}{0,3} = 1$. її міні-

мальне значення - $f^{min} \approx -6,4$.

Далі розглянемо приклад, коли одна з умов-обмежень моделюється г.м.т., обмеженням еліпсом.

Приклад 2.8 [16, с. 444]. Мінімізувати $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, якщо $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$, $\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \leq 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$.

Отже:

$$\left. \begin{aligned} f: & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2; \\ h^1: & x_1 - 2x_2 - 1 = 0; \\ g^2: & \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{1} - 1 \leq 0; \\ g^3: & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = c^2; \\ h_{12}^1: & \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-\frac{1}{2}} = 1; \\ g_{12}^2: & \frac{x_1^2}{2^2} + \frac{x_2^2}{1} \leq 1; \\ g_{12}^3: & 0x_1^+, 0x_2^+. \end{aligned} \right.$$

де $c = \text{const}$ є радіус (параметр).

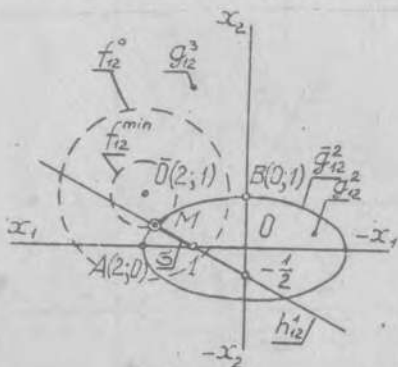


Рис. 2.10

Цільова функція моделюється сім'єю кіл з центром $\bar{O}(2;1)$ (рис. 2.10). Умова h^1 моделюється як пряма, що перетинає осі Ox_1 та Ox_2 у точках 1 та $-\frac{1}{2}$ відповідно. Умова g^2 графічно моделюється г.м.т. g_{12}^2 обмеженням еліпсом з центром у точці O та осями $2a = 4$ та $2b = 2$.

Беручи до уваги умови-обмеження, маємо $g_{12}^2 \cap x_1^+ \cap x_2^+ = \varepsilon^{AB}$ -

чверть г.м.т., яку обмежує дуга AB , а далі $\varepsilon^{AB} \cap h^1 = [M1]$ - г.м.т., координати яких задовольняють усі умови-обмеження (тобто $UF = 6$).

Отже, точкою, що визначає коло найменшого радіуса - графічну модель f^{min} , тобто точков мінімуму, є саме точка $M(1,85; 0,45)$, а $c \approx 0,57$.

Коло мінімального радіуса з сім'її концентричних кіл (графічної моделі цільової функції) має вигляд $f_{12}^{min}: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 3,23$.

У наступних двох прикладах цільова функція графічно моделюється гіперболою.

Приклад 2.9 [21, с. 242]. Мінімізувати x_2 , якщо $I - x_1 x_2 \geq 0$, $2x_1 - x_2 \geq 0$, а $x_1, x_2 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{array}{l} f: x_2; \\ g^1: I - x_1 x_2 \geq 0; \\ g^2: 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ g^3: x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{12}: x_2 = c; \\ g_{12}^1: x_1 x_2 - I < 0; \\ g_{12}^2: x_2 - 2x_1 \leq 0; \\ g_{12}^3: 0x_1^+ x_2^+. \end{array} \right.$$

Помічаємо, що графічна модель цільової функції - це сім'я горизонтальних прямих з параметром c . Умова g^1 моделюється відсіком, частково обмеженим гіперболою $x_1 x_2 = I$ та її асимптотами - осями координат (рис. 2.11, 2.12)*, умова g^2 - відсіком, обмеженим прямою \bar{g}_{12}^2 та віссю Ox_1 , і нарешті, умова g^3 - квадрантом $x_1^+ 0 x_2^+$.

Отже, г.м.т., що задовольняють обмеження - відсік квадранта $x_1^+ 0 x_2^+$, обмежений сторонами кута $\sqrt{g_{12}^2}, 0x_1$, та дугою гіперболи $\bar{g}_{12}^1 - U\Phi = 0$.

Максимальне значення f має у точці $M = f_{12}^{\max} \cap g_{12}^1: M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Приклад 2.12 [16, с. 338].

Максимізувати x_1, x_2 , якщо $25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$.

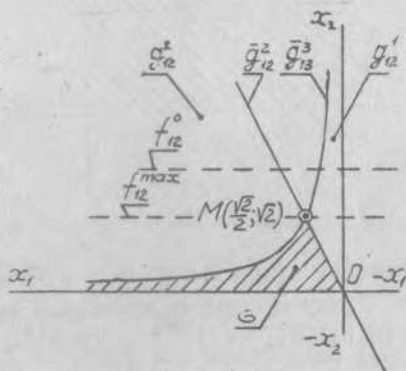


Рис. 2.11

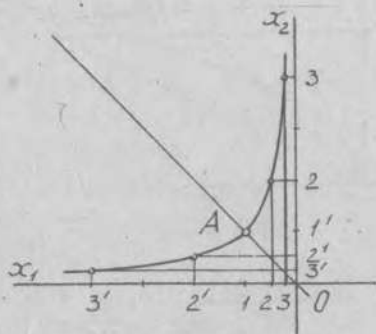


Рис. 2.12

Отже, маємо:

* Побудова цієї гіперболи за її асимптотами та вершиною (тут $A(1;1)$) здійснюється так, як показано на рис. 2.12.

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1, x_2; \\ g^1: 25 - x_1^2 - x_2^2 > 0; \\ g^2: x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{12}: x_1, x_2 = c; \\ g_{12}^1: x_1^2 + x_2^2 \leq 25; \\ g_{12}^2: 0 x_1^+, x_2^+. \end{array} \right.$$

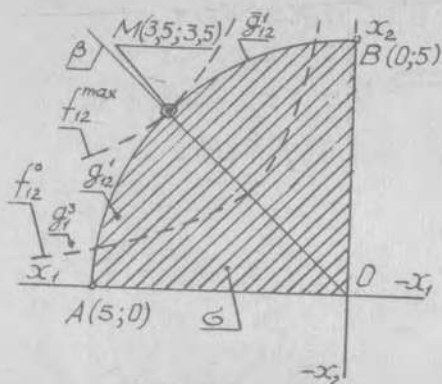


Рис. 2.13

обмежений дугою $AB \subset \bar{g}_{12}^1 - \text{УФ} = \sigma$.

Точку максимума знаходимо так: $M = \beta \cap \cup AB$. Оскільки $M(3,5; 3,5)$, то $f^{\max} \approx (3,5)^2$.

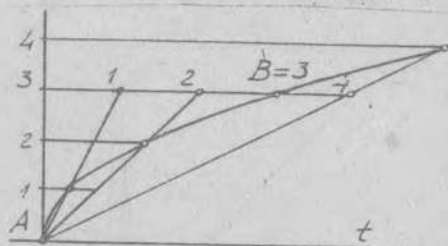


Рис. 2.14

Цільова функція тут графічно моделюється сім'єю гіпербол з параметром c , асимптотами - осями координат та вершинами на бісектрисі β додатного координатного кута (рис. 2.13).

Умова g^1 моделюється кругом з центром у початку координат та радіусом $R = 5$.

Г.м.т., що задовольняють усі умови-обмеження, є сектор $\sigma = g_{12}^1 \cap x_1^+ \cap x_2^+$.

У наступних прикладах розділу є випадки, коли або цільова функція, або умова-обмеження графічно моделюється параболою. Тому на рис. 2.14 подано графічну побудову параболи за її вершиною A , віссю t та довільною точкою B , що їй належить.

Приклад 2.11 [16, с. 472]. Мінімізувати $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, якщо $-x_1^2 + x_2 \geq 0$, $-x_1 - x_2 + 2 \geq 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$.

Звідси маємо:

$$\left. \begin{aligned} f: & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2; \\ g^1: & -x_1^2 + x_2 \geq 0; \\ g^2: & -x_1 - x_2 + 2 \geq 0; \\ g^3: & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = c^2; \\ g_{12}^1: & x_1^2 - x_2 \leq 0; \\ g_{12}^2: & \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \leq 1; \\ g_{12}^3: & 0 \leq x_1, x_2. \end{aligned} \right.$$

Цільова функція графічно моделюється сім'єю концентричних кіл f_{12} з центром у точці $\bar{O}(2;1)$ з параметром-радіусом c .

Умова g^1 моделюється г.м.т. g_{12}^1 обмеженням параболою, а g^2 - нижньою координатною півплощиною g_{12}^2 . II відсікає пряма g_{12}^3 - Г.м.т.

($c = \sqrt{f}$), що відповідають усім умовам-обмеженням, виявляється відсік координатної площини, обмежений дугою OM (параболі g_{12}^1 , відрізком MB прямої g_{12}^2 та відрізком BO осі координат Ox_2 (рис. 2.15).

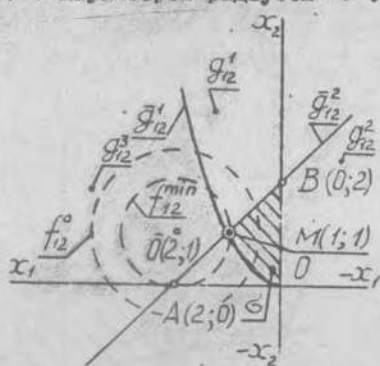


Рис. 2.15

Легко помітити, що найближчою до центра сім'ї кіл точкою цієї фігури є M . Отож, саме вона й визначає коло мінімального радіуса f_{12}^{\min} .

Маємо $M(1;1)$, $f_{12}^{\min}: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ та $f^{\min} = 1$.

Приклад 2.12 [2I, с. 225]. Мінімізувати $(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 7)^2$, якщо $x_1^2 - 3,5x_2 \leq 0$, $x_1 - (x_2 - 3)^2 + 2,2 \leq 0$, $-x_1 + x_2 - 6 \leq 0$ та $x_1 - 2x_2 + 1,5 \leq 0$, тобто:

$$\left. \begin{aligned} f: & (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 7)^2; \\ g^1: & x_1^2 - 3,5x_2 \leq 0; \\ g^2: & x_1 - (x_2 - 3)^2 + 2,2 \leq 0; \\ g^3: & -x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ g^4: & x_1 - 2x_2 + 1,5 \leq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: & (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 7)^2 = c^2; \\ g_{12}^1: & x_1^2 - 3,5x_2 \leq 0; \\ g_{12}^2: & x_1 - (x_2 - 3)^2 + 2,2 \leq 0; \\ g_{12}^3: & -\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} \leq 1; \\ g_{12}^4: & -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} \geq 1. \end{aligned} \right.$$

Графічна модель цільової функції f_{12} - сім'я кіл з центром $\bar{O}(-4;7)$ та радіусом-параметром C . Умова g^1 моделюється відсіком координатної площини g_{12}^1 , обмеженим параболою \bar{g}_{12}^1 , g^2 - відсіком координатної площини g_{12}^2 , обмеженим параболою \bar{g}_{12}^2 , g^3 - нижньою півплощиною g_{12}^3 , що відсікається від координатної площини $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ прямою \bar{g}_{12}^3 , g^4 - верхньою півплощиною квадранта $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ над прямою \bar{g}_{12}^4 .

В одержаного г.м.т. ($\sigma = \text{УФ}$), що задовольняють усі умови-обмеження і належать фігурі $\sigma = ABCDE$ (рис. 2.16), найближчою до \bar{O} є точка M . Її знаходимо як основу перпендикуляра t , опущеного з \bar{O} на \bar{g}_{12}^3 : $M = t \cap \bar{g}_{12}^3$.

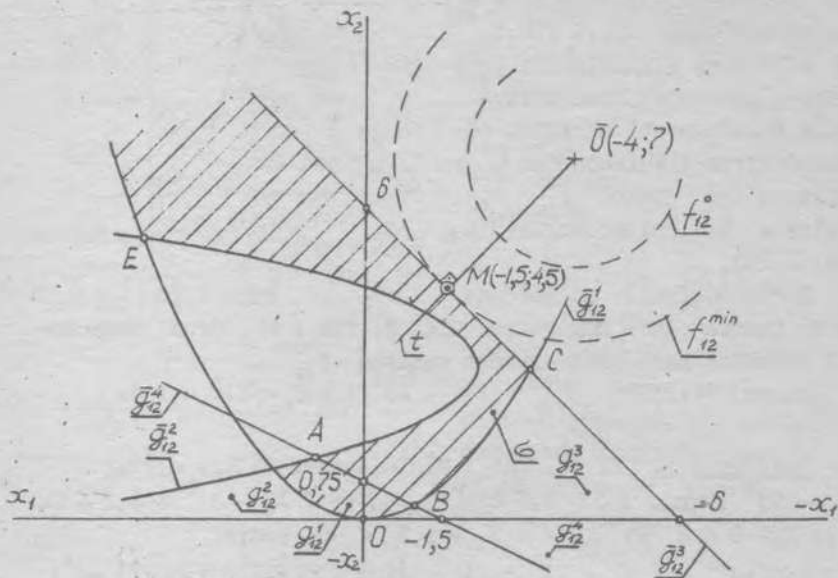


Рис. 2.16

Маємо $M(-1,5;4,5)$, $f_{12}^{\min} : (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 7)^2 = (3,55)^2$ та $f_{12}^{\min} \approx (3,55)^2$.

Приклад 2.13 [16, с. 243]. Мінімізувати $4x_1 - x_2^2 - 12$, якщо $25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, $10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 = 0$ та $x_1, x_2 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{aligned} f: 4x_1 - x_2^2 - 12; \\ h^1: 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0; \\ g^2: 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 \geq 0; \\ g^3: x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{12}: 4(x_1 - C) - x_2^2; \\ h_{12}^1: x_1^2 + x_2^2 = 5^2; \\ g_{12}^2: (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 - 4^2 \leq 0; \\ g_{12}^3: 0x_1^+ x_2^+, \end{aligned} \right.$$

де C - параметр сім'ї парабол f_{12} , що графічно моделює цільову функцію. За f_{12}^0 можна, звичайно, приймати як $4(x_1 - 3) - x_2^2$, так і $4x_1 - x_2^2$, побудова якої зручніша.

Умова h^1 моделюється колом h_{12}^1 радіусом $R = 5$ та з центром у початку координат, умова g^2 - кругом g_{12}^2 , обмеженим колом \bar{g}_{12}^2 радіусом $r = 4$ з центром у точці $\bar{O}(5;5)$, умова g^3 , як звичайно, моделюється додатним квадрантом координатної площини: $g_{12}^3 = x_1^+ \cap x_2^+$ (рис. 2.17).

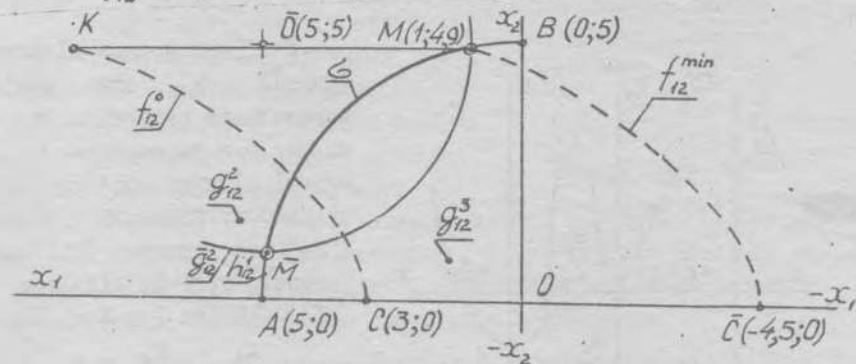


Рис. 2.17

Г.м.т. ($\sigma = \cup \Phi$), що задовольняють усі умови-обмеження, є дуга $(\cup MM\bar{M})$ кола $h_{12}^1: h_{12}^1 \cap g_{12}^3 \cap h_{12}^1 \cap g_{12}^2 = \cup MM\bar{M}$. Саме кінець дуги M і є точкою, що визначає параболу f_{12}^{\min} - модель мінімальної цільової функції: $M(1;4,9)$, $f_{12}^{\min}: 4(x_1 + 4,9) - x_2^2$ і, нарешті, $f_{12}^{\min}(1;4,9) \approx -0,5$.

Точки параболу f_{12}^{\min} одержуємо за допомогою геометричного перетворення - переносу $f_{12}^0 \longrightarrow f_{12}^{\min}$ за радіусом-вектором \overline{KM} , кінцеву точку K якого одержуємо як точку перетину: $f_{12}^0 \cap (x_2 = 4,9) = K$.

Це ж геометричне перетворення застосовується у наступному прикладі.

Приклад 2.14 [21, с. 237]. Мінімізувати $-x_1$, якщо $x_2 = x_1^2 - 1$ (де $x_1 < 1$), $x_2 = 0$ (де $1 \leq x_1 \leq 2$), $x_2 = 2x_1 - 4$ (де $x_1 > 2$) та $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$, тобто:

$$\left. \begin{array}{l} f: -x_1; \\ h^1: \begin{cases} x_2 = x_1^2 - 1, x_1 < 1; \\ x_2 = 0, 1 \leq x_1 \leq 2; \\ x_2 = 2x_1 - 4, x_1 > 2; \end{cases} \\ g^2: x_1 \geq 0; \\ g^3: x_2 \leq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{12}: x_1 = C; \\ h'_{12}: \begin{cases} x_1^2 = x_2 + 1, x_1 < 1; \\ x_2 = 0, 1 \leq x_1 \leq 2; \\ \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{4} = 1, x_1 > 2; \end{cases} \\ g'_{12}: x_1 \geq 0 \quad (x_1^+ 0 x_2^+ 0 x_1^+ 0 x_2^+); \\ g'_{12}: x_2 \leq 0 \quad (x_1^+ 0 x_2^- 0 x_1^- 0 x_2^-). \end{array} \right.$$

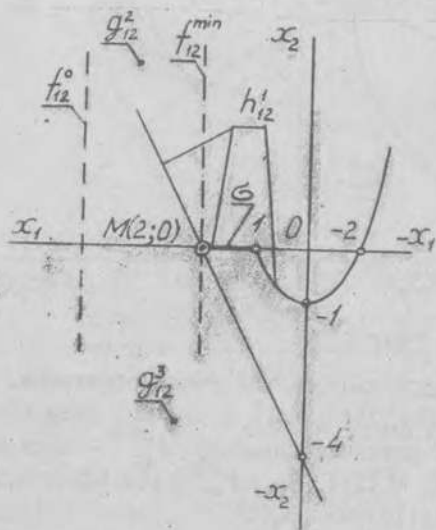


Рис. 2.18

Графічна модель цільової функції $-f_{12}$, отже, сім'я паралельних вертикальних прямих $-x_1 = C$. Окремі ділянки графіка h'_{12} складають: парабола з віссю $0x_2$ та вершиною $(0;1)$ на промені $x_1 < 1$, відрізок $[12] \leq 0x_1$ (на $1 \leq x_1 \leq 2$), пряма $\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{4} = 1$ на промені $x_1 > 2$ (рис. 2.18).

Усім умовам-обмеженням відповідають точки відрізка $[12] = U\Phi = \emptyset$, а тому екстремальною точкою виявляється $M(2;0)$, бо $f^{min} = -2$, а f'_{12} — пряма $x_1 = 2$.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНОЇ МОДЕЛІ ТРИВИМІРНОГО ПРОСТОРУ

У даному посібнику обмежимося використанням лише проєкційної моделі E^3 , відомої під назвою "КП", або епюр Монжа.

Як відомо, КП, що моделює весь простір E^3 , має позначення, наведені на рис. 3.1,а. Якщо ж моделюється лише додатний октант простору E^3 , достатньо обмежитися позначеннями, поданими на рис. 3.1,б. З площиною КП тут суміщуються три площини проєкцій: Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} - горизонтальна, фронтальна та профільна.

З подальшого викладу стане зрозумілим, що при графічному моделюванні навіть тривимірного простору особливого значення набуває врахування взаємного розташування геометричних моделей

цільової функції, умов-обмежень та площин проєкцій. Геометричні колізії, що при цьому виникають, розв'язуються методами нарисної геометрії, а у випадку оперування виродженими проєкціями-моделями - за допомогою планіметричних побудов.

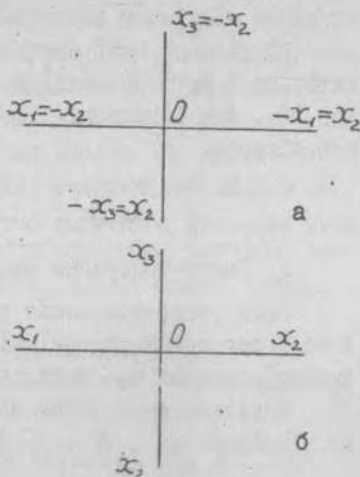


Рис. 3.1

3.1. Застосування проєкційних графічних моделей

до розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування

Попередньо розглянемо види умовної фігури ($U\Phi = B$) та її графічної моделі (σ_{12} , σ_{13} та σ_{23}).

3.1.1. При лінійному програмуванні в межах E^3 цільова функція моделюється площиною, а $U\Phi$ являє собою відсік E^3 : точку, відрізок, промінь, пряму, півпростір E^3 або просторову фігуру, обмежену багатогранною поверхнею, грані якої - відсіки площин (геометричних моделей) умов-обмежень, а йноколи й відсіки Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} або, нарешті, фігуру, обмежену багатогранною поверхнею з гранями-відсіками площин-умов, гранями-відсі-

ками Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} .

Оскільки кожен з відріків E^3 у даному разі є опуклою фігурою, то й перетин цих відріків являє собою опуклу фігуру, а тому й проєкції УФ у проєкційні поля Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} теж є опуклими відріками зазначених проєкційних полів [4].

УФ несе на собі екстремальний елемент \mathcal{M} цільової функції, який (як і його проєкції у Π_{12} , Π_{13} та Π_{23}) може бути як точкою M , так і прямою, променем, відрізком чи багатокутною плоскою фігурою.

3.1.2. Розглядаючи види УФ обмежимося такими УФ, точки яких належать додатному октанту E^3 (позначення якого $0x_1^+x_2^+x_3^+$).

А. Умова-обмеження одна.

Якщо умова-обмеження одна у вигляді рівняння h , що має в собі три незалежні змінні, то вона геометрично моделюється у вигляді площини h_{123} загального положення.

Оскільки аналітичне подання площини загального положення (у відрізках a , b , c) маємо у вигляді

$$h_{123}: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1, \quad (3.1)$$

де $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ($0x_1^+x_2^+x_3^+$), то можливі варіанти графічної моделі УФ $= h_{123} \cap 0x_1^+x_2^+x_3^+$:

І) $a, b, c > 0$; тоді графічна модель УФ на КП набуває вигляду рис.3.2, а, де $h_{12} = h_{123} \cap \Pi_{12}$, $h_{13} = h_{123} \cap \Pi_{13}$ та $h_{23} = h_{123} \cap \Pi_{23}$, тобто графічна модель складається з трикутних відріків h_{12} , h_{13} та h_{23} :

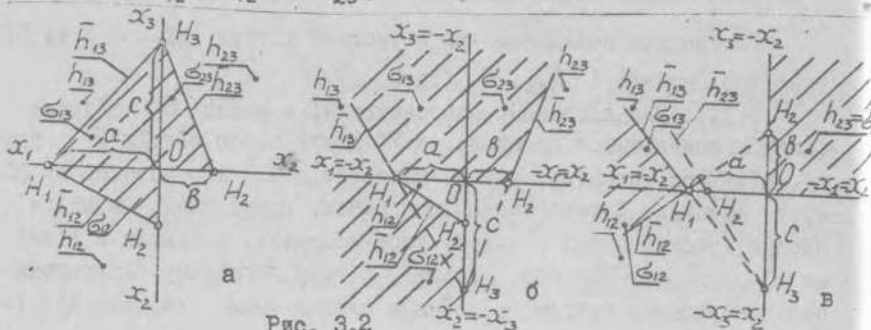


Рис. 3.2

2) якщо одна з величин a, b, c від'ємна, наприклад, $c < 0$, то графічна модель h набуває вигляду рис. 3.2,б; тут скінченною стороною відсіків залишається лише \bar{h}_{12} , а \bar{h}_{13} та \bar{h}_{23} - промені, що обмежують графічну модель УФ ($h \cap 0x_1^+ x_2^+ x_3^+$) - відсіки h_{12}, h_{13} та h_{23} ; точки оригіналу несуть на собі лише відрізок \bar{h}_{12} та промені $\bar{h}_{13}, \bar{h}_{23}$;

3) якщо ж два з відрізків по осях від'ємні, то відсік графічної моделі УФ (відсік $h_{12} \cup h_{13}$) обмежується вже лише двома променями $\bar{h}_{12}, \bar{h}_{13}$, бо \bar{h}_{23} не несе на собі точок додатного октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ (рис. 3.2,в); графічну модель УФ, крім відсіків h_{12} та h_{13} , складає ще й $h_{23} = 0x_2 x_3$, але цей відсік не несе на собі точок оригіналу;

4) якщо всі три $a, b, c < 0$, то одержуємо випадок, коли на проєкційних полях Π_{12}, Π_{13} та Π_{23} немає жодної точки, яка б задовольняла умову (3.1).

Якщо умова-обмеження h має у собі лише дві незалежні змінні, то геометричною моделлю її є площина окремого випадку положення.

$$\text{Нехай } h_{123}: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1, \text{ де } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

($0x_1^+ x_2^+ x_3^+$). Тут h моделюється горизонтально-проєкціуючою площиною $h_{123} \perp \Pi_{12}$, а графічна модель УФ має такі різновиди:

а) якщо $a, b > 0$, то (рис. 3.3,а) горизонтальна проєкція УФ - відрізок \bar{h}_{12} , а фронтальна h_{13} та профільна h_{23} - смуги-відсіки, обмежені вертикальними променями \bar{h}_{13} та \bar{h}_{23} ; саме відрізок \bar{h}_{12} і промені \bar{h}_{13} та h_{23} складаються з точок оригіналу h_{123} ;

б) якщо ж тільки один з параметрів a, b додатний (нехай $a > 0, b < 0$), то вже не лише \bar{h}_{13} , але й \bar{h}_{12} - промені; саме вони й складаються з точок оригіналу h_{123} ; точки \bar{h}_{23} , як і h_{23} до h_{123} не належать (рис. 3.3,б);

в) нарешті, якщо $a, b < 0$, то жодна точка, як $\bar{h}_{12}, \bar{h}_{13}, \bar{h}_{23}$, так і h_{12}, h_{13}, h_{23} не належить h_{123} , бо й самих h_{12}, h_{13}, h_{23} не існує (рис. 3.3,в).

$$\text{Якщо } h_{123}: \frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c} = 1, \text{ де } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

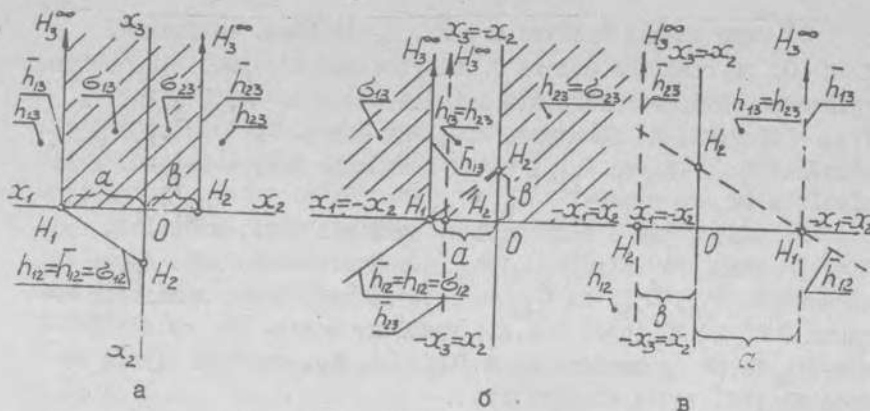


Рис. 3.3

$(0x_1^+x_2^+x_3^+)$, то геометричною моделлю умови h є фронтально-проеційюча площина $h_{123} \perp \Pi_{13}$.

Аналогічно до попереднього маємо випадки:

а) $a, c > 0$ (рис. 3.4, а), де точки, що належать h_{123} , складають ламану з відрізка h_{13} та променів \bar{h}_{12} (з вершиною $H_1 = h_{123} \cap 0x_1$) і \bar{h}_{23} (з вершиною $H_3 = h_{123} \cap 0x_3$); проекціями h_{123} є: \bar{h}_{12} – відрізок та смуги h_{12} й h_{23} ;

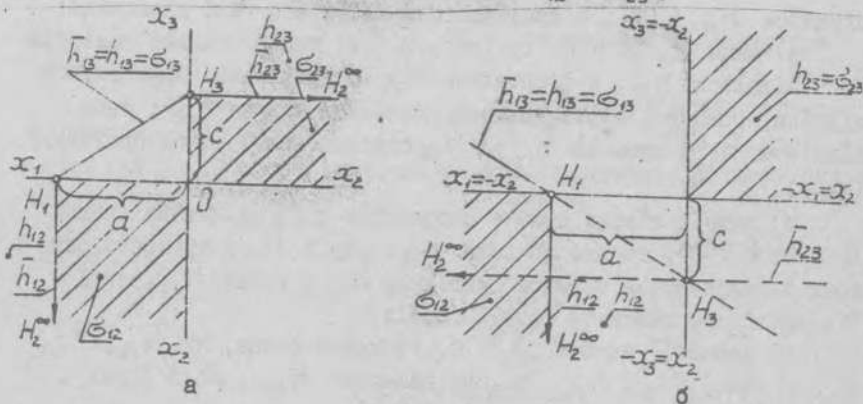


Рис. 3.4

б) $a > 0, c < 0$ (рис. 3.4, б); тут промінь \bar{h}_{13} (з вершиною H_1) є проекцією h_{123} , але й складається з точок, що нале-

жать h_{123} ; з точок, що належать h_{123} , складається й промінь \bar{h}_{12} ; горизонтальною проекцією h_{123} у цьому випадку є смуга, обмежена сторонами кута Ox_1, \bar{h}_{12} , профільна проекція h_{123} це квадрант $Ox_2^+x_3^+$;

в) $a, c < 0$, як і в попередньому випадку, не дає точок на графічній моделі, що належать h_{123} .

Геометричну модель, що є профільно-проеційною площиною, має умова-обмеження h , якщо її аналітичне подання має такий вигляд:

$$h_{123}: \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1, \text{ де } x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ (} O x_1^+ x_2^+ x_3^+ \text{)}.$$

Маємо три різновиди графічної моделі УФ ($h_{123} \cap O x_1^+ x_2^+ x_3^+$):

- а) $b, c > 0$ (рис. 3.5, а); проекціями УФ є відрізок $\bar{h}_{23} = h_{23}$ та смуги h_{12} і h_{13} ; h_{123} належать точки відрізка \bar{h}_{23} та променів \bar{h}_{12} й \bar{h}_{13} ;
- б) $b > 0, c < 0$ (рис. 3.5, б); графічна модель УФ складається з відрізка \bar{h}_{23} , квадранта $O x_1^+ x_3^+$ та відрізка $O x_1^+ x_2^+$, обмеженого променем \bar{h}_{12} ; оригіналові h_{123} належать точки променів \bar{h}_{12} та \bar{h}_{23} ;

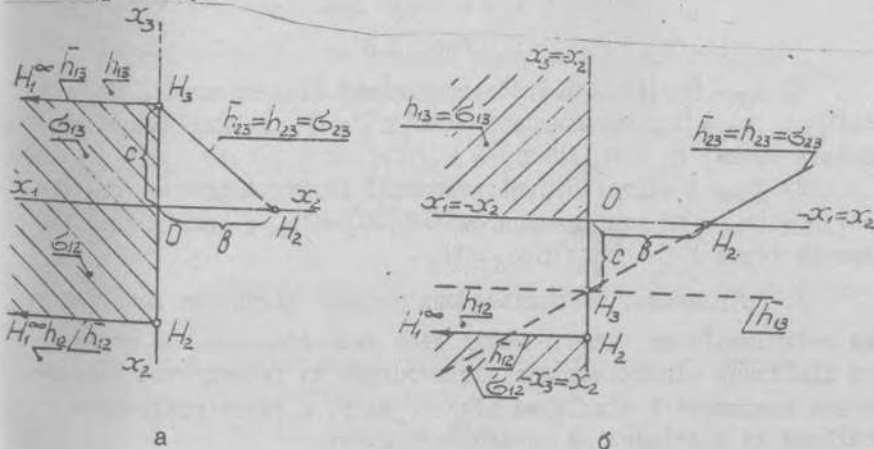


Рис. 3.5

в) $b, c < 0$; як і в попередніх двох випадках, тут графічна модель не має жодної точки оригіналу h_{123} .

Умова-обмеження моделюється площиною рівня, якщо її рівняння має лише одну незалежну змінну; є три випадки:

1) $x_1 = a$ (рис. 3.6, а); тут h моделюється профільною площиною; проєкції УФ ($h_{123} \text{ по } x_1^+, x_2^+, x_3^+$) складають $h_{12} = h_{13} = \bar{h}_{12} = \bar{h}_{13}$ - пряму та квадрант $0x_1^+x_2^+x_3^+ = h_{23}$; оригіналові належать точки $\bar{h}_{12} = \bar{h}_{13} \text{ по } x_1 = H_1$;

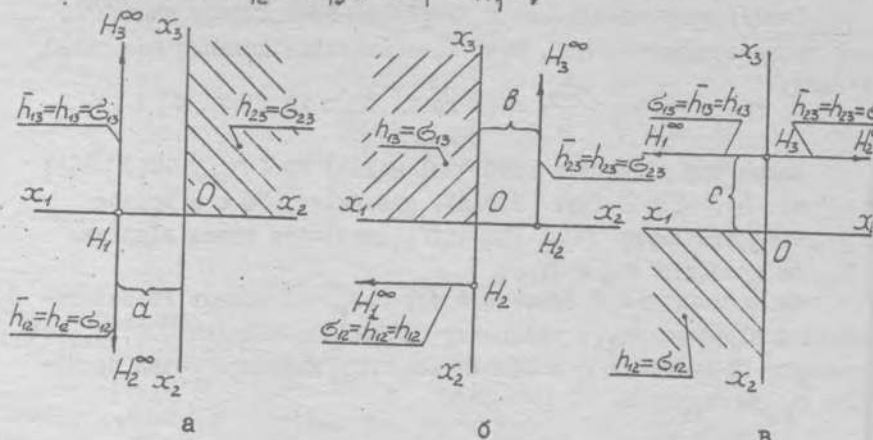


Рис. 3.6

2) $x_2 = b$ (рис. 3.6, б); проєкціями УФ є промені $\bar{h}_{12} = h_{12}$, $\bar{h}_{23} = h_{23}$ та квадрант $0x_1^+x_3^+ = h_{13}$; оригіналові належать точки $\bar{h}_{12} = \bar{h}_{23} \text{ по } x_2 = H_2$;

3) $x_3 = c$ (рис. 3.6, в); проєкції УФ тут є прямою $\bar{h}_{13} = h_{13} = h_{23} = h_{23}$ та квадрантом $0x_1^+x_2^+ = h_{12}$; оригіналові належать точки $\bar{h}_{13} = \bar{h}_{23} \text{ по } x_3 = H_3$.

Б. Розглянемо, як впливає вид умовної фігури на розв'язання оптимізаційних задач у межах двох умов-обмежень, що подаються лінійними рівняннями або нерівностями та геометрично моделюються площинами й відріками різного виду, а також графічно - слідами та відріками на проєкційних полях.

Умова-обмеження - рівняння:

I. Умова-обмеження моделюється площиною загального положення.

Приклад 3.1. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $4x_1 +$

$$+ 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0 \text{ та } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1 + x_2 + x_3; \\ h^1: 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0; \\ g^2: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123}: x_1 + x_2 + x_3 = C; \\ h_{123}^1: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = I; \\ g_{123}^2: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Цільова функція тут (рис. 3.7, а) моделюється сім'єю паралельних площин з параметром C , умова-обмеження h^1 - площиною загального положення h_{123}^1 , а умова g^2 моделюється, як звичайно, додатним октантом $E^3: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+ = g_{123}^2$.

Графічною моделлю цільової функції є сім'я слідів і відсіків: $F_1, F_2, F_1, F_3, F_2, F_3$ та $OF_1, F_2, OF_1, F_3, OF_2, F_3$ відповідно.

Аналогічно графічною моделлю умови h^1 є сліди $H_1, H_2, H_1, H_3, H_2, H_3$ та відсіки $OH_1, H_2, OH_1, H_3, OH_2, H_3$.

Поклавши $C = 3$, одержуємо аналітичну модель $f_{123}^0: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = I$ довільної площини сім'ї.

Звідси випливає, що перетин площини h_{123}^1 та октанта g_{123}^2 і є г.м.т., що задовольняють умови-обмеження, тобто відсік $H_1, H_2, H_3 = h_{123}^1 \cap 0x_1^+ x_2^+ x_3^+ = U\Phi = \sigma$, де $H_1 = 0x_1 \cap h_{123}^1$, $H_2 = 0x_2 \cap h_{123}^1$ та $H_3 = 0x_3 \cap h_{123}^1$.

Помічаємо, що точка H_3 визначає f^{\min} , а точка H_2 - f^{\max} , тобто $H_3 = M(0; 0; 2)$, а $f^{\min} = 2$ та $H_2 = \bar{M}(0; 0; 4)$ й $f^{\max} = 4$.

Отже, цільова функція має тут, як мінімальне, так і максимальне значення.

2. Умова-обмеження моделюється проєціюючою площиною:

Приклад 3.2. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1 + x_2 + x_3; \\ h^1: 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0; \\ g^2: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123}: \frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C} + \frac{x_3}{C} = I; \\ h_{123}^1: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = I; \\ g_{123}^2: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

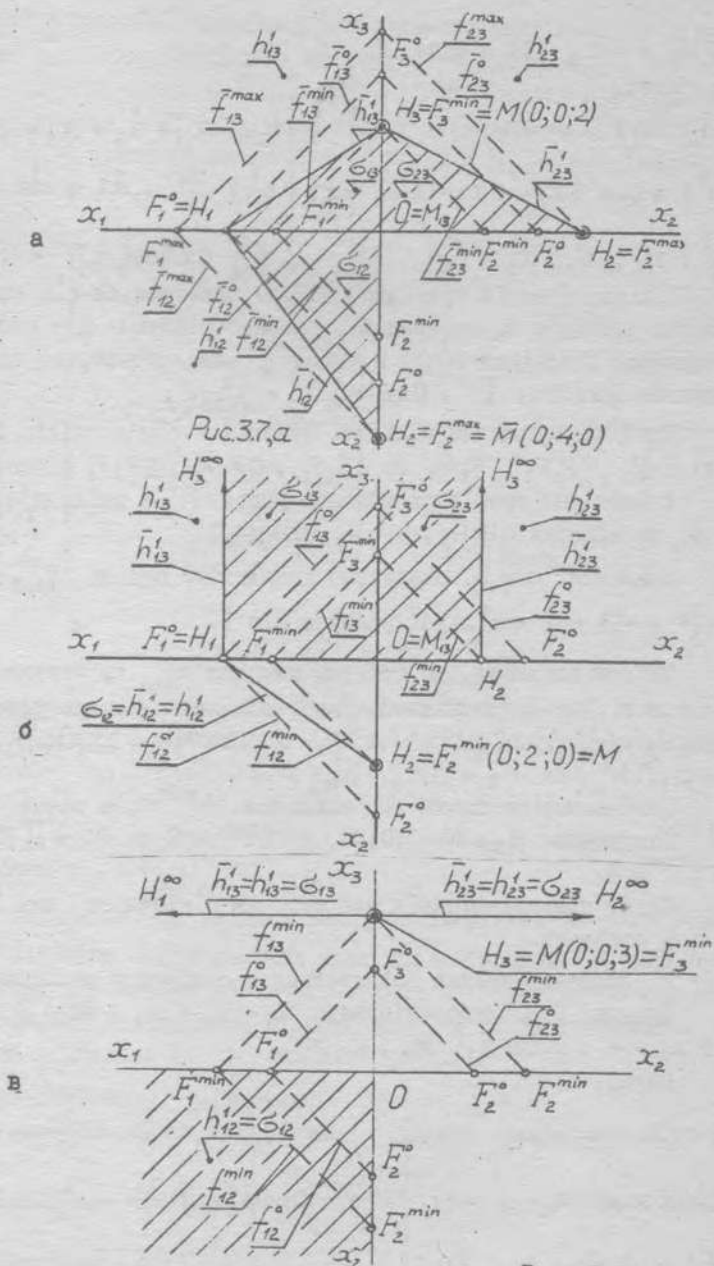


Рис. 3.7

Як і попередньому прикладі, цільова функція моделюється тут сім'єю горизонтально-проеціюючих паралельних площин з параметром c . Графічна модель її складається з трьох сімей паралельних прямих-слідів на проєкційних полях: $\{\bar{f}_{12}\} \subset \Pi_{12}$, $\{\bar{f}_{13}\} \subset \Pi_{13}$ та $\{\bar{f}_{23}\} \subset \Pi_{23}$ (рис. 3.7, б), тобто $h'_{123} \perp \Pi_{12}$ та $h'_{13} \parallel \bar{h}_{23} \parallel O x_3$, де $\bar{h}_{13} \cap \bar{h}_{23} = H_3^\infty$. Модель умовної фігури тут - відрізок $O x_1^+ x_2^+ x_3^+$, обмежений слідами \bar{h}_{12} , \bar{h}_{13} та \bar{h}_{23} - ламанок $H_1 H_2 H_3^\infty$. Графічну модель УФ складають відрізок $H_1 H_2 \subset \Pi_{12}$ та вертикальні смуги, обмежені \bar{h}_{13} , $O x_3 \subset \Pi_{13}$ й h_{23} , $O x_3 \subset \Pi_{23}$.

Мінімум цільової функції визначається точкою $H_2 = M(0; 2; 0)$ і тому $f^{\min} = 2$, а максимуму цільова функція тут не досягає, бо промені $H_1 H_3^\infty$ та $H_2 H_3^\infty$ не обмежені, адже й УФ не обмежена.

3. Аналогічну ситуацію спостерігаємо й у наступному прикладі, коли умова-обмеження - площина рівня.

Приклад 3.3. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $x_3 = 3$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1 + x_2 + x_3; \\ h^1: x_3 = 3; \\ g^2: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123}: \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} = 1; \\ h'_{123}: x_3 = 3; \\ g^2_{123}: 0 x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Геометрична модель цільової функції - знов сім'я паралельних площин з параметром c , графічна - сім'я слідів (паралельних) $\{\bar{f}_{12}\}$, $\{\bar{f}_{13}\}$, $\{\bar{f}_{23}\}$ та відрізків $\{O F_1 F_2\}$, $\{O F_2 F_3\}$ і $\{O F_2 F_3\}$ (рис. 3.7, в).

Геометричною моделлю умови h^1 тут є горизонтальна площина $h'_{123} \parallel \Pi_{12}$. Її графічну модель складають сліди-проекції $\bar{h}'_{13} = h'_{13}$, $\bar{h}'_{23} = h'_{23}$ та відрізок $O x_1^+ x_2^+$.

Як і в попередньому випадку, умовна фігура моделюється тут не обмеженим відрізком площини $h'_{123}: \sigma = h'_{123} \cap O x_1^+ x_2^+ x_3^+$. Графічна модель УФ складається з променів \bar{h}_{13} і \bar{h}_{23} та відріку $O x_1^+ x_2^+$, який теж не обмежений. Отже, максимального значення цільова функція тут не має, а точкою мінімуму служить $H_3 = M(0; 0; 3)$. Відповідна геометрична модель набуває вигляду

$$f_{123}^{\min}: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = I, \text{ а тому } f^{\min} = 3.$$

Умова-обмеження - нерівність:

I. Якщо в умові-обмеженні три незалежні змінні, то маємо два основні випадки:

$$A) q \longrightarrow q_{123}: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} - I \leq 0, \text{ де } x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

$$B) q \longrightarrow q_{123}: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} - I \geq 0, \text{ де знов-таки}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Ясно, що в кожному з цих випадків геометрична модель УФ являє собою відрік або грань додатного октанта. Відрік теж обмежений багатогранною поверхнею.

Розглянемо варіанти першого (А) випадку:

а) $a, b, c > 0$; тут геометричній моделі УФ належать ті точки додатного октанта, що належать піраміді $OG_1G_2G_3$, грань якої $G_1G_2G_3$ - відрік площини \bar{q}_{123} ; графічна модель УФ у даному випадку не відрізняється від графічної умови-рівняння (рис. 3.7, а, 3.8, а), хоча, як побачимо далі, відмінність її геометричної структури суттєво впливає на розв'язання оптимізаційних задач; графічна модель УФ тут знов складається з відріків $Ox_1^+x_2^+, Ox_1^+x_3^+, Ox_2^+x_3^+$, обмежених як осями координат, так і слідами $\bar{q}_{12}, \bar{q}_{13}, \bar{q}_{23}$; точка $A \in$ УФ і знаходиться під \bar{q}_{123} ;

б) $a, b > 0; c < 0$; геометричній моделі УФ тут належать точки (див. проєкції точки $A \in$ УФ) відріка додатного октанта $Ox_1^+x_2^+x_3^+$, обмеженого відріками площини \bar{q}_{123} (рис. 3.8, б), та координатних площин, обмежених лише частково; графічну модель УФ складають координатні чверті $Ox_1^+x_3^+, Ox_2^+x_3^+$, відрік чверті $Ox_1^+x_2^+$, обмежений слідом G_1G_2 ; усі точки ламаної, яка складається з променів $\bar{q}_{13}, \bar{q}_{23}$ та $[G_1G_2]$, належать оригіналові УФ;

в) $a > 0, b, c < 0$; геометрична модель УФ тут являє собою відрік додатного октанта площиною \bar{q}_{123} , але, на відміну від двох попередніх випадків "а" і "б", тут УФ належать тільки

промені \bar{q}_{12} та \bar{q}_{13} ; точка $A \in \text{УФ}$.

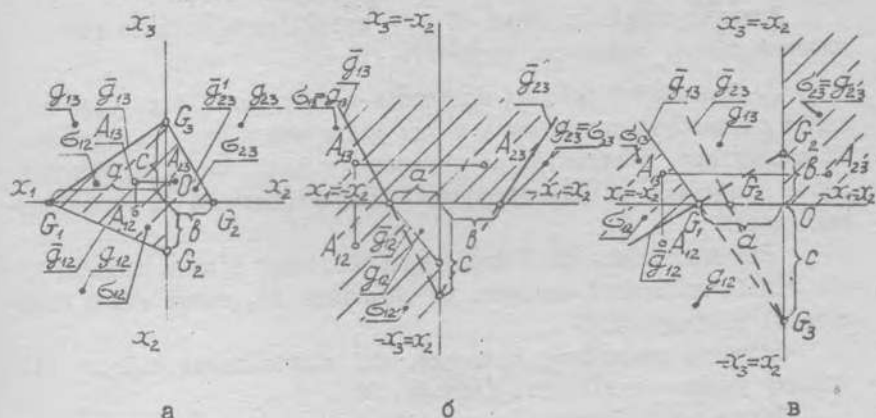


Рис. 3.8

Розгляд варіантів УФ, коли q_{123} обмежена проєціюючою площиною або площиною рівня, залишаємо читачеві.

Варіанти другого випадку (Б) мають такі особливості:

- а) $a, b, c > 0$; точка $A \in \text{УФ}$ знаходиться тут над площиною \bar{q}_{123} (рис. 3.9, а) або належить площині \bar{q}_{123} ;
 б) $a, b > 0, c < 0$; точка $A \in \text{УФ}$ знаходиться тут теж над площиною \bar{q}_{123} (рис. 3.9, б) або належить площині \bar{q}_{123} ;

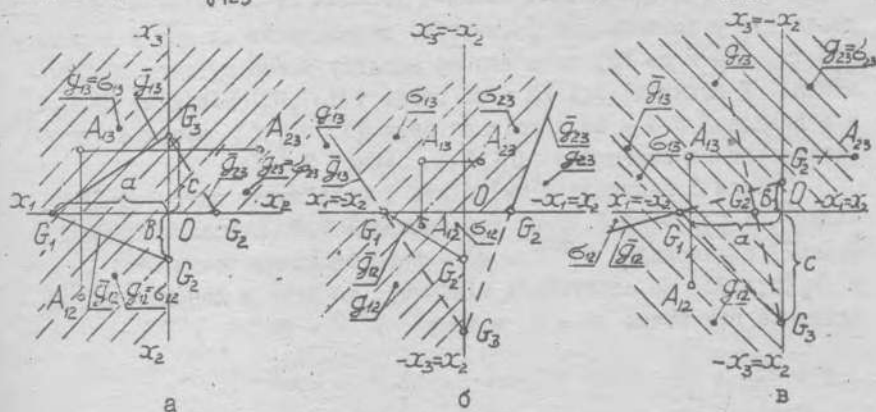


Рис. 3.9

в) $a > 0$, $B, c < 0$; тут точка $A \in U\Phi$ теж повинна або належати \bar{q}_{123} , або знаходитися над \bar{q}_{123} (рис. 3.9, в).

Розгляд випадків, коли \bar{q}_{123} - проєкційюча площина або площина рівня, залишаємо читачеві.

2. Продовжимо розгляд прикладів впливу виду $U\Phi$ на розв'язання оптимізаційних задач у межах умови-обмеження, що подається нерівністю, а геометрично моделюється відсіком додатного октанта Z обмежена відсіками площини умови-обмеження та координатних площин.

Розглядаються, як і досі, випадки, коли відсік площини або відсік додатного октанта, що моделюють $U\Phi$, мають різні особливості розташування.

Спочатку розглянемо приклади, які відповідають першому (А) випадку умови - нерівності (див. с. 30).

Приклад 3.4. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1 + x_2 + x_3; \\ q^1: 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 \leq 0; \\ q^2: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123}: \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} = 1; \\ q_{123}^1: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} \leq 1; \\ q_{123}^2: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Як і в прикладі 3.1, цільова функція геометрично моделюється тут у вигляді сім'ї (жмутка) паралельних площин з параметром c . Що ж до $U\Phi$, то в даному випадку маємо суттєву відмінність. У прикладі 3.1 $U\Phi$ - це грань (N_1, N_2, N_3) піраміди $ON_1N_2N_3$, а в прикладі 3.4 - це відсік октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ разом з його багатогранною поверхнею $OG_1G_2G_3$ (рис. 3.10, а).

Звідси і випливає відмінність у розв'язках оптимізаційної задачі. У прикладі 3.4, як і у прикладі 3.1, максимум цільової функції однаковий ($f^{\max} = 4$) - його визначає точка $\bar{M} = G_2(0; 4; 0)$. Що стосується мінімуму, то його у даному випадку визначає вже точка $M = 0$, а тому $f^{\min} = 0$.

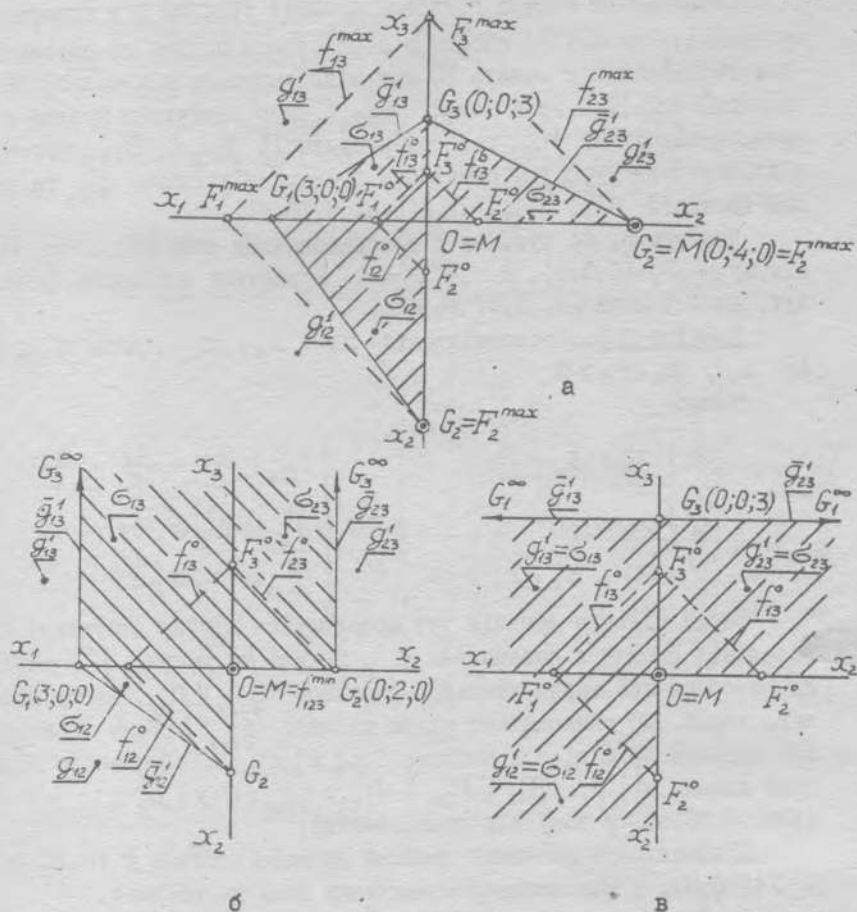


Рис. 3.10

Приклад 3.5. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{aligned}
 f: x_1 + x_2 + x_3; \\
 q^1: 2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0; \\
 q^2: x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{123}: \frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C} + \frac{x_3}{C} = I; \\
 q^1_{123}: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq I; \\
 q^2_{123}: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+.
 \end{aligned} \right.$$

Геометрична модель цільової функції тут, як і у попередньому випадку, це жмуток площин з невластивим носієм та параметром c . Геометрична ж модель УФ тут відрізняється від моделі УФ у прикладі 3.2. Там вона моделюється бічною поверхнею призми з гранями-відсіками h_{123}^1 та площин-проекцій Π_{13} і Π_{23} , тут - відсіком $0x_1^+x_2^+x_3^+$, обмеженим гранями-відсіками g_{123}^1 та площин-проекцій Π_{12} , Π_{13} і Π_{23} (рис. 3.10, б).

Помічаємо, що тут, як і у попередньому випадку, точка мінімуму $M = 0$ (0;0;0), а $f^{(min)} = 0$. Максимуму ж цільова функція тут, як і у прикладі 3.2, не має.

Приклад 3.6. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $x_3 \leq 3$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Маємо

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1 + x_2 + x_3; \\ g^1 : x_3 \leq 3; \\ g^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} = I; \\ g_{123}^1 : x_3 \leq 3; \\ g_{123}^2 : 0x_1^+x_2^+x_3^+ \end{array} \right.$$

Знову цільова функція тут моделюється сім'єю (жмуток) паралельних площин з параметром c . Модель же умови g^1 - відсік E^3 , обмежений горизонтальною площиною $g_{123}^1 \parallel \Pi_{12}$, якому належать точки, що знаходяться нижче площини g_{123}^1 . Тому геометричною моделлю УФ є відсік октанта $0x_1^+x_2^+x_3^+$, обмеженого відсіками площин g_{123}^1 та Π_{12} , Π_{13} й Π_{23} : $g_{123}^1 \cap 0x_1^+x_2^+x_3^+$ (рис. 3.10, в), а тому він нескінченний.

Мінімального значення цільова функція набуває у точці $M = 0$ (0;0;0), а максимального значення вона не набуває.

Далі розглянемо приклади, якщо умовою-обмеженням є нерівність (Б) (див. с. 30).

Приклад 3.7. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1 + x_2 + x_3; \\ g^1 : 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 \geq 0; \\ g^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} = I; \\ g_{123}^1 : \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} \geq I; \\ g_{123}^2 : 0x_1^+x_2^+x_3^+ \end{array} \right.$$

Геометрична модель цільової функції - жмуток паралельних площин з невластивим носієм та параметром C . Геометрична модель УФ - відрізок октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$, обмеженого гранню $G_1, G_2, G_3 \subset \bar{Q}'_{123}$ та відріками площин-проекцій $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$. Відрізок УФ - нескінченний (рис. 3.II, а). Звідси випливає, що точкою, яка визначає мінімальне значення f , тут служить точка $G_3 = M(0;0;2)$, а тому маємо $f_{123}^{\min} : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = I$ та $f^{\min} = 2$. Максимального ж значення цільова функція не досягає.

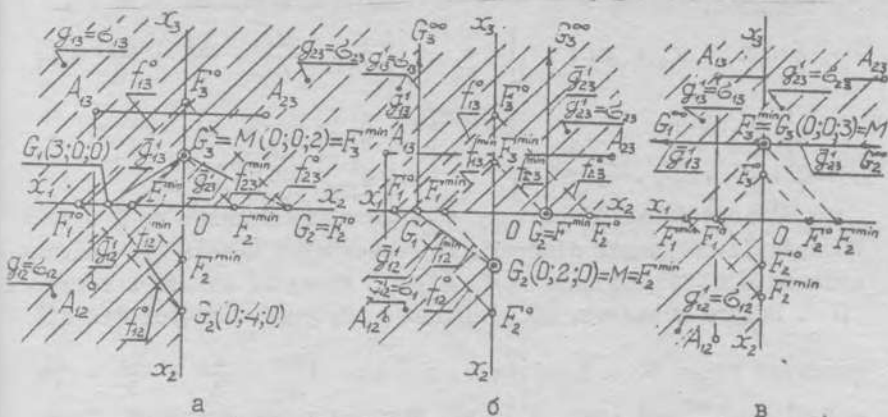


Рис. 3.II

Приклад 3.8. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $2x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Тут

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1 + x_2 + x_3; \\ g^1 : 2x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0; \\ g^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : \frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C} + \frac{x_3}{C} = I; \\ g^1_{123} : \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \geq I; \\ g^2_{123} : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

У даному випадку цільова функція геометрично моделюється так само, як і у попередньому прикладі: жмуток паралельних площин з параметром C . Що стосується УФ, то вона моделюється відрізком додатного октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$, одержаним за допомогою

площини \bar{q}'_{123} , і саме тим, якому не належить початок системи координат - точка O (рис. 3.II,б).

Точкою, що визначає мінімальне значення цільової функції, є точка $G(0;2;0) = M$, а тому $f'_{123}{}^{\min} : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}$ та $f^{\min} = 2$.

Максимального значення цільова функція тут теж не набуває.

Приклад 3.9. Екстремізувати $x_1 + x_2 + x_3$, якщо $x_3 \geq 3$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Маємо

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1 + x_2 + x_3; \\ q^1 : x_3 \geq 3; \\ q^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'_{123} : \frac{x_1}{C} + \frac{x_2}{C} + \frac{x_3}{C} = I; \\ q^1_{123} : x_3 \geq 3; \\ q^2_{123} : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Цільова функція має таку ж геометричну модель, як і в усіх попередніх прикладах підрозділу. Геометрична модель УФ - відсік октанта $Ox^+ x_2^+ x_3^+$ площиною \bar{q}'_{123} , якому не належить точка O . Звідси випливає, що мінімальне значення цільової функції

визначає точка $M = G_3(0;0;3)$, а тому $f'_{123}{}^{\min} : \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = I$ і $f^{\min} = 3$ (рис. 3.II,в). Максимального значення цільова функція не набуває.

3.1.3. З розглянутого вище випливають деякі твердження, які можна використати при графічному розв'язуванні більш складних задач оптимізації у лінійному програмуванні.

Наведені нижче твердження стосуються відсіків площин - моделей, що належать додатному октанту $E^3 : 0x^+ x_2^+ x_3^+$.

Домовимося F_1, F_2, F_3 і N_1, N_2, N_3 називати слідовими відсіками площин F_{123} та N_{123} відповідно, а F_i, F_j, O і N_i, N_j, O (де $i, j = 1, 2, 3$ та $i \neq j$) - слідовими відсіками площин проєкцій і $\Delta F_1, F_2, F_3$ та $\Delta N_1, N_2, N_3$ - слідовими трикутниками.

Твердження 3.1. Якщо $N_i, N_j, O \subset F_i, F_j, O$ (де $i, j = 1, 2, 3$ та $i \neq j$) та їх обриси не мають жодної спільної точки, то сума координат кожної точки F_1, F_2, F_3 перевищує суму координат точки N_1, N_2, N_3 , що з нею конкурує.

Дійсно, нехай довільна точка $A \in F_1 F_2 F_3$ має горизонтально-конкуруючу точку $B \in H_1 H_2 H_3$, фронтально-конкуруючу точку $C \in H_1 H_2 H_3$ та профільно-конкуруючу точку $D \in H_1 H_2 H_3$. Достатньо через конкуруючі точки A і B (відносно Π_{12}), A і C (відносно Π_{13}) та A і D (відносно Π_{23}) провести відповідно горизонтальні ($h^F \subset F_1 F_2 F_3$ і $h^H \subset H_1 H_2 H_3$), фронтальні ($f^F \subset F_1 F_2 F_3$ і $f^H \subset H_1 H_2 H_3$) та профільні прямі ($l^F \subset F_1 F_2 F_3$ і $l^H \subset H_1 H_2 H_3$). Як виявляється, що $x_3^A > x_3^B$, $x_2^A > x_2^C$ та $x_1^A > x_1^D$, а $x_1^A = x_1^B$, $x_2^A = x_2^B$, $x_1^A = x_1^C$, $x_3^A = x_3^C$, $x_2^A = x_2^D$ та $x_3^A = x_3^D$ (рис. 3.12) – що й треба було довести.

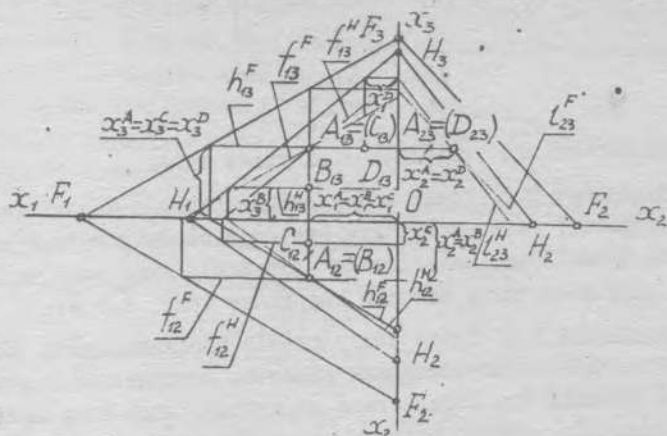


Рис. 3.12

Твердження 3.2. Серед точок сторін $\Delta H_1 H_2 H_3$ найменшу суму координат має точка збігу слідів, найменш віддалена від початку системи координат.

Покладемо, що для вершин слідового $\Delta H_1 H_2 H_3$ маємо $OH_1 > OH_2 > OH_3$. Довільна точка $A \in [H_1 H_3]$ (гіпотенуза $\Delta OH_1 H_3$) має суму координат $x_1^A (|OA_{x_1}|) + x_3^A (|OA_{x_3}|) > |OH_3| = |OA_{x_3}| + |A_{x_3} H_3|$, бо $|H_3 A_{x_3}| < |OA_{x_1}|$, як випливає з $\Delta H_3 A_{x_3} A_{13} \sim \Delta H_1 H_3 O \Rightarrow |H_3 O| < |H_1 O|$ (рис. 3.13) – що й треба було довести.

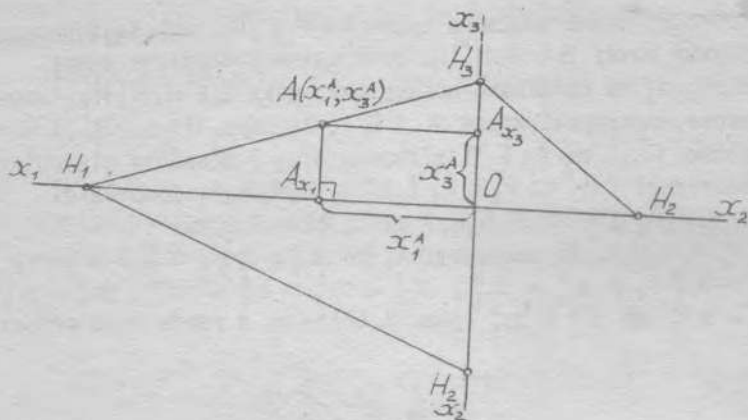


Рис. 3.13

З попереднього твердження випливає таке.

Твердження 3.3. Точка збігу слідів площини-моделі (загального положення) умови-обмеження визначає мінімальне значення цільової функції (що моделюється площиною), якщо вона найближче розташована до початку системи координат (рис. 3.7, а).

Твердження 3.4. Точка збігу слідів площини-моделі (загального положення) умови-обмеження визначає максимальне значення цільової функції (що моделюється площиною), якщо вона найдалше розташована від початку системи координат (див. рис. 3.7, а).

Аналітичною ілюстрацією тверджень 3.3 і 3.4 є поведінка

виразу $f_{123} : \frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \frac{x_3}{b_3} - I$. Якщо умова-обмеження моделюється площиною $h_{123} : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - I$, де $a_1 > a_2 > a_3$, а

в аналітичній моделі сім'ї f_{123} знаменники b_1 , b_2 та b_3 завжди пропорційні, то заміна b_3 на $a_3 < b_3$ приводить до $\frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \frac{x_3}{a_3} - I > \frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \frac{x_3}{b_3} - I$, і, навпаки, у випадку заміни b_3 на $a_1 > b_3$ - до $\frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \frac{x_3}{a_1} - I < \frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \frac{x_3}{b_3} - I$.

З твердження 3.2 випливає також

Твердження 3.5. Точка збігу H_3 слідового відсіку (H_1, H_2, H_3) , що найближче розташована від початку координат, має меншу суму координат, ніж будь-яка точка відсіку (H_1, H_2, H_3) , якщо проєкція $(KO = S_{12})$ лінії скилу $(H_3K = S)$ має довжину, більшу за $|OH_3|$.

Твердження 3.6. Якщо умова-обмеження моделюється площиною рівня або проєціюючою, а цільова функція - площиною загального положення, то цільову функцію мінімального значення визначає точка збігу площин (умови-обмеження), найближчої до початку системи координат, а точки, яка визначає максимальне значення цільової функції, немає (див. рис. 3.7, б, в).

Це твердження випливає з більш загального:

Твердження 3.7. У випадках нескінченної УФ цільова функція максимуму не досягає.

Дійсно, нехай аналітичне подання горизонтально-проєціюючої площини (моделі умови-обмеження) має вигляд $h_{123} : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - I = 0$, де $a_3 \rightarrow +\infty$, а тому $\frac{x_3}{a_3} \rightarrow 0$ та

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - I = 0 \rightarrow \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - I.$$

Звідси випливає, що точка збігу H_3 - невластива, а тому сліди \bar{h}_{13} та \bar{h}_{23} - паралельні (див. рис. 3.7, б; 3.10, б, в).

Твердження 3.8. Якщо УФ, що не має точок з від'ємними значеннями координат, належить початок системи координат, то саме він I визначає мінімум цільової функції (див. рис. 3.11, б).

При застосуванні до розв'язання оптимізаційних задач епо-ра Монжа слід враховувати, що у випадку, коли дві з трьох одно-йменних точок збігу (наприклад, H_i^1 та H_i^2 , H_j^1 та H_j^2 , де $i, j = 1, 2, 3$, та $i \neq j$) площин h_{123}^1 та h_{123}^2 збігаються, збігаються і однойменні відсіки-проєкції $(H_i^1 H_j^1 O \cong H_i^2 H_j^2 O$, де $i, j = 1, 2, 3$ та $i \neq j$), які визначаються цими точками збігу, хоча відсіки-оригінали $(H_i^1 H_j^1 H_k^1$ та $H_i^2 H_j^2 H_k^2 O$, де $i, j, k = 1, 2, 3$ та $i \neq j \neq k \neq i$) і не збігаються.

3.1.4. Розглянемо тепер декілька більш складних прикладів графічного розв'язання задач оптимізації у лінійному програмуванні. Ускладнення пов'язано зі збільшенням кількості умов-обмежень, тобто з ускладненням УФ.

Приклад 3.10. Екстремізувати $2x_1 + x_2 + x_3$, якщо $3x_1 + 3x_2 + 1,5x_3 - 6 \geq 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 6 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{aligned} f &: 2x_1 + x_2 + x_3; \\ g^1 &: 3x_1 + 3x_2 + 1,5x_3 \geq 6; \\ g^2 &: x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6; \\ g^3 &: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_{123} &: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{1} + \frac{x_3}{1} = 1; \\ g_{123}^1 &: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} \geq 1; \\ g_{123}^2 &: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{6} \leq 1; \\ g_{123}^3 &: 0x_1 + 0x_2 + 0x_3. \end{aligned} \right.$$

Геометрична модель f , як бачимо, - це жмуток паралельних площин f_{123} з параметром c . Приймавши $c = 8$, знаходимо f_{123}^0 :
 $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{8} = 1$ (рис. 3.14).

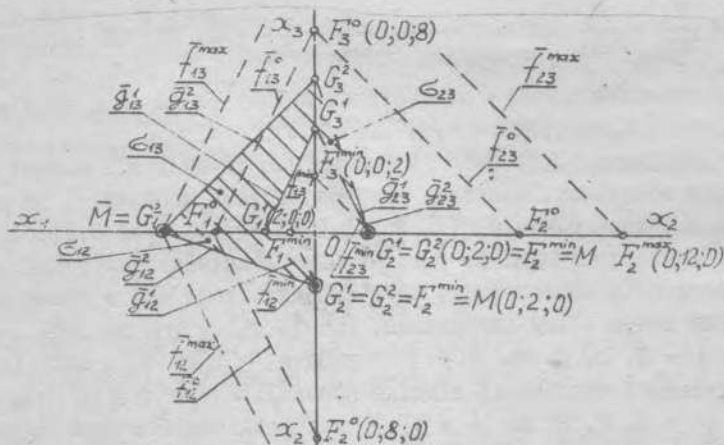


Рис. 3.14

Геометричну модель $УФ = \sigma$ одержуємо як переріз перерізів:
 $(q_{123}^1 \cap q_{123}^3) \cap (q_{123}^2 \cap q_{123}^3) = \sigma$. У даному прикладі $УФ$ - це мно-
 жина точок, обмежена багатогранною поверхнею, грані якої - від-
 сілки $\bar{q}_{123}^1, \bar{q}_{123}^2$ та площин проєкцій $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$, що нале-
 жать відсіку $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$.

Горизонтальна проєкція $УФ$ - відсік $G_1^2 G_2^2 0$, фронтальна -
 $G_1^2 G_3^2 0$ та профільна - $G_2^2 G_3^2 0$.

Точкою, що визначає мінімальне значення цільової функції,

є $M = G_2^1(0; 2; 0) = G_2^2(0; 2; 0)$. Отже, маємо $f_{123}^{min} : \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} +$
 $+\frac{x_3}{2} = 1$ та $f^{min} = 2$. Максимум же цільової функції визначає точка

$M = G_1^2(6; 0; 0) : f_{123}^{max} : \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{12} = 1$ та $f^{max} = 12$.

У наступному прикладі одна з умов-обмежень моделюється пло-
 щиною, а друга - відсіком октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$.

Приклад 3. II. Екстремізувати $5x_1 + 10x_2 + 2x_3$, якщо
 $10x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 300$, $15x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 200$ та $x_1,$
 $x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} f : 5x_1 + 10x_2 + 2x_3; \\ h^1 : 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 300; \\ q^2 : 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 200; \\ q^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{2} = 1; \\ h_{123}^1 : \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{15} = 1; \\ q_{123}^2 : \frac{x_1}{13,3} + \frac{x_2}{20} + \frac{x_3}{20} \leq 1; \\ q_{123}^3 : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Поклавши $c = 120$, одержуємо $f_{123}^0 : \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{10} = 1$.

Умова h^1 моделюється відсіком площини $h_{123}^1 : h_{123}^1 \cap$
 $\Pi 0x_1^+ x_2^+ x_3^+$, умова ж q^2 - скінченням відсіком: $q_{123}^2 \cap$
 $\Pi 0x_1^+ x_2^+ x_3^+$. Отже, $УФ = \sigma$ моделюється перетином перетинів:
 $(h_{123}^1 \cap q_{123}^3) \cap (q_{123}^2 \cap q_{123}^3)$. Цей перетин σ являє собою чотири-
 кутну грань багатогранної поверхні, обмеженої відсіками Π_{12} ,

Π_{13} , Π_{23} та відсіком h_{123}^1 й гранню g_{123}^2 : MKN_2N_3 (де ребро $MK = h_{123}^1 \cap g_{123}^2$ (рис. 3.15).

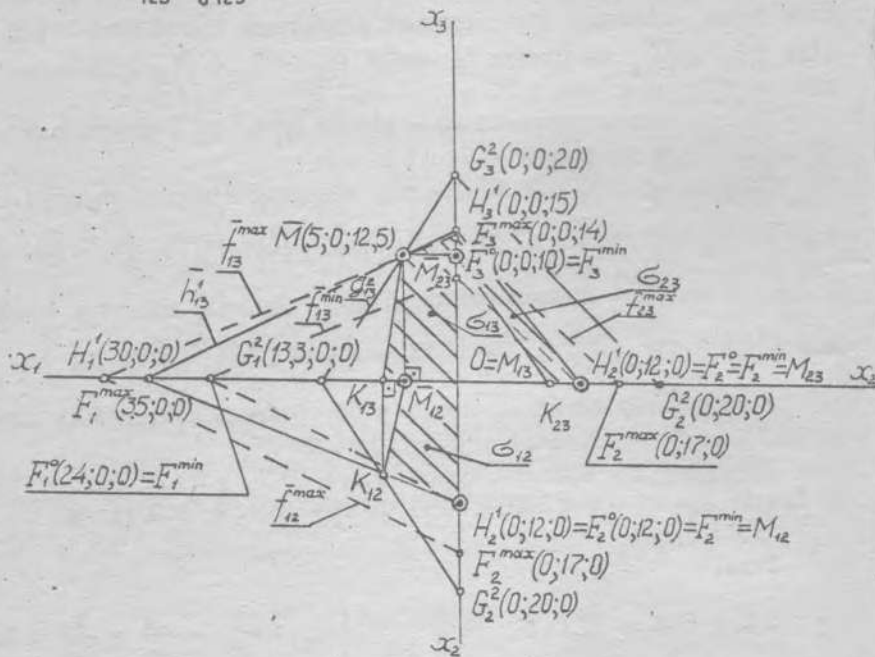


Рис. 3.15

Саме точка \bar{M} й визначає максимум цільової функції:

$$\bar{M}(5;0;12,5), \quad f_{123}^{\max} : \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{17} + \frac{x_3}{14} = I \text{ та } f^{\max} = 175.$$

Що стосується мінімального значення цільової функції, то її визначає точка $M = H_2(0;12;0)$, а тому $f_{123}^{\min} : \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{10} = I$ й $f^{\min} = 60$.

Далі розглянемо приклад, де умов-обмежень три і всі вони-нерівності.

Приклад 3.12. Екстремізувати $3x_1 + 5x_2 + 4x_3$, якщо $2x_1 + 3x_2 - 8 \leq 0$, $2x_2 + 5x_3 - 10 \leq 0$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 15 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$\begin{cases}
 f: 3x_1 + 5x_2 + 4x_3; \\
 g^1: 2x_1 + 3x_2 + 8 \leq 0; \\
 g^2: 2x_1 + 5x_3 - 10 \leq 0; \\
 g^3: 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 15 \leq 0; \\
 g^4: x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 f_{123}: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = I; \\
 g'_{123}: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} - I \leq 0; \\
 g''_{123}: \frac{x_1}{5} + \frac{x_3}{2} - I \leq 0; \\
 g'''_{123}: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} - I \leq 0; \\
 g^4: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+.
 \end{cases}$$

Приймаючи $c = 10$, одержуємо $f_{123}^0: \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = I$,

тобто модель цільової функції тут, як і у попередніх прикладах, є жмутком паралельних площин з параметром c (рис. 3.16).

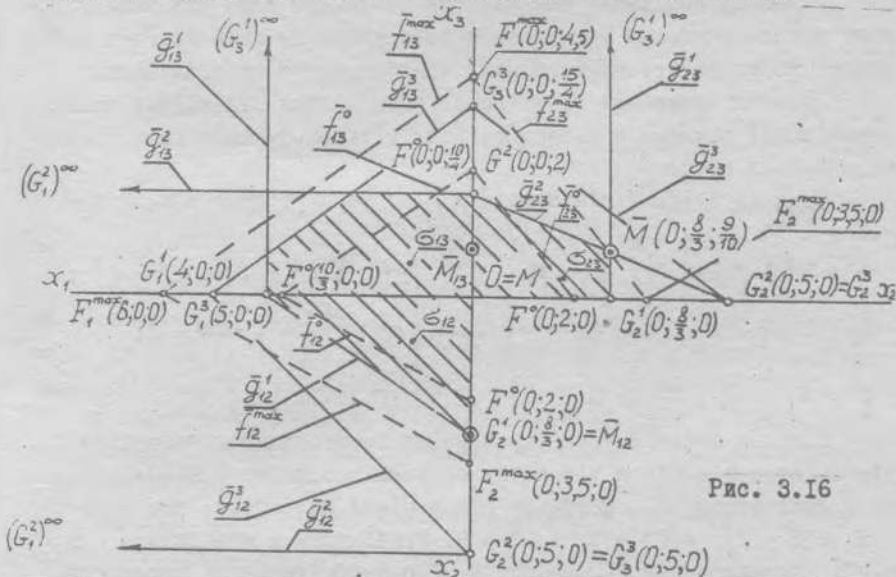


Рис. 3.16

Що стосується УФ, то вона моделюється відсіком октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$. Відсік цей одержуємо як перетин трьох відсіків-моделей g^1, g^2 та g^3 : $g'_{123} \cap g''_{123} \cap g'''_{123} = ABG_3^2 \bar{M} G_2^1 G_1^0$. Саме

вершини цього відсіку, обмеженого багатогранною поверхнею з гранями відсіків g_{123}^1 , g_{123}^2 , g_{123}^3 , Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} . Ї визначають екстремальні значення цільової функції: точка $\bar{M} \left(0; \frac{8}{3}; \frac{9}{10} \right)$ - максимальне, а тому $f_{123}^{\max} : \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3,5} + \frac{x_3}{4,5}$ та $f^{\max} = 16,9$, точка $O(0;0;0) = M$ - мінімальна ($f^{\min} = 0$).

3.2. Застосування проєкційних графічних моделей до розв'язання оптимізаційних задач нелінійного програмування

У нелінійному програмуванні визначення УФ і геометричне та графічне моделювання її суттєво ускладнюються, а тому й ускладнюється процес оптимізації, тобто пошуки екстремальних елементів.

Що спрощує цей процес наявність серед умов-обмежень таких, які моделюються проєційними поверхнями або відсіками, обмеженими такими поверхнями.

У даному посібнику обмежуємось розглядом лише тих випадків, коли умови-обмеження моделюються поверхнями не вище другого порядку, тобто не виходимо за межі квадратичного програмування.

Розгляд прикладів графічного розв'язання нелінійних задач оптимізації почнемо з випадків, коли цільова функція геометрично моделюється сферою.

Приклад 3.13. Мінімізувати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, якщо $2x_2 + x_3 + I = 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \\ h^1 : 2x_2 + x_3 - I = 0; \\ g^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2; \\ h_{123}^1 : \frac{x_2}{\frac{1}{2}} + \frac{x_3}{1} = I; \\ g_{123}^2 : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right.$$

Цільова функція у даному випадку геометрично моделюється сім'єю сфер з центром у початку системи координат - $O(0;0;0)$ та з параметром c . Довільну сферу сім'ї одержуємо, поклавши $c = 3 - f_{123}^0 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$. Графічними ж моделями f є сім'ї концентричних кіл-проєкцій. Умова-обмеження h^1 моделюється профільно-проєційною площиною h_{123}^1 , що разом з геометричною моделлю умови g^2 - додатним октантом $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ - визначає УФ

як нескінченний відрізок площини h_{123}^1 . Його обмежено лише з трьох сторін додатними відрізками слідів \bar{h}_{12}^1 , \bar{h}_{13}^1 та \bar{h}_{23}^1 (рис. 3.17). Графічною ж моделлю УФ = σ , найзручнішою для розв'язання оптимізаційної задачі, є профільна проекція $\sigma_{23} = [H_2 H_3]$.

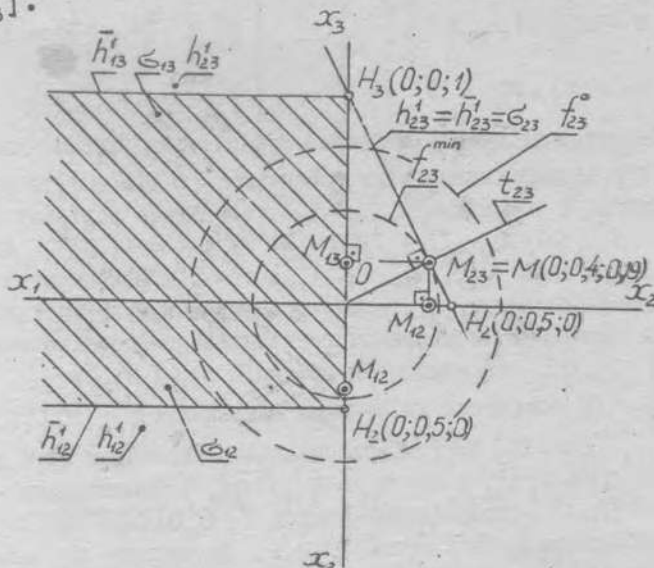


Рис. 3.17

Найближчою точкою цього відрізка (H_1^1, H_2^1, H_3^1) до центра сфери f_{123} є точка $M(0;0,4;0,19)$ з профільною проекцією M_{23} , де $OM_{23} \perp [H_2 H_3]$. Вона й визначає сферу мінімального радіуса: $OM = R^{\min} \approx 0,44$, а тому $f^{\min} \approx 0,196$.

У наступному прикладі кількість умов-обмежень збільшеться, і вони моделюються уже не відрізками площин, а відрізками додатного октанта.

Приклад 3.14. Мінімізувати $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 - 5$, якщо $6 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$, $5 - x_1 - 4x_2 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{aligned}
 f &: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2; \\
 g^1 &: 6 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0; \\
 g^2 &: 5 - x_1 - 4x_2 \geq 0; \\
 g^3 &: x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{123} &: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = c^2; \\
 g_{123}^1 &: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} - 1 \leq 0; \\
 g_{123}^2 &: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{\frac{5}{4}} - 1 \leq 0; \\
 g_{123}^3 &: 0x_1 + x_2^+ x_3^+.
 \end{aligned} \right.$$

Геометрична модель цільової функції, як бачимо, являє собою сім'ю концентричних сфер з центром $\bar{O}(1; 2; 0)$ та радіусом-параметром c . Приймаючи $c = 1,5$, одержуємо довільну сферу сім'ї $f_{123}^0: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = (1,5)^2$. Проекціями цієї сім'ї на Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} є три сім'ї концентричних кіл.

Умови-обмеження g^1 та g^2 геометрично моделюються нескінченними відсіками, обмеженими горизонтально-проєціюючими площинами \bar{q}_{123}^1 , \bar{q}_{123}^2 та площинами проєкції Π_{13} і Π_{23} .

УФ = σ одержуємо як перетин відсіків $(g^1 \cap 0x_1^+ x_2^+ x_3^+) \cap \Pi(g^2 \cap 0x_1^+ x_2^+ x_3^+)$. Горизонтальною проєкцією УФ є чотирикутник $G_1^1 O G_2^2 l_{12}$, де $l_{12} = \bar{q}_{12}^1 \cap \bar{q}_{12}^2$, фронтальною - смуга $G_1^1 O (G_3^3)^\infty$, профільною - смуга $G_2^2 O (G_3^3)^\infty$.

Найближчою точкою грані l_{12} до центра \bar{O} сім'ї сфер є основа M_{12} перпендикуляра $\bar{O}_{12} M_{12} \perp \bar{q}_{12}^2$ (рис. 3.18). Точка

$M_{12} = M\left(\frac{4}{5}; \frac{11}{10}; 0\right)$ й визначає сферу мінімального радіуса - $|\bar{O}_{12} M_{12}| = |\bar{O}M| = R^{\min} = \frac{9}{10}$, а тому й її рівняння $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2$ та мінімальне значення цільової функції $f^{\min} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 - 5 = -4\frac{19}{100}$.

Далі розглянемо приклад, в якому УФ частково обмежена проєціюючим параболічним циліндром.

Приклад 3.15. Мінімізувати $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2$, якщо $x_1 - x_2 + 2 \leq 0$, $x_1^2 - x_2 + 1 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

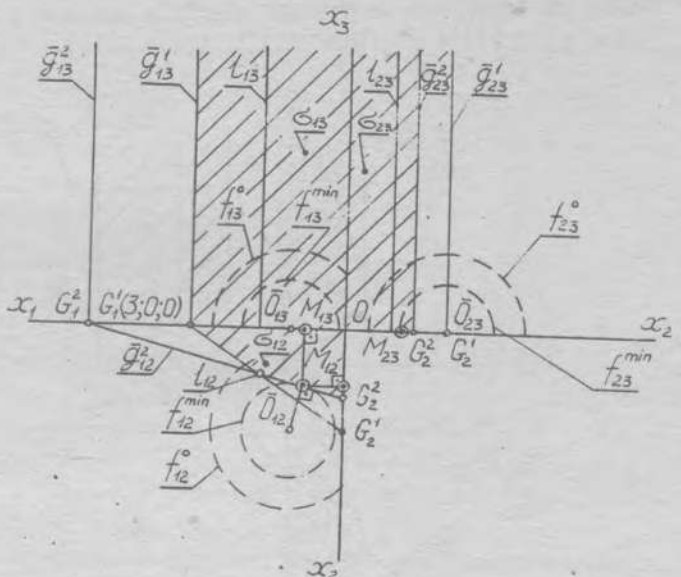


Рис. 3.18

Маємо

$$\left. \begin{aligned}
 f: (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2; \\
 q^1: x_1 - x_2 + 2 \geq 0; \\
 q^2: x_1^2 - x_2 + 1 \geq 0; \\
 q^3: x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{123}: (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2 = C^2; \\
 q_{123}^1: \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} + 1 \geq 0; \\
 q_{123}^2: x_1^2 - x_2 + 1 \geq 0; \\
 q_{123}^3: 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3.
 \end{aligned} \right.$$

Цільова функція, як і у попередніх прикладах, моделюється тут сім'єю сфер з центром у точці $\bar{O}(2;0;0)$ та параметром C .

Приймаємо $C = 2\frac{1}{2}$. Умова-обмеження q^1 моделюється нескінченним відрізком, обмеженим відрізками проєкційної площини q_{123}^1 ($\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} + 1 = 0$) і площин Π_{13} та Π_{23} . Умова-обмеження q^2

теж моделюється нескінченним відрізком, але обмеженим відрізками горизонтально-проєкційного параболічного циліндра q_{123}^2 та площиною Π_{23} .

Модель УФ одержуємо як перетин відсіків октанта $0 \leq x_1, x_2, x_3$:
 $(g^1_{123} \cap 0 \leq x_1, x_2, x_3) \cap (g^2_{123} \cap 0 \leq x_1, x_2, x_3)$ (рис. 3.19).

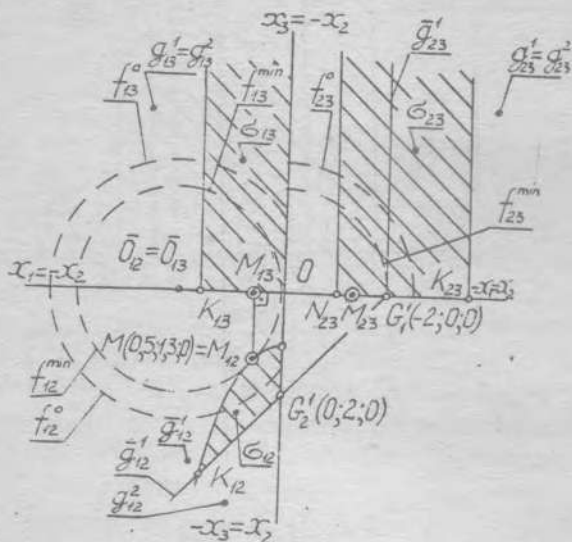


Рис. 3.19

Якраз горизонтальна проекція σ_{12} моделі УФ = σ - відсік $G_2 K_{12} N_{12}$ містить точку $M (M_{12} \in \cup K_{12} N_{12})$, що визначає мінімум цільової функції: $M (\frac{1}{2}; \frac{3}{10}; 0)$, $C = R^{\min} = 2$, f_{123}^{\min} :

$$(x_1 - 2)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \text{ та } f^{\min} = 4.$$

У наступних прикладах уже цільова функція моделюється сім'єю горизонтально-проеціюючих параболічних циліндрів з параметром C та вершиною твірною у площині Π_{23} , паралельною $0x_3$.

Приклад 3.16. Мінімізувати $x_1^2 - x_2^2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \leq 0$, $x_1 + x_2 - I \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{array}{l} f: x_1^2 - x_2^2; \\ g^1: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \leq 0; \\ g^2: x_1 + x_2 - I \geq 0; \\ g^3: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123}: x_1^2 - x_2^2 = C; \\ g^1_{123}: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (3)^2 \leq 0; \\ g^2_{123}: x_1 + x_2 - I \geq 0; \\ g^3_{123}: 0 \leq x_1, x_2, x_3. \end{array} \right.$$

У даному випадку цільова функція моделюється сім'єю горизонтально-проеціюючих параболічних циліндрів f_{123} з параметром c та вершинною твірною у площині Π_{23} , умова g^1 - шаром з центром $O(0;0;0)$ та радіусом $R = 3 (g_{123}^1)$, умова g^2 - півпростором, що знаходиться перед площиною тобто не має точки $O(0;0;0)$.

Звідси $U\Phi = \sigma$ одержуємо як відсік відсіків октанта $Ox_1^+x_2^+x_3^+$, у даному разі скінченний, бо обмежений сферою: $(g_{123}^1 \cap Ox_1^+x_2^+x_3^+) \cap \Pi(g_{123}^2 \cap Ox_1^+x_2^+x_3^+)$ (рис. 3.20).

Оскільки мова йде про мінімізацію f , то, поклавши $c = 0$, одержуємо довільну параболу - горизонтальну проєкцію моделі цільової функції - $f_{123}^0: x_1^2 = x_2$. Побудова її здійснюється за вершиною, віссю та однією з приналежних точок, як показано на рис. 2.14.

Точка $M(0;3;0)$ визначає мінімальне положення моделі цільової функції - $f_{123}^{\min}: x_1^2 = x_2 - 3$. Її точки (при ручному моделюванні) будуться за допомогою вектора зсуву \vec{OM}_{12} . Очевидно, що $f^{\min} = -3$.

Далі мінімізується та ж цільова функція, але з іншими умовами-обмеженнями.

Приклад 3.17. Мінімізувати $x_1^2 - x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 = 0$, $-(x_1 + x_2^2) + 1 \geq 0$, $-(x_1 + x_2) + 1 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже,

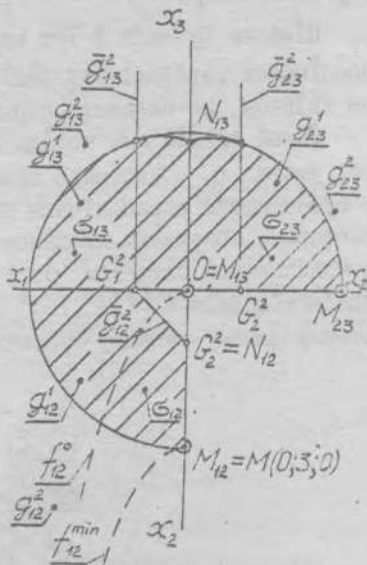


Рис. 3.20

Оскільки змінна x_3 на мінімум цільової функції не впливає, то його визначають величини x_1 та x_2 , співвідношення яких у точці M саме й відповідає мінімуму f . Звідси маємо: $M(0; 1; 2,8)$, f_{123}^{min} : $x_1^2 = x_2 - 1$ та $f^{min} = -1$.

Цільова функція моделюється поверхнею обертання у наступному прикладі.

Приклад 3.18. Мінімізувати $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$, якщо $8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$\left. \begin{aligned} f &: x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2; \\ h^1 &: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12,25 = 0; \\ h^2 &: 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0; \\ g^3 &: x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} f_{123}: x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = c; \\ h_{123}^1: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12,25 = 0; \\ h_{123}^2: \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{8} = 1; \\ g_{123}^3: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{cases}$$

Цільова функція моделюється тут сім'єю еліпсоїдів обертання з параметром c , у яких вісь обертання Ox_2 , а твірна - еліпс. Поклавши $c = 9$, одержуємо еліпс-твірну у вигляді

$$\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1, \text{ яка відповідає еліпсоїду } f_{123}^0, \text{ що моделює}$$

довільний еліпсоїд сім'ї - f_{123} .

Умова h^2 моделюється площиною h_{123}^2 , а умова h^1 - сферою h_{123}^1 . Отже, $U\Phi = \sigma$ одержуємо у вигляді кола-перетину: $(h_{123}^1 \cap h_{123}^2) \subset 0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ (рис. 3.22).

Звідси випливає, що мінімум цільової функції визначається точкою перетину M кола σ з меридіаном сфери h_{123}^1 , який належить, як і меридіан π еліпсоїда обертання f_{123}^{min} , площині $\Sigma \perp h_{123}^2$, що визначає лінію схилу S площини h_{123}^2 відносно площини Π_{13} . Меридіан π необхідно побудувати, бо він визначає f_{123}^{min} , проходячи через точку M .

Щоб побудувати π , спочатку побудуємо меридіан $\pi^0 = \sum \Pi f_{123}^0$. Скористаємося заміною площин проекцій:

$$\frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}} \rightarrow \frac{\Pi'_{13}}{\Pi'_{12}}, \text{ де } \Pi'_{12} \parallel \Sigma.$$

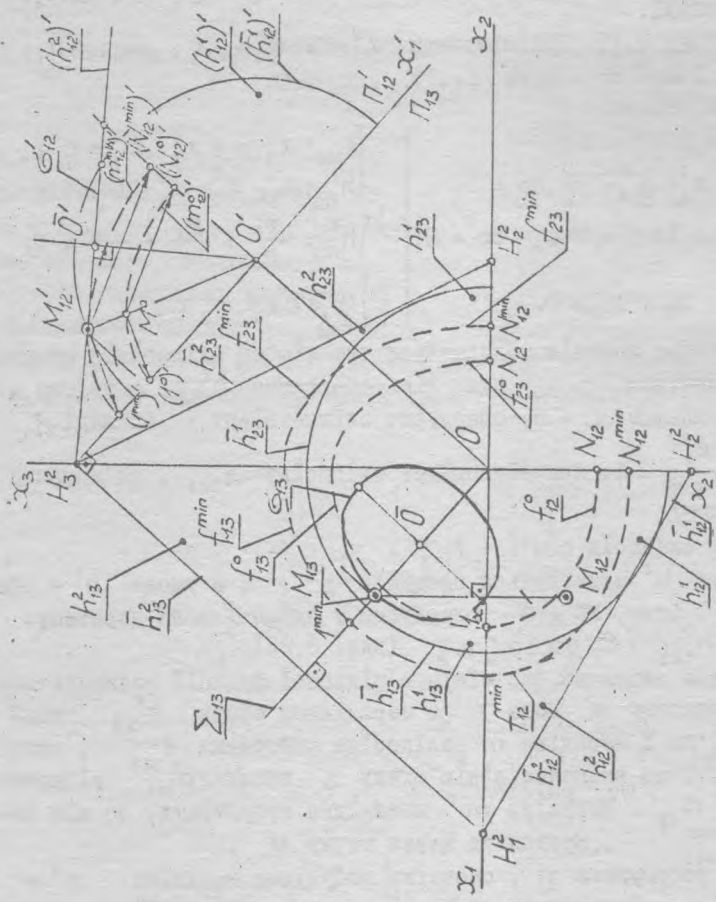


Рис. 3.22

Очевидно, що $x_1 \perp \bar{h}_{13}^2$, а $(m^0)'$ - обрис $(f^0)'$. Отже, півосі меридіана-еліпса $|(1^0)'O'| = |1_{x0}'|$ та $|O'N'_{12}| = |ON_{12}|$. Будуємо за осями еліпса $(m^0)'$ та проєкції $(h_{12}^2)'$, $(\bar{h}_{12}^1)'$, одержуючи $M'_{12} = (h_{12}^1)' \cap (h_{12}^2)'$ й σ'_{12} . Знаходимо $M^0 = M'_{12} \cap (m^0)'$. За хордами $M^0(1^0)'$ та $M^0(N'_{12})'$ будуємо хорди $M'_{12}(1^{min})' \parallel M^0(1^0)'$ та $M'_{12}(N'_{12})' \parallel M^0(N'_{12})'$, визначаючи півосі твірної-меридіана $(m'_{12})' = m$ еліпсоїда обертання $f_{123}^{min} : [(1^{min})'O']$ та $[(N'_{12})'O']$. За півосями будуємо меридіан m'_{12} (див. рис. 2.4).

$$\text{Отже, маємо } M(2,6;2,I;I,6), f_{123}^{min} : \frac{x_1^2}{(3,9)^2} + \frac{x_2^2}{(2,6)^2} + \frac{x_3^2}{(3,9)^2} = I \text{ та } f^{min} = \frac{(2,6)^2}{(3,9)^2} + \frac{(2,I)^2}{(2,6)^2} + \frac{(I,6)^2}{(3,9)^2} \approx I,77.$$

У наступних прикладах цільова функція моделюється поверхнями особливого розташування, що ускладнює процес моделювання.

Приклад 3.19 [16, с. 322]. Мінімізувати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$, якщо $2x_1 + x_2 - 4 = 0$, $5x_1 - x_3 - 8 = 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2; \\ h^1 : 2x_1 + x_2 - 4 = 0; \\ h^2 : 5x_1 - x_3 - 8 = 0; \\ g^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 = C^2; \\ h'_{123} : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} = I; \\ h^2_{123} : \frac{x_1}{8} - \frac{x_3}{8} = I; \\ g^3_{123} : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

З умови (3.1) маємо: при $x_2 = 0$, $x_1^2 + x_3^2 = C^2$, при $x_1 = 0 - x_2^2 + x_2^2 = C^2$, а при $x_3 = 0 - (x_1 - x_2)^2 - C^2 = 0$ та $(x_1 - x_2 + C)(x_1 - x_2 - C) = 0$. Очевидно, що цільова функція моделюється сім'єю циліндричних поверхонь з віссю-бісектрисою координатного кута Ox_1x_2 і параметром C . Нормальним перерізом кожного з таких циліндрів є еліпс, велика та мала півосі якого становлять відповідно C та $\frac{\sqrt{2}}{2}C$ (рис. 3.23).

Модель УФ = σ одержуємо у вигляді відрізка PT прямої $l = h'_{123} \cap h^2_{123}$, бо h'_{123} та h^2_{123} - площини. Площина h'_{123} - горизонтально-проєціююча, h^2_{123} - фронтально-проєціююча. Саме

тому $h_{12}^1 = l_{12} \Rightarrow [P_{12} T_{12}]$ та $h_{13}^2 = l_{13} \Rightarrow [P_{13} T_{13}]$.

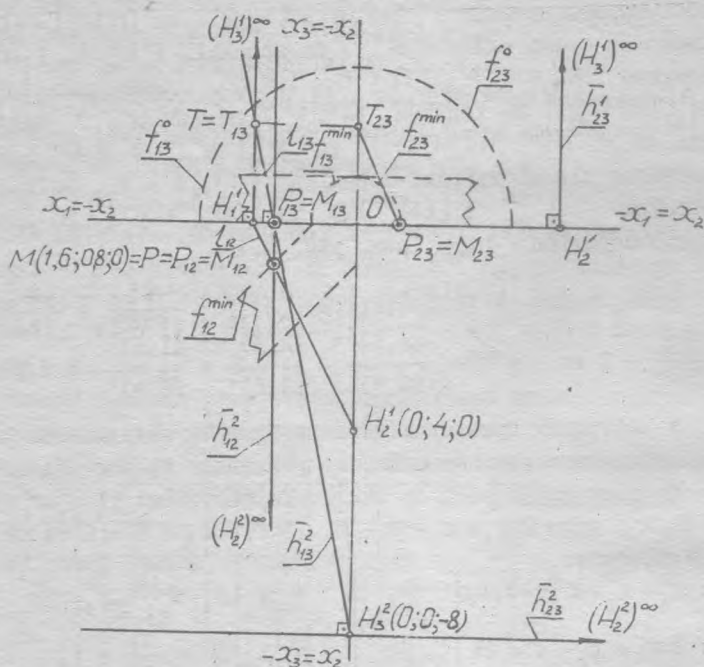


Рис. 3.23

Саме точка $M_{12} = P_{12}$ й визначає горизонтальну твірну циліндра, який моделює цільову функцію мінімального значення f_{123}^{\min} . Отже, маємо $M(1,6;0,8;0)$ та $f_{123}^{\min} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 = 0,64$, $f_{123}^{\min} = 0,64$.

У наступному прикладі поверхні другого порядку, що моделюють цільову функцію, розпадаються на площини.

Приклад 3.20 [16, с. 322]. Мінімізувати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, якщо $2x_1 + x_2 - 6 = 0$, $x_1 - x_3 - 8 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Маємо:

$$\left. \begin{aligned}
 f: & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - \\
 & - 2x_1x_3 - 2x_2x_3; \\
 h^1: & 2x_1 + x_2 - 6 = 0; \\
 g^2: & x_1 - x_3 - 8 \leq 0; \\
 g^3: & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{123}: & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \\
 & - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - \\
 & - 2x_2x_3 = C^2; \\
 h_{123}^1: & \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} - 1 = 0; \quad (3.2) \\
 g_{123}^2: & \frac{x_1}{8} - \frac{x_3}{8} - 1 \leq 0; \\
 g_{123}^3: & 0x_1^+ x_2^+ x_3^+.
 \end{aligned} \right.$$

З умов (3.2) випливає, що $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - C^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - C^2$ при $x_1 = 0$ дає $(x_2 - x_3)^2 - C^2 = (x_2 - x_3 + C)(x_2 - x_3 - C) = 0$, при $x_2 = 0$ - $(x_1 - x_3)^2 - C^2 = (x_1 - x_3 + C)(x_1 - x_3 - C) = 0$, а при $x_3 = 0$ - $(x_1 - x_2)^2 - C^2 = (x_1 - x_2 + C)(x_1 - x_2 - C) = 0$.

Це означає, що площини, на які розпадаються поверхні другого порядку - моделі з осями, паралельними відповідно Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} , перетинають площини Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} по паралельних прямих, а осі координат - у точках $N_1(C; 0; 0)$, $N_2(0; C; 0)$, $N_3(0; 0; C)$, $\bar{N}_1(-C; 0; 0)$, $\bar{N}_2(0; -C; 0)$, $\bar{N}_3(0; 0; -C)$ відповідно (рис. 3.24).

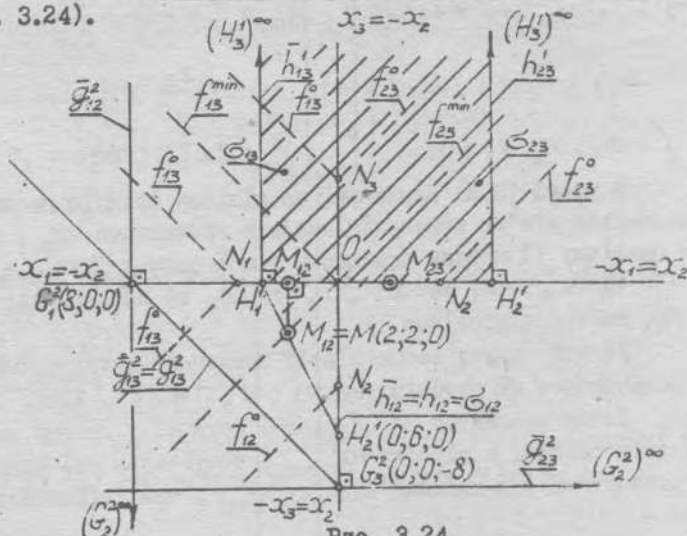


Рис. 3.24

При $c = 0$ пара площин-моделей перетворюється у конус, дотичний до Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} по бісектрисах кутів $x_1, 0 x_2$, $x_1, 0 x_3$, $x_2, 0 x_3$ [II, с. 433].

$U\Phi = \sigma$ моделюється нескінченним відсіком площини h_{123}^1 , який належить нескінченному відсіку додатного октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ обмеженому як відсіком площини з умови q^2 , так і відсіками площин Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} .

Оскільки конус, що одержимо за умови $c = 0$, дотикається до площини Π_{12} по бісектрисі β кута $x_1, 0 x_2$, то ясно, що точкою, яка визначає мінімум цільової функції, є саме $M_{12} = \beta \cap h_{12}^1$. Отже, $M(2; 2; 0)$, $f_{123}^{min} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$, $f^{min} = 0$.

Останній приклад стосується розв'язання оптимізаційних задач за методами графічного наближення.

Приклад 3.2I. [16, с. 24]. Знайти габарити скриньки найбільшого об'єму, в якій габаритні розміри задовольняють умови $I, 8 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Аналітична модель об'єму скриньки $-x_1x_2x_3$, а тому маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1 x_2 x_3 ; \\ q^1 : I, 8 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 0 ; \\ q^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{123} : x_1 x_2 x_3 = c ; \\ q_{123}^1 : I - \frac{x_1}{1,8} - \frac{x_2}{0,9} - \\ \quad - \frac{x_3}{0,9} \geq 0 ; \\ q_{123}^2 : 0x_1^+ x_2^+ x_3^+ . \end{array} \right. \quad (3.3)$$

З умови (3.3) випливає, що цільова функція геометрично моделюється сім'єю паралелепіпедів з габаритами x_1 , x_2 та x_3 , а графічну її модель складають сім'ї прямокутників з габаритами x_1 та x_2 , x_1 та x_3 , x_2 та x_3 на проєкційних полях Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} відповідно.

$U\Phi = \sigma$ являє собою відсік додатного октанта $0x_1^+ x_2^+ x_3^+$ та визначається як переріз: $0x_1^+ x_2^+ x_3^+ \cap q_{123}^1$ (рис. 3.25).

Точка максимуму M цільової функції у даному випадку належить площині з відсіку q_{123}^1 , і тому через неї проходять як горизонталь h^M площини відсіку q_{123}^1 , так і фронталь тієї ж

площини.

Проекції ж точки M (M_{12} та M_{13}) є вершинами прямокутників – проєкцій паралелепіпеда f_{123}^{max} , а тому M_{12} має бути проєкцією найвищої точки площини відсіку q_{123}^1 з тих, що відповідають точкам гіперболи $h_{12}^M \rightarrow M_{12}$ – геометричному місцю вершин M_{12}^i прямокутників $M_{12} M_1 M_2 O$ однакової площі. Одночасно точка M_{13} має бути проєкцією найглибшої точки гіперболи $h_{13}^M \rightarrow M_{13}$ – геометричного місця вершин M_{13}^i прямокутників $M_{13} M_1 M_3 O$ однакової площі.

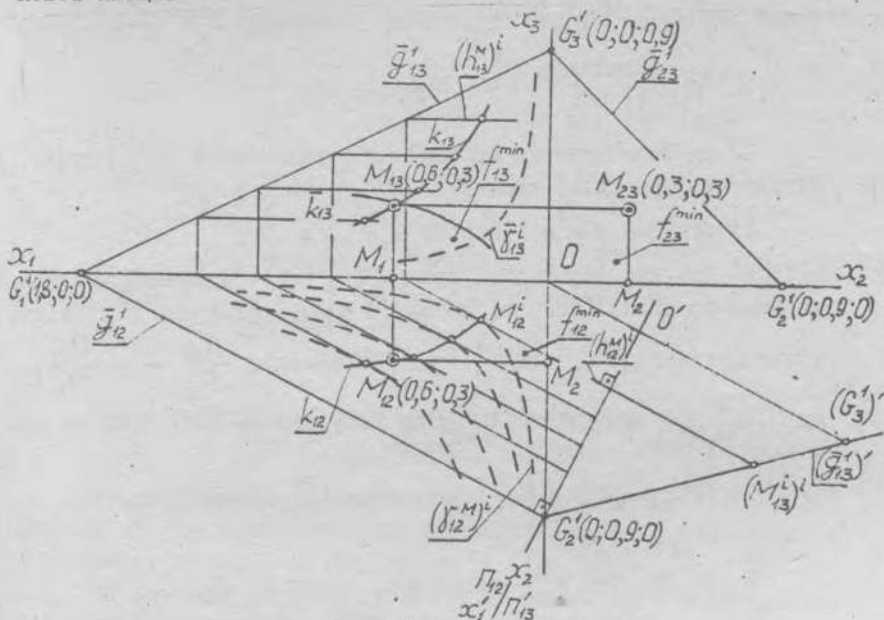


Рис. 3.25

Оскільки як гіпербола δ_{12}^M , так і гіпербола $\bar{\delta}_{13}^M$ належать сім'ї гіпербол $\{\delta_{12}^i\}$ та $\{\bar{\delta}_{13}^i\}$ відповідно, то й точки M_{12} та M_{13} повинні належати сім'ї точок $\{M_{12}^i\}$ та $\{M_{13}^i\}$ відповідно, тобто кривим K_{12}^M та K_{13}^M відповідно.

Побудова кривих K_{12}^M та K_{13}^M здійснюється так.

Кожна M_{12}^i – точка дотику проєкції (h_{12}^i) горизонтальної площини відсіку q_{123}^1 до відповідної гіперболи δ_{12}^i , а M_{13}^i –

точка дотику проєкції (f_{13}^i) фронталі тієї ж площини до відповідної гіперболи δ_{13}^i .

Тому:

1) будуємо сім'ю гіпербол $\{(\delta_{12}^M)^i\}$ (див. рис. 2.12);

2) будуємо горизонтальні проєкції $\{(h_{12}^M)^i\}$ горизонталей, що є дотичними до відповідних гіпербол, і фіксуємо відповідні точки дотику $\{M_{12}^i\} (h_{12}^M)^i \perp x_1'$, з системи $\frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}} \longleftarrow \frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}}$, де $\Pi_{13}' \perp \bar{q}_{12}^i$ - площини з q_{123}^i ;

3) $\{M_{12}^i\} = K_{12}^M$;

4) за фронтальними проєкціями горизонталей $\{h_{13}^i\}$ та $\{M_{12}^i\}$ одержуємо фронтальні проєкції $\{M_{13}^i\} = K_{13}^M$;

5) будуємо сім'ю гіпербол $\{\bar{\delta}_{13}^i\}$;

6) будуємо фронтальні проєкції $\{f_{13}^i\}$ фронталей, що є дотичними до відповідних гіпербол $\{\bar{\delta}_{13}^i\}$, і фіксуємо відповідні точки дотику: $\{\bar{M}_{13}^i\} ((f_{13}^M)^i \perp x_1''$ з системи $\frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}} \longleftarrow \frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}}$,

де $\Pi_{12}' \perp \bar{q}_{13}^i$ - площини з q_{123}^i ; цю побудову на рис. 3.25 не показано);

7) $\{\bar{M}_{13}^i\} = \bar{K}_{13}^M$ (\bar{K}_{13}^M симетрична K_{12}^M відносно x_1);

8) $M_{13} = K_{13}^M \cap \bar{K}_{13}^M$;

9) за M_{13} та K_{12}^M знаходимо, нарешті, M_{12} .

Маємо $M(0,6;0,3;0,3)$ та $f^{\max} = 0,054$.

Коли площина моделі за умовою q^1 нахилена до Π_{12} , Π_{13} та Π_{23} однаково ($q_{123}^1 : 1,8 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$), крива K^M перетворюється у пряму охилу S . У цьому випадку маємо $M(0,6;0,6;0,6)$ та $f^{\max} = 0,216$ (рис. 3.26).

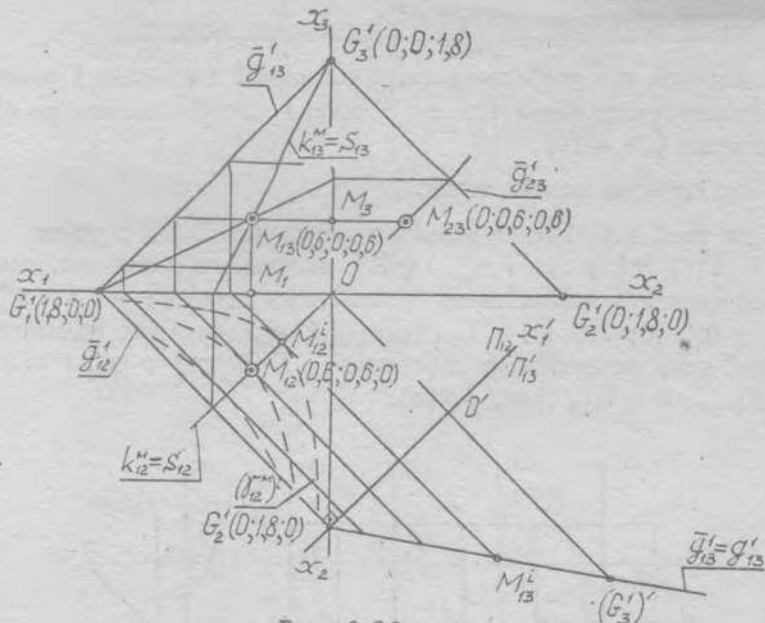


Рис. 3.26

4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКЦІЙНОЇ ГРАФІЧНОЇ МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНОГО ПРОСТОРУ

Застосування проєкційних графічних моделей багатовимірного простору E^n до розв'язання оптимізаційних задач вперше було висвітлено у працях П.В. Філіппова та його учнів [14, 15 та ін.], де розглядалося застосування до розв'язання задач лінійного програмування так званого "епюра Філіппова".

У даному посібнику для розв'язання як задач лінійного, так і нелінійного програмування застосовується проєкційна графічна модель E^n під назвою повнопольний комплекс проєкцій n -вимірного простору (ПКП- n) [17 - 19 та ін.]. Її особливістю є те, що на ній подаються усі двовимірні проєкційні поля у несуміщеному вигляді. Моделюються лише додатні величини, що їх віднесено до додатних проєкційних просторів $Ox_i^+; x_j^+; x_k^+$, де $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ та $i \neq j \neq k \neq i$.

4.1. Графічне моделювання задач лінійного програмування

Графічні моделі основних геометричних елементів.

Перш за все пригадаємо графічні моделі (на ПКП- n) основних геометричних елементів E^n : точки, прямої, площини та гіперплощини [17 - 19].

А. Графічна модель точки.

На рис. 4.1 подано графічну модель (на ПКП- n) точки

$A(x_1^A; x_2^A; \dots; x_n^A) \in E^n$ загального положення, точки, що належить тривимірному проекційному простору - $A(x_1^A; x_2^A; x_3^A; 0; \dots; 0) \in \Pi_{123}$ (рис. 4.2, а), точки, що належить двовимірному проекційному простору - $A(0; x_2^A; x_3^A; \dots; \dots; 0; \dots; 0) \in \Pi_{23}$ (рис. 4.2, б).

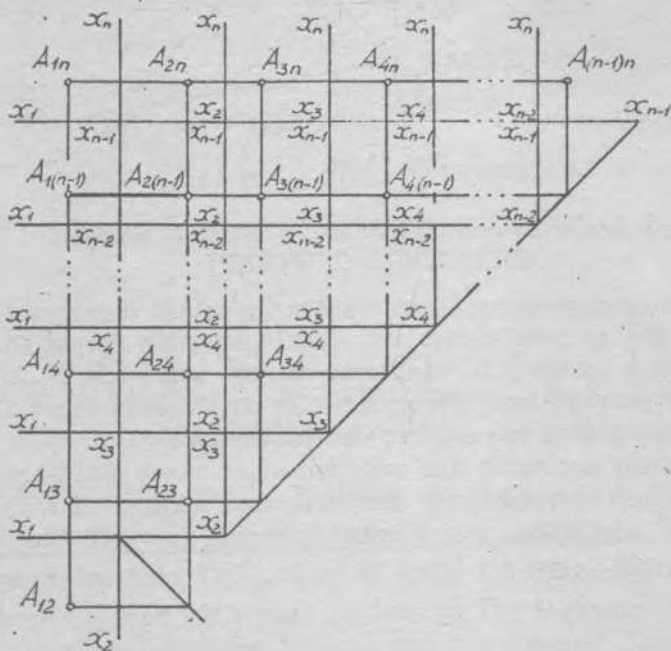


Рис. 4.1

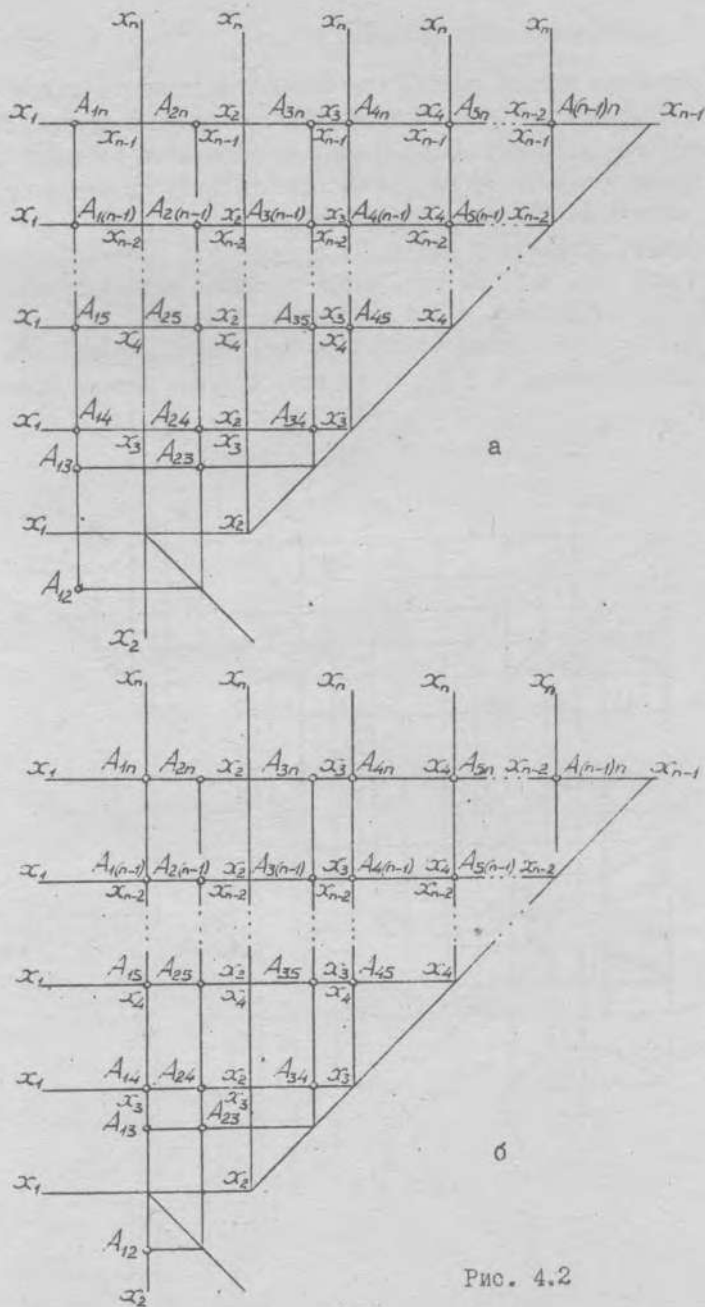


Рис. 4.2

Б. Графічна модель прямої.

Графічну модель прямої (на ПКП-п) загального положення $l \subset E^n$ подано на рис. 4.3. Пряму, що належить тривимірному проєкційному простору $l \subset \Pi_{123}$, змодельовано на рис. 4.4,б. Якщо пряма належить двовимірному проєкційному простору $l \subset \Pi_{12}$, то її модель має вигляд, зображений на рис. 4.4,а.

Пряму, паралельну якомусь з проєкційних просторів, змодельовано на рис. 4.5. На рис. 4.5,а показано модель прямої $l \parallel \Pi_{123}$, на рис. 4.5,б - прямої $l \subset \Pi_{13}$.

На рис. 4.6 зображено модель проєкціуючої прямої, на рис. 4.6,а - пряму $l \perp \Pi_{12}$, на рис. 4.6,б - модель прямої $l \perp \Pi_{123}$.

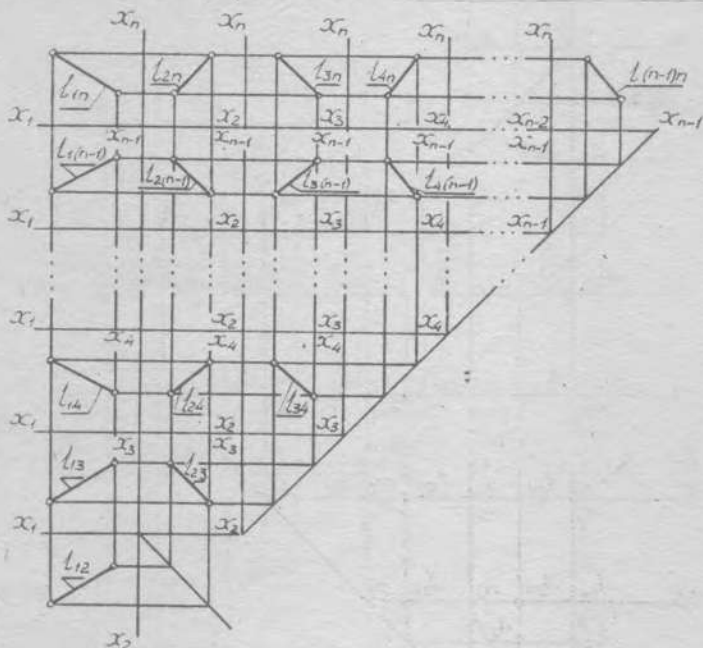


Рис. 4.3

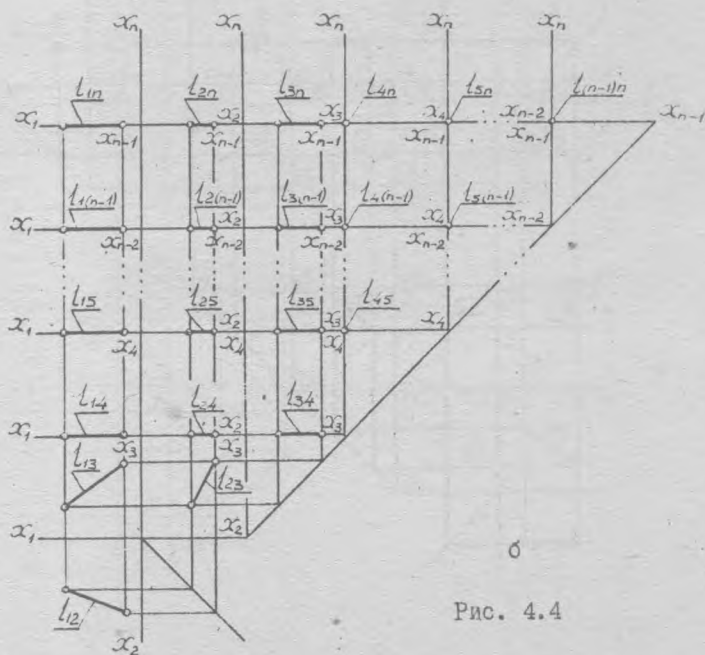
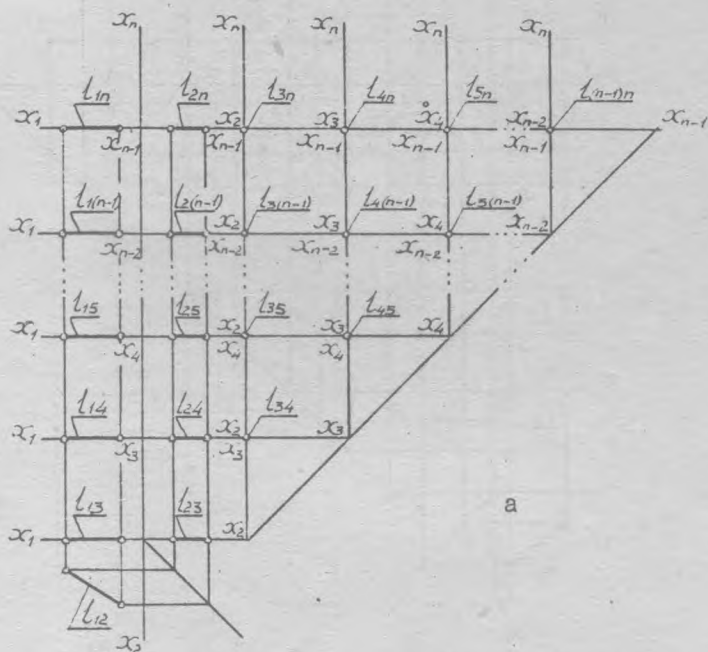


Рис. 4.4

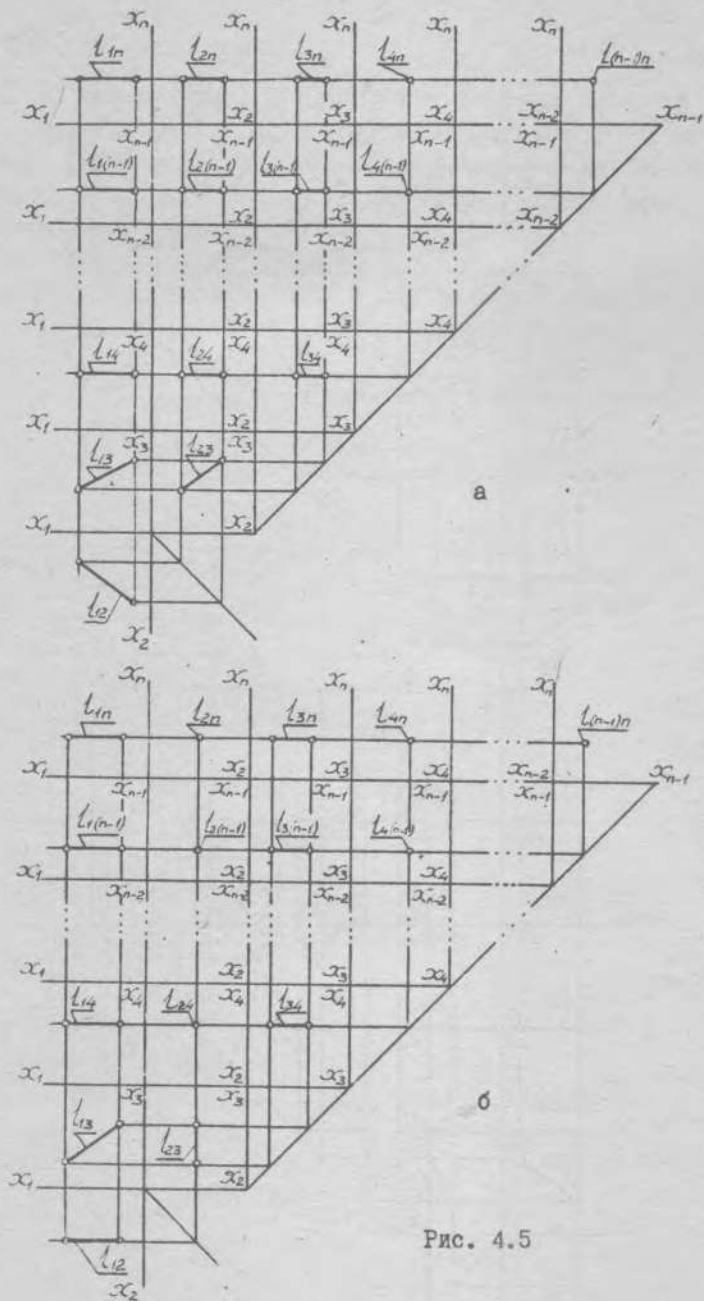


Рис. 4.5

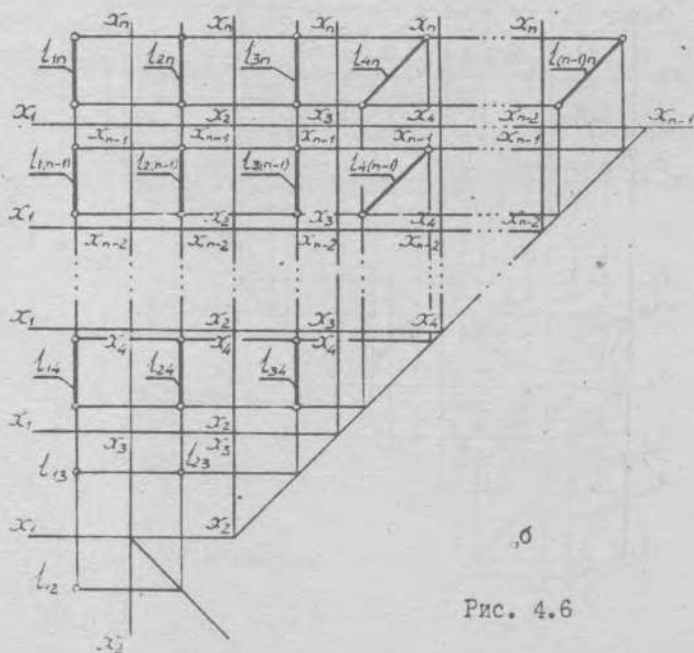
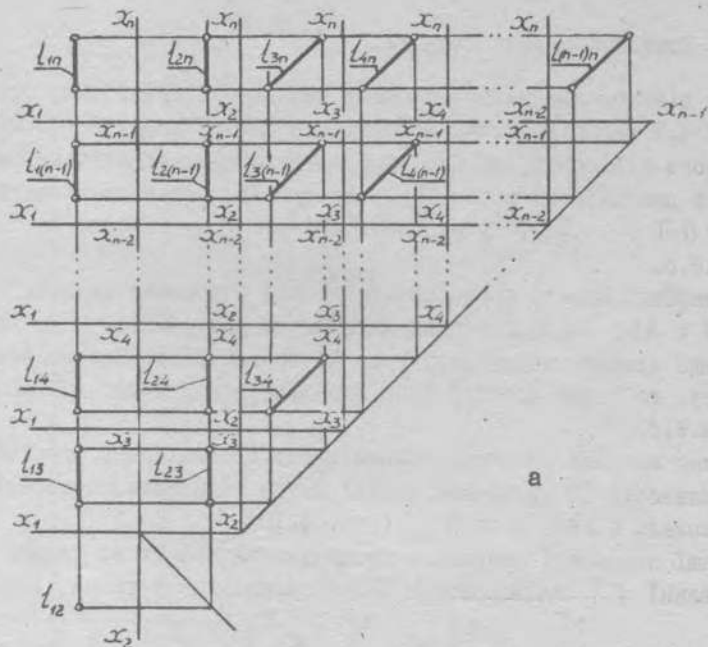


Рис. 4.6

В. Графічна модель площини.

Як відомо, двовимірну площину визначають три точки. Отже, на рис. 4.7 маємо графічну модель (на ПКП-П) площини (ABC) загального положення, на рис. 4.8,а – площини, паралельної до якоїсь з двовимірних проєкційних просторів, у даному випадку – $(ABC) \parallel \Pi_{12}$. Графічну модель $(ABC) \parallel \Pi_{123}$ подано на рис. 4.8,б.

Графічні моделі проєкційної площини зображено на рис. 4.9. Площину $(ABC) \perp \Pi_{12}$ змодельовано на рис. 4.9,а.

Якщо площина перпендикулярна до тривимірного проєкційного простору, то в цей простір вона проєкціюється у пряму – $(ABC) \perp \Pi_{123}$ (рис. 4.9,б).

Якщо площина належить тривимірному проєкційному простору, то особливості її графічної моделі можна відмітити, спостерігаючи модель $(ABC) \subset \Pi_{123}$ (рис. 4.10).

Інші подробиці взаємного розташування прямих та площин при моделюванні E^p за допомогою ПКП-П викладено у праці [19].

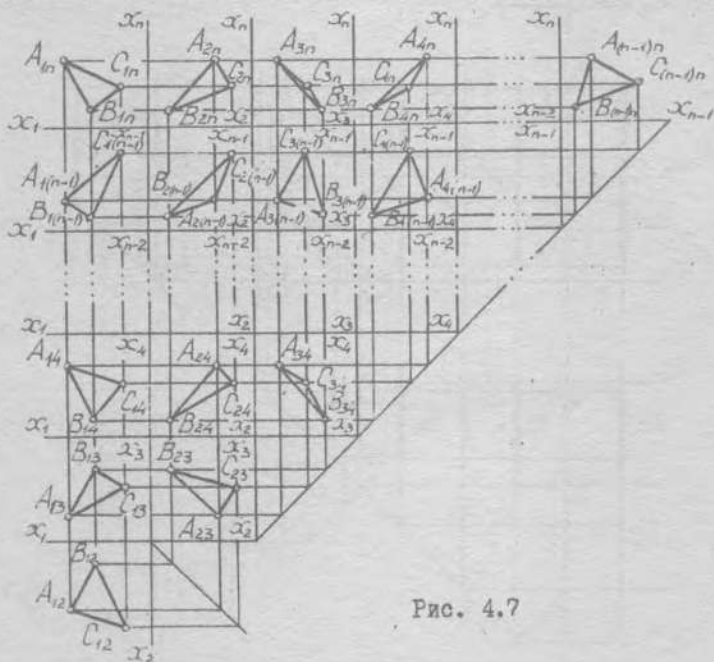
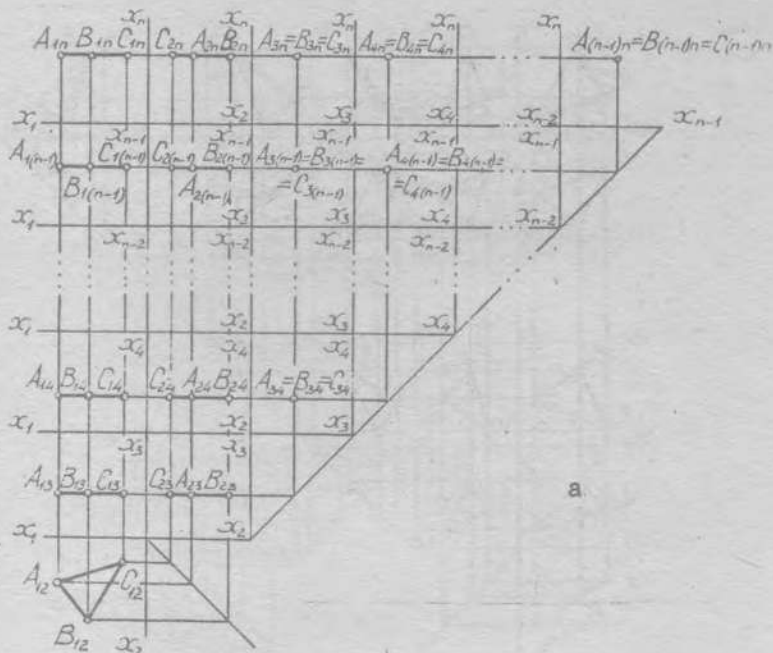
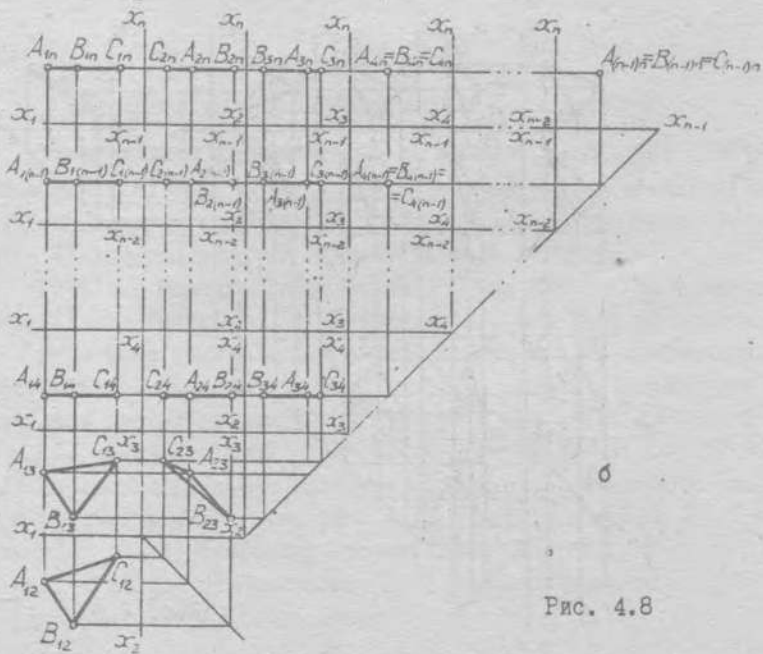


Рис. 4.7

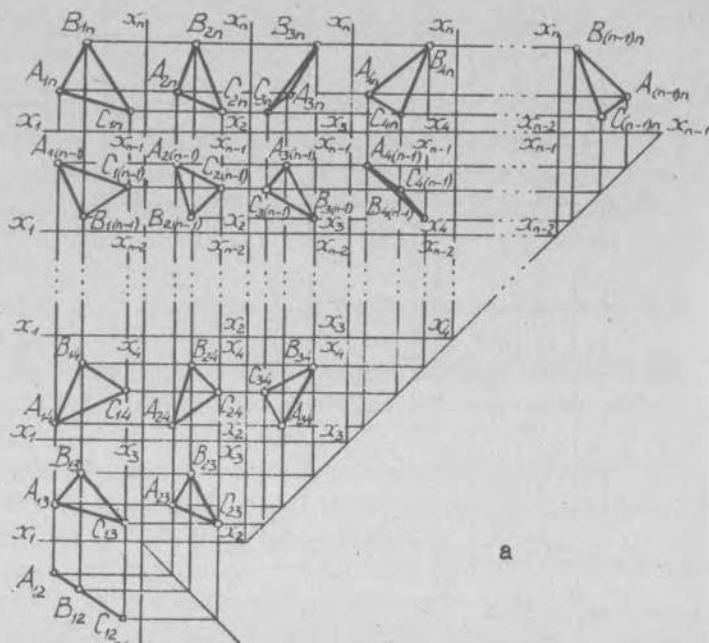


a

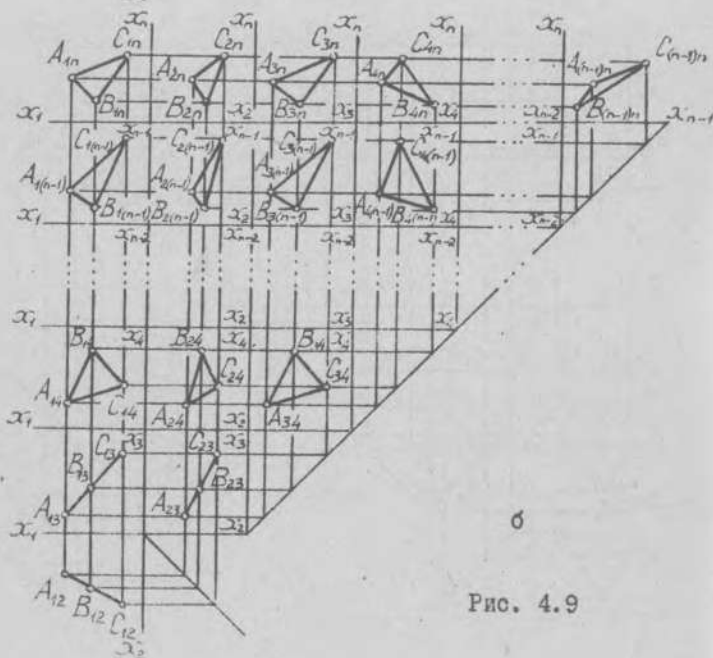


b

Рис. 4.8



a



b

Рис. 4.9

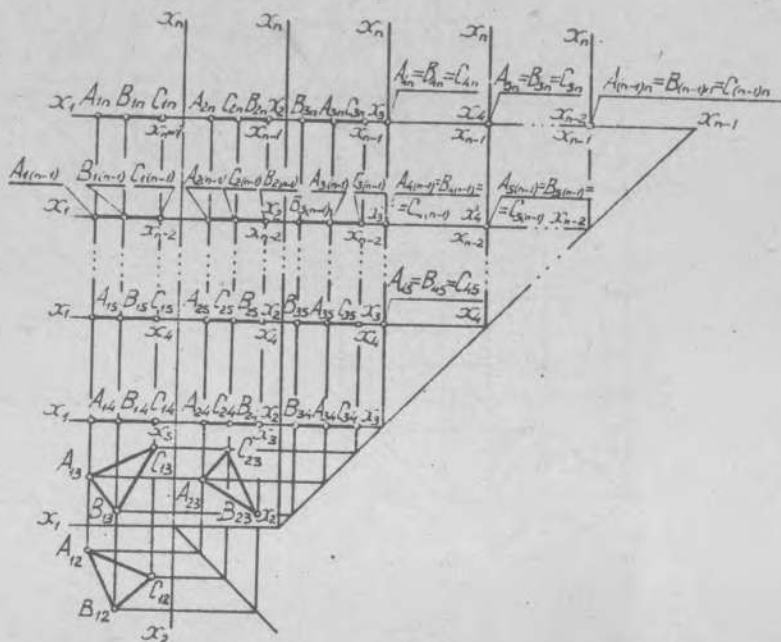


Рис. 4.10

Г. Графічна модель гіперплощини.

Гіперплощина визначається, як відомо [8, 10, 12], точками, кількість яких така ж, як і вимірність простору, а вимірність гіперплощини на одиницю нижча від вимірності простору. Отже, $(n-1)$ -вимірна площина визначається n точками.

Графічну модель гіперплощини E^n на ПКП- n визначають проєкції n точок, що їй належать. Але, оскільки гіперплощина E^n перетинає двовимірні проєкційні простори по одновимірних просторах-прямих, доцільно щоб графічна модель гіперплощини визначалася своїми слідами $(\sum_{i,j} l_{ij})$, де $i, j = 1, 2, \dots, n$ та $i \neq j$ на двовимірних проєкційних полях ПКП- n .

На рис. 4.11 маємо графічну модель гіперплощини Σ загального положення у E^n , на рис. 4.12,а - гіперплощини Σ , паралельної $(n-1)$ -вимірному проєкційному простору $(\Pi_{12\dots n-1})$, на рис. 4.12,б - гіперплощини Σ , перпендикулярної до $(n-1)$ -вимірному проєкційному простору.

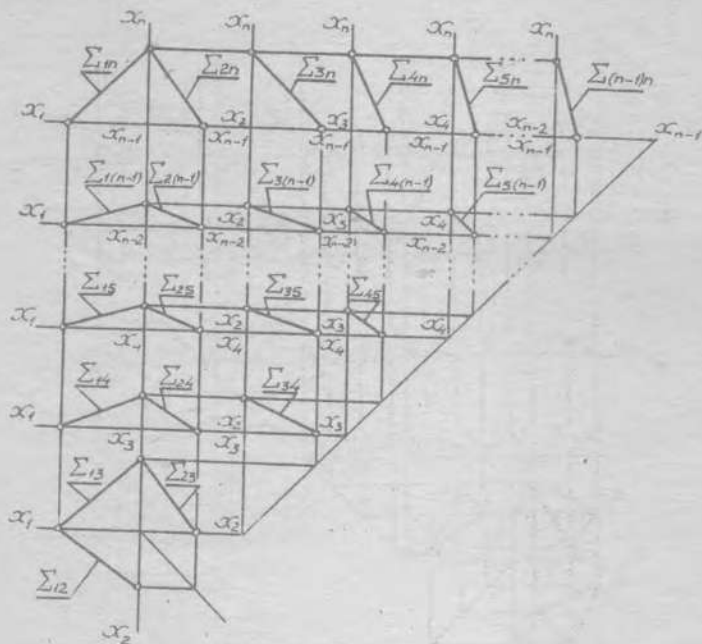


Рис. 4.II

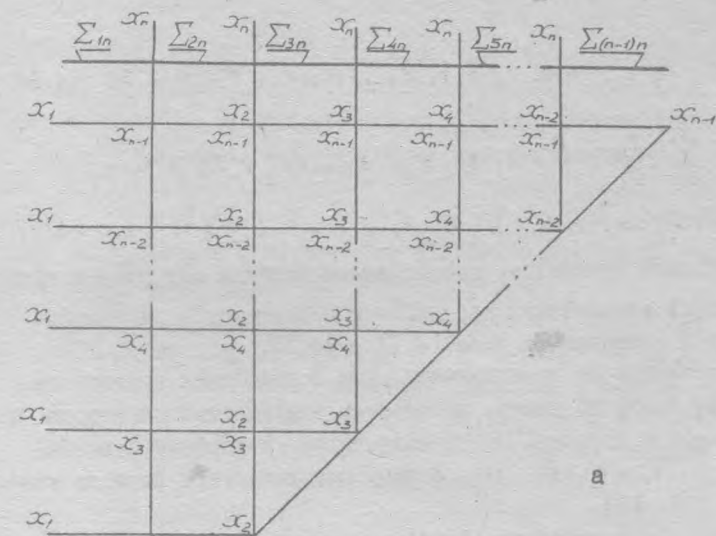
Д. Графічне моделювання нерівностей.

За аналогією графічного моделювання нерівностей у тривимірному просторі на ескрі Монжа (див. с. 30) графічне моделювання нерівностей багатовимірного простору на ПКП- η зводиться до визначення двовимірних проєкцій тривимірних відрізків (скінченних або нескінченних) багатовимірного простору, обмежених двовимірними проєкційними просторами. Проєкції тривимірних відрізків самі є двовимірними відріками (скінченними або нескінченними) двовимірних проєкційних площин.

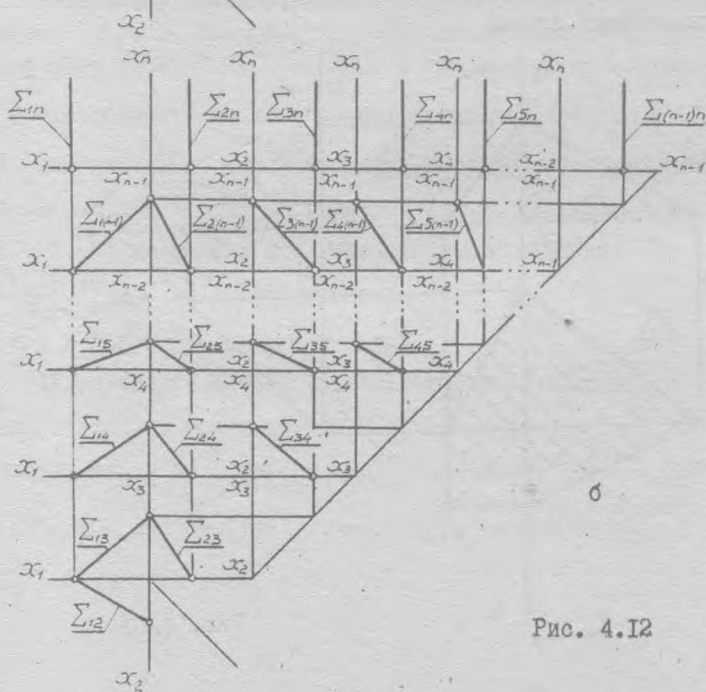
У подальшому викладі, як і у прикладах, обмежимося випадками моделювання у чотиривимірному просторі E^4 .

У E^4 умови-обмеження нерівності, як і у тривимірному випадку, у аналітичному поданні набувають двох основних форм:

$$g^d: \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{a_i} - I < 0, \text{ де } x_1, x_2, \dots, x_4 > 0,$$



a



b

Рис. 4.12

$$i = 1, 2, \dots, 4, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq n - 1; \quad (4.1)$$

$$g^j : \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{a_i} - 1 \geq 0, \quad \text{де } x_1, x_2, \dots, x_4 \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, 4, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq n - 1. \quad (4.2)$$

Як неважко зрозуміти, геометричною моделлю цих умов є відсіки додатних тривимірних проекційних підпросторів E^n , обмежених ще й площинами з умов (4.1) і (4.2).

При розгляді як геометричних, так і графічних моделей на ПКП-п слід брати до уваги, що площини вимірностей m та \bar{m} , перетинаючись у просторі E^n , визначають k -площину з вимірністю $k : k = m + \bar{m} - n$, а тому перетинаються лише за умови $k \geq 0$ [8, 12].

На рис. 4.13 зображено графічну модель тривимірної гіперплощини E^4 на ПКП-4, коли площина \bar{g}^j з умови (4.1) є площиною загального положення й моделюється скінченними відсіками двовимірних проекційних площин.

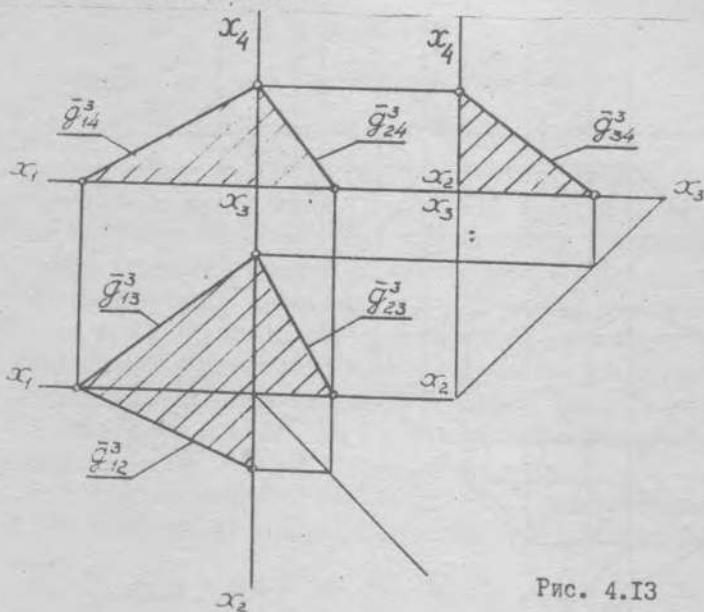


Рис. 4.13

Якщо нерівність (4.1) має лише три незалежні змінні, а на четверту, наприклад x_4 , не накладено ніяких обмежень, площина \bar{q}^d з умови (4.1) є проєкційною відносно проєкційного простору $\Pi_{123}(\bar{q}^d \perp \Pi_{123})$. У цьому випадку геометричну модель нерівності (4.1) складає скінченний відсік тільки проєкційного простору Π_{123} , а відсіки Π_{124} , Π_{134} та Π_{234} - нескінченні. Аналогічний вигляд мають і відповідні відсіки-проєкції на графічній моделі ПКП-4 (рис. 4.14,а).

У випадку, коли умова (4.1) має лише дві незалежні змінні, наприклад, x_1 та x_2 , а тому $\bar{q}^d \perp \Pi_{12}$, геометрична модель її не має жодного скінченного відсіку. Графічна ж модель - лише один двовимірний скінченний відсік на Π_{12} (рис. 4.14,б).

Випадок з однією (тут $x_4 = \pi$) незалежною змінною константною в умові (4.1), геометрично моделюється відсіками, які визначає гіперплощина \bar{q}^d , паралельна до тривимірного проєкційного простору Π_{123} . У цьому випадку всі відсіки у геометричній моделі нескінченні.

Нарешті, у випадку, коли умова-обмеження супроводжується умовами $x_4 = 0$ або $x_3, x_4 = 0$, маємо виродження гіперплощини у звичайну двовимірну - площину або одновимірну - пряму.

Застосовуючи до розв'язання оптимізаційних задач ПКП- n , слід пам'ятати, що, як і випадку епора Монжа, з суміщення відсіків-проєкцій ($N_i^k N_j^k O$, де $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ та $k = 1, 2$) не завжди впливає суміщення відсіків-оригіналів ($N_i^1 N_j^1 N_k^1 O$ та $N_i^2 N_j^2 N_k^2 O$, де $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ та $i \neq j \neq k \neq i$).

Кількість суміщених відсіків-проєкцій залежить від кількості суміщених точок збігу $N_i^1 = N_i^2$, де $i = 1, 2, \dots, n - 1$ й визначається за формулою $C_2^{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Так, якщо на ПКП- n - дві суміщені точки збігу, то маємо $C_2^2 = 1$, три - $C_2^3 = 3$, чотири - $C_2^4 = 6$ і т.п.

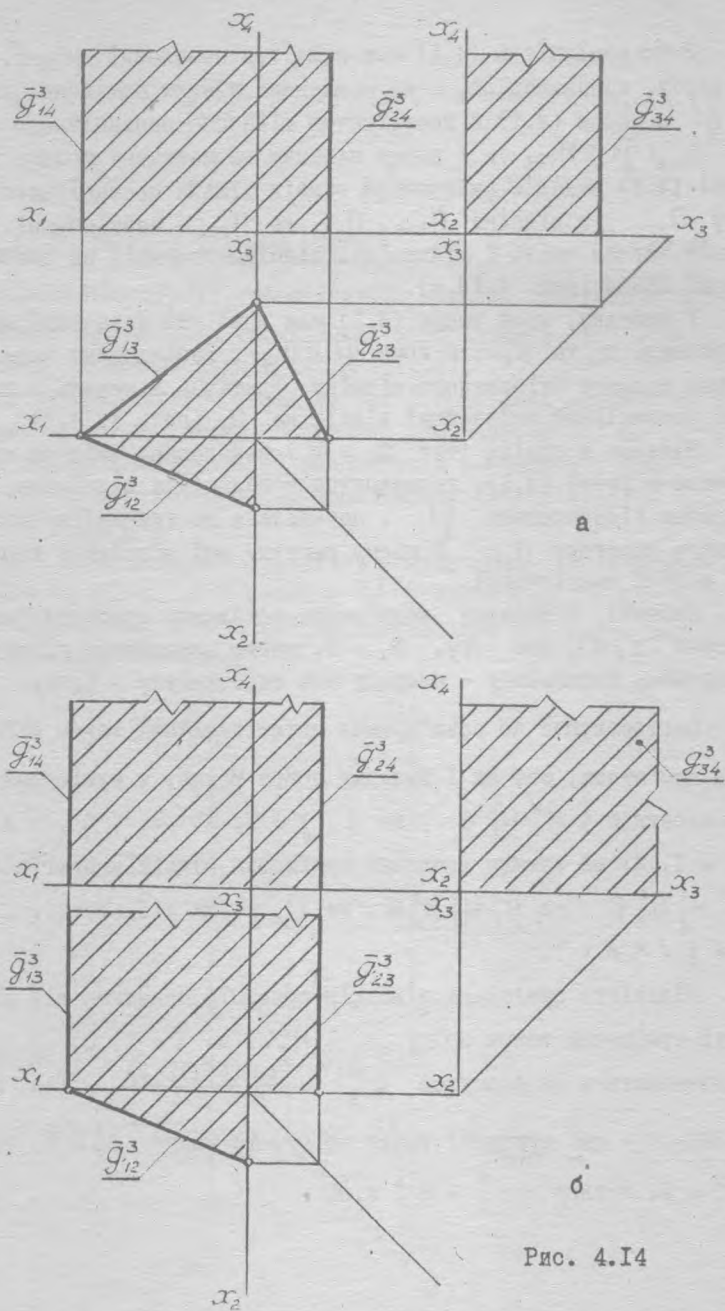


Рис. 4.14

Приклади графічного розв'язання задач
лінійного програмування

Розглядаючи приклади розв'язання задач лінійного програмування за методом проєкційної графіки на ПКП-4, зробимо це з урахуванням зміни виду УФ.

У першому прикладі УФ - трикутний відсік площини.

Приклад 4.1. Максимізувати $840x_1 + 630x_2 + 720x_3 + 630x_4$, якщо $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - I2 = 0$, $6x_1 + I2x_2 + I0x_3 + I5x_4 - 30 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Отже, маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f: 840x_1 + 630x_2 + 720x_3 + 630x_4; \\ h^1: 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - I2 = 0; \\ g^2: 6x_1 + I2x_2 + I0x_3 + I5x_4 - 30 \leq 0; \\ g^3: x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{1234}: 840x_1 + 630x_2 + 720x_3 + 630x_4 = c; \\ h'_{1234}: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} - I = 0; \\ g^2_{1234}: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2,5} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2} - I \leq 0; \\ g^3_{1234}: 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, \\ \quad i, j, k = I, \dots, 4, \\ \quad i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right.$$

Цільова функція геометрично моделюється тут сім'єю паралельних гіперплощин з параметром C , а графічно - слідами цих площин на двовимірних площинах проєкцій. Покладемо $C = 3084$,

а тому $f_{1234}^0: \frac{x_1}{3,7} + \frac{x_2}{4,9} + \frac{x_3}{4,3} + \frac{x_4}{4,9} = I$.

Що стосується $UF = \emptyset$, то вона, як відмічалось вище, у певному випадку моделюється трикутником-відсіком $\Delta KLM = (h'_{1234} \cap \bigcap g^2_{1234}) \cap 0x_i^+ x_j^+ x_k^+$, де $i, j, k = I, \dots, 4$ та $i \neq j \neq k \neq i$ (рис. 4.15).

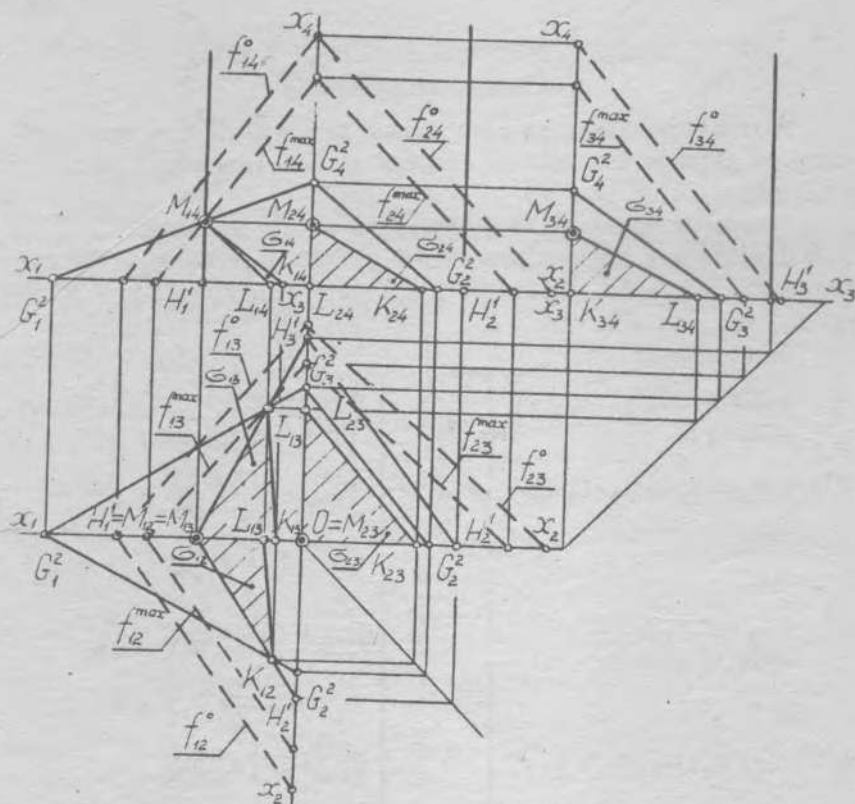


Рис. 4.15

Максимальну гіперплощину визначає точка $M = \bar{h}'_{14} \cap \bar{g}^2_{14}$,

а тому $M(2; 0; 0; 1,25)$ та $f_{1234}^{\max} = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3,5} + \frac{x_4}{4} - 1$ й

$f^{\max} = 1837,5$.

І в наступному прикладі розглядається випадок, коли УФ є двовимірним плоским відсіком.

Приклад 4.2. Максимізувати $5x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 6x_4$, якщо $10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 300$, $15x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 200$ та $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, тобто

$$\left. \begin{aligned}
 f &: 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 6x_4; \\
 h^1 &: 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 300; \\
 g^2 &: 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 200; \\
 g^3 &: x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{1234} &: 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 6x_4 = c; \\
 h'_{1234} &: \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{15} + \frac{x_4}{30} - I = 0; \\
 g^2_{1234} &: \frac{x_1}{15,3} + \frac{x_2}{20} + \frac{x_3}{20} + \frac{x_4}{10} - I \leq 0; \\
 g^3_{1234} &: 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, \\
 & \quad i, j, k = 1, \dots, 4, \\
 & \quad i \neq j \neq k \neq i.
 \end{aligned} \right.$$

Тут теж цільова функція геометрично моделюється сім'єю паралельних гіперплощин, а графічно - їх слідами. Покладемо $c = 120$, $f^0_{1234} : \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{10} + \frac{x_4}{20}$.

$U\Phi = \sigma$ і в даному випадку - трикутний відсік $KLN = h^1_{1234} \cap g^2_{1234}$. Точки K_{12} та L_{13} одержуємо відповідно на проєкційних полях Π_{12} та Π_{13} : $K_{12} = \bar{h}^1_{12} \cap \bar{g}^2_{12}$, $L_{13} = \bar{h}^1_{13} \cap \bar{g}^2_{13}$. За K_{12} будемо K_{13} , K_{23} , K_{14} , K_{24} й K_{34} відповідно, за L_{13} - L_{12} , L_{23} , L_{14} , L_{24} й L_{34} . Точку N_{24} одержуємо на полі Π_{24} : $N_{24} = \bar{h}^1_{24} \cap \bar{g}^2_{24}$. За N_{24} будемо відповідно N_{12} , N_{13} , N_{14} , N_{23} , N_{34} (рис. 4.16).

Легко перекоонатися в тому, що саме точка L є точкою максимуму ($L = M$). Отже, $L = M(5; 0; 12,5; 0)$, а тому $f^{\max}_{1234} : \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{18} + \frac{x_3}{14} + \frac{x_4}{30} = I$ та $f^{\max} = 155$.

Далі розглядаються два приклади, коли $U\Phi$ - чотиривимірний відсік. У першому прикладі $U\Phi$ частково обмежена відсіками проєціюючих гіперплощин.

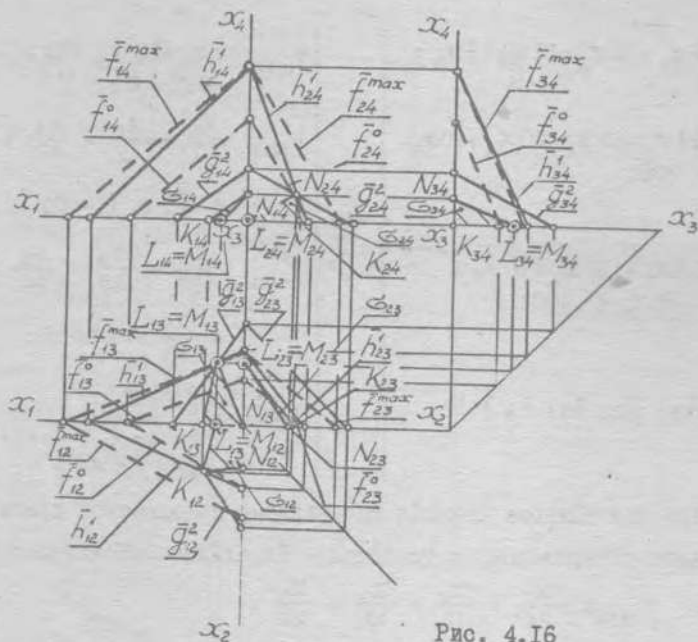


Рис. 4.16

Приклад 4.3. Максимізувати $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 14,3x_4$, якщо $2x_1 + 3x_2 - 8 \leq 0$; $2x_2 + 5x_3 - 10 \leq 0$, $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 - 15 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Маємо:

$$\left. \begin{aligned}
 f &: 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 14,3x_4; \\
 g^1 &: 2x_1 + 3x_2 - 8 \leq 0; \\
 g^2 &: 2x_2 + 5x_3 - 10 \leq 0; \\
 g^3 &: 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 - 15 \leq 0; \\
 g^4 &: x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{1234} &: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \\
 &: + \frac{x_4}{14,3} - I = 0; \\
 g^1_{1234} &: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} - I \leq 0; \\
 g^2_{1234} &: \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{2} - I \leq 0; \\
 g^3_{1234} &: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} + \\
 &: + \frac{x_4}{1} - I \leq 0; \\
 g^4_{1234} &: 0x_1^+ x_2^+ x_3^+ x_4^+, i, j, k = \\
 &= 1, \dots, 4, i \neq j \neq k \neq i.
 \end{aligned} \right.$$

тобто цільова функція геометрично моделюється сім'єю паралельних гіперплощин з параметром c . Показавши $c = 9$, одержуємо

$$f_{1234}^0 : \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{14,3} = 1. \text{ Графічні моделі гіперплощин - однойменні сліди на двовимірних проєкційних площинах: } f_{12}^0,$$

$f_{13}^0, \dots, f_{24}^0$.

$U\Phi = \sigma$ являє собою чотиривимірний відсік, який обмежено додатними відсіками тривимірних проєкційних просторів Π_{123} , Π_{124} , Π_{134} , які, у свою чергу, обмежені й двовимірними проєкційними площинами цих просторів, і відсіками гіперплощин $\bar{q}_{1234}^1, \bar{q}_{1234}^2, \bar{q}_{1234}^3$, з яких \bar{q}_{1234}^1 та \bar{q}_{1234}^2 - проєціюючі.

Графічною моделлю $U\Phi = \sigma$ є проєкції зазначеного відсіку: відсіку двовимірних проєкційних площин $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}, \Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{34}$, що обмежені слідами гіперплощин $\bar{q}_{1234}^1, \bar{q}_{1234}^2$ та \bar{q}_{1234}^3 : $\bar{q}_{12}^1, \bar{q}_{13}^1$ та ін. (рис. 4.17).

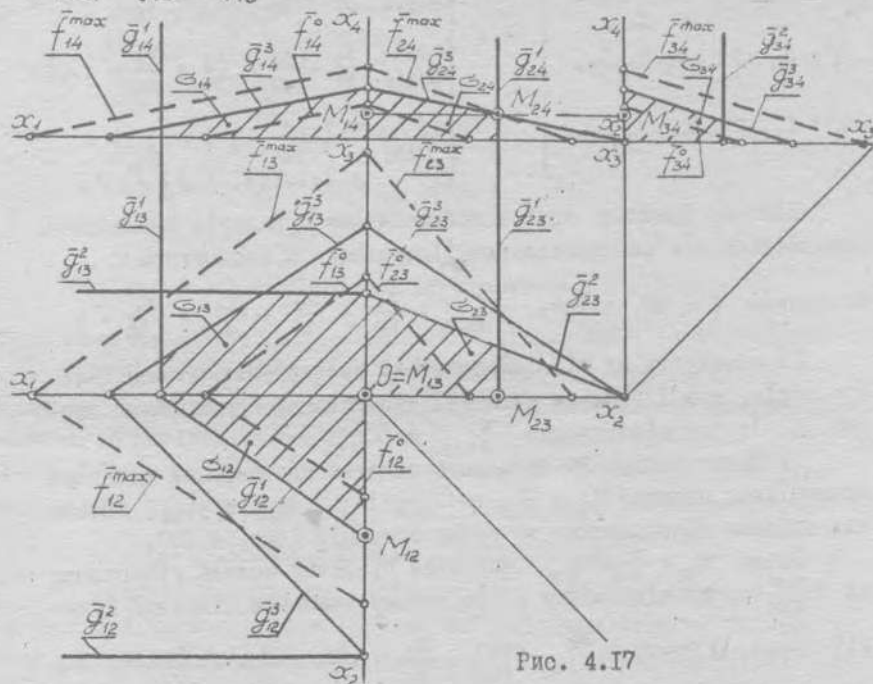


Рис. 4.17

Саме точка $M_{24} = \bar{q}_{24}^1 \cap \bar{q}_{24}^3$ й визначає $\bar{f}_{24}^{\max} (\| \bar{f}_{24}^{\circ})$ - слід геометричної моделі f_{1234}^{\max} максимального значення цільової функції. За f_{24}^{\max} будемо $\bar{f}_{14}^{\max} \| \bar{f}_{14}^{\circ}$, $\bar{f}_{34}^{\max} \| \bar{f}_{34}^{\circ}$, $\bar{f}_{13}^{\max} \| \bar{f}_{13}^{\circ}$, $\bar{f}_{12}^{\max} \| \bar{f}_{12}^{\circ}$, та $\bar{f}_{23}^{\max} \| \bar{f}_{23}^{\circ}$.

Очевидно, що $M = M(0; 2; 7; 0; 5)$, $f_{1234}^{\max} : \frac{x_1}{6,5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4,7} + \frac{x_4}{1,4} \approx I$ та $f^{\max} \approx 20,55$.

Приклад 4.4. Мінімізувати $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, якщо $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 20$, $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 0$ та $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 0$.

Звідси маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ g^1 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 20; \\ g^2 : x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 30; \\ g^3 : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{1234} : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} - I = 0; \\ g^1_{1234} : \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{20} + \frac{x_4}{20} - I \geq 0; \\ g^2_{1234} : \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{30} + \frac{x_4}{30} - I \leq 0; \\ g^3_{1234} : 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, i, j, k = \\ = 1, \dots, 4, i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right.$$

Цільова функція: як і в попередньому прикладі, геометрично моделюється сім'єю паралельних гіперплощин з параметром c .

Приймаємо $c = 40$, а тому $f_{1234}^{\circ} : \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{40} + \frac{x_3}{40} + \frac{x_4}{40} = I$.

УФ обмежують як відсіки додатних тривимірних проєкційних просторів, так і відсіки додатних двовимірних проєкційних площин та відсіки гіперплощин \bar{q}_{1234}^1 й \bar{q}_{1234}^2 .

Графічну модель УФ складають відсіки двовимірних додатних проєкційних площин Π_{12} , Π_{13} , Π_{23} , Π_{14} , Π_{24} та Π_{34} , обмежених слідами гіперплощин та осями проєкцій (рис. 4.18).

Точка $M_{12} = \bar{q}_{12}^1 \cap \bar{q}_{12}^2$ визначає графічну модель гіперплощини f_{1234}^{\min} , що відповідає мінімальному значенню цільової функції.

Отже, $M(0; 10; 0; 0)$, $f_{1234}^{\min} : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{10} + \frac{x_4}{10} - I = 0$

та $f^{\min} = 10$.

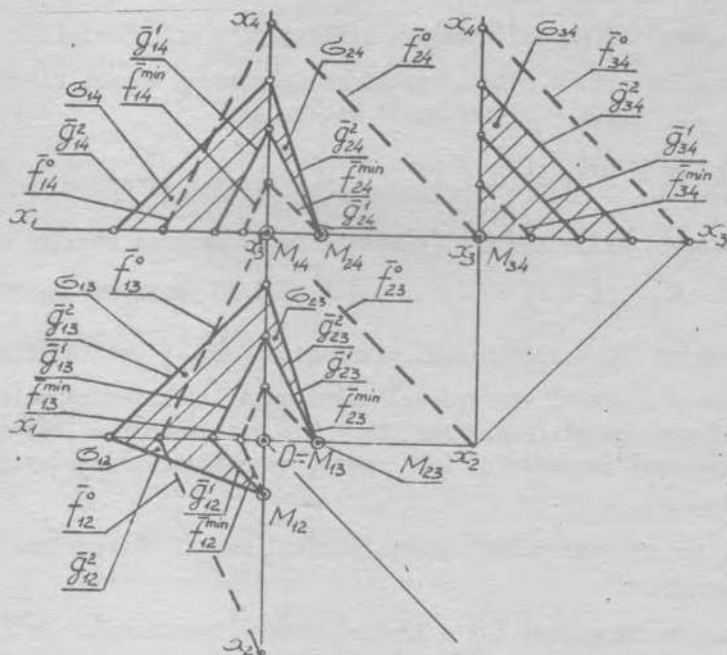


Рис. 4.18

4.2. Графічне моделювання задач нелінійного програмування

Розв'язання задач нелінійного програмування із застосуванням графічних проекційних моделей багатовимірного простору утруднюється через ускладнення проекційних графічних моделей багатовимірних об'єктів-багатовидів. Проте й тут графічні моделі дають можливість у ряді випадків як спростувати наближення до екстремуму, так і підтвердити або спростувати його існування.

Графічні моделі поверхонь E^n

У викладі обмежимося застосуванням графічних моделей лише чотиривимірного простору (ПКП-4) та розглядом моделей найпростіших квадратичних поверхонь: сфери, циліндра, гіперсфери, гіпер-

циліндра, гіпереліпсоїда.

А. Графічні моделі сфери та гіперсфери – найпростіші.

Як відомо [8, с. 454], канонічна аналітична модель гіперсфери (Ω^{n-1} ; ($n - 1$)-вимірної) має вигляд

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2, \text{ де } x_i \in E^n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

Зокрема, якщо $x_i \in E^4$ (рівняння (4.3) набуває вигляду $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = R^2, \quad i = 1, 2, \dots, 4 \text{ і } x_i \geq 0$), то одержуємо графічну модель на ПКП-4 тривимірної гіперсфери (Ω^3 ; рис. 4.19,а).

Якщо в рівнянні тривимірної сфери одна з незалежних змінних дорівнює нулеві (наприклад, $x_4 = 0$), дістанемо графічну модель звичайної двовимірної Ω^2 сфери, що належить простору (рис. 4.19,б).

Б. Аналогічний вигляд мають графічні моделі гіпереліпсоїда та еліпсоїда.

Аналітична модель ($n - 1$)-вимірного гіпереліпсоїда Ω^{n-1} така:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \text{ де } x_i \in E^n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

У випадку тривимірного гіпереліпсоїда Ω^3 (4.4) набуває вигляду $\sum_{i=1}^4 \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \text{ де } x_i \in E^4, \quad i = 1, 2, \dots, 4$, а графічна модель, з урахуванням $x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 4$, на ПКП-4 – вигляду, зображеного на рис. 4.20,а.

На рис. 4.20,б подано графічну модель на ПКП-4 звичайного еліпсоїда Ω^2 , який одержуємо з тривимірного у випадку $x_4 = 0$.

В. Аналітична модель проєкційної прямого кругового ($n - 1$)-вимірного гіперциліндра Ω^{n-1} має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = R^2, \text{ де } x_i \in E^n, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ та } \quad (4.5)$$

$$0 \leq x_n < \infty.$$

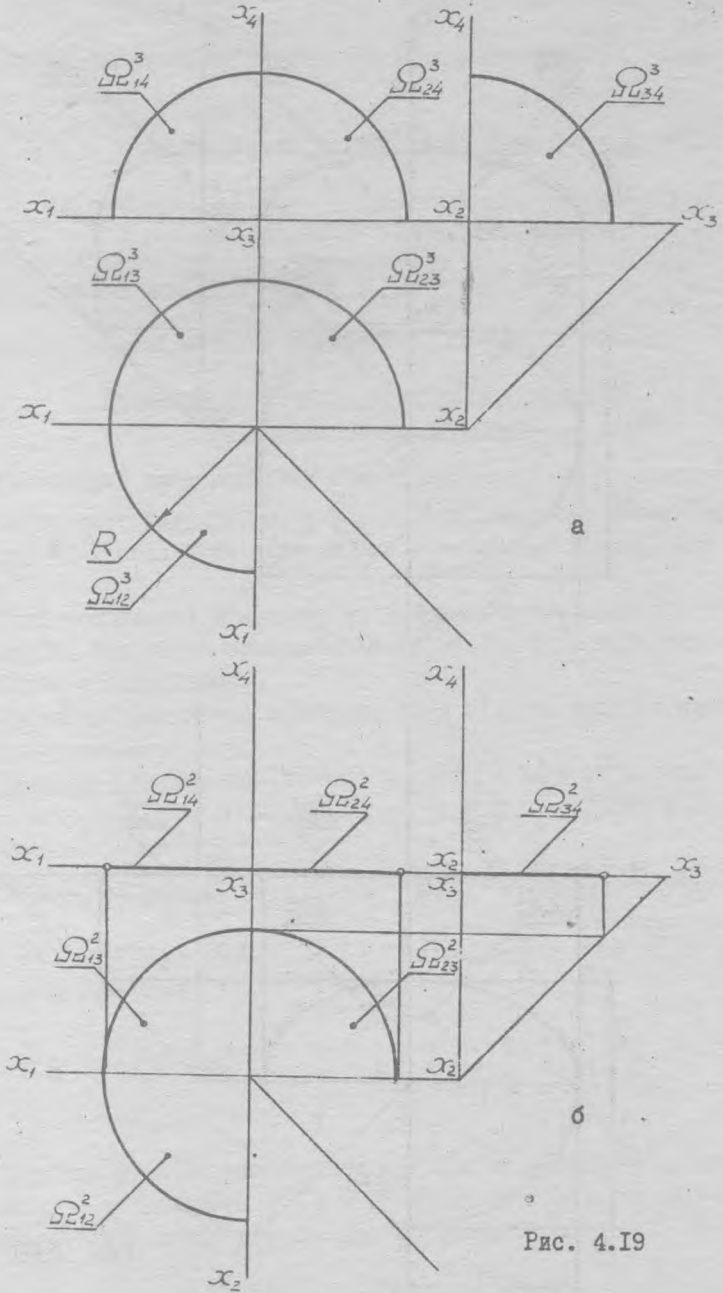


Рис. 4.19

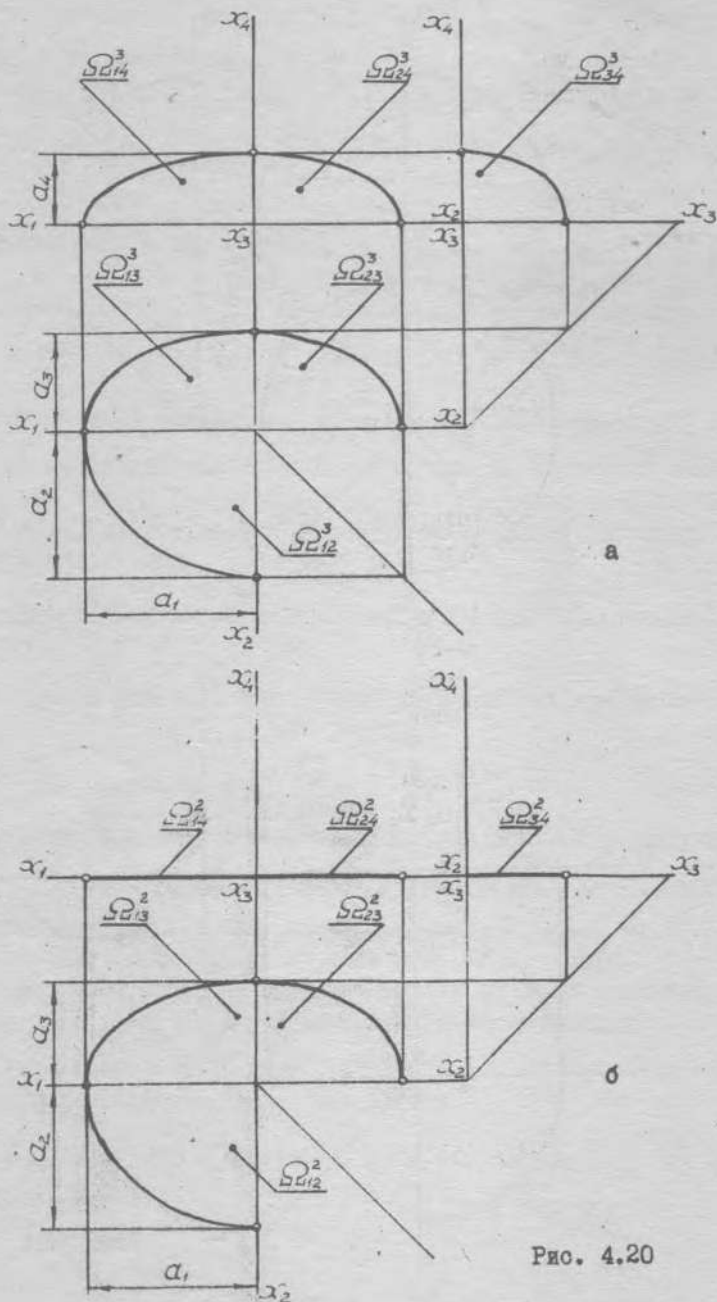


Рис. 4.20

Відповідно до попереднього викладу, у випадку Ω^3 одержуємо з рівняння (4.5)

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = R^2, \text{ де } x_i \in E^4, i = 1, 2, 3 \text{ та } 0 \leq x_4 < \infty,$$

тобто проєціюючий $\Omega^3 \perp \Pi_{123}$ - тривимірний гіперциліндр, а у випадку $0 \leq x_3, x_4 < \infty$ - аналітичну модель двовимірного проєціюючого кругового циліндра $\Omega^2 \perp \Pi_{12} : \sum_{i=1}^2 x_i^2 = R^2$, де $i = 1, 2$. Їх графічні моделі подано, відповідно, на рис. 4.21, а, б.

Приклади графічного розв'язання задач нелінійного програмування

Розглянуті вище графічні моделі найпростіших багатовимірних поверхонь показують, що у деяких випадках розв'язання задач простору E^n може бути зведено до розв'язання відповідних задач E^3 .

Такі можливості з'являються, зокрема, тоді, коли або цільова функція, або умова-обмеження частково (чи усі) моделюються проєціюючими поверхнями.

Спочатку розглянемо приклади, коли цільова функція моделюється гіперсферою.

Приклад 4.5. Екстремізувати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, якщо $24x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 60x_4 = 120$; та $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Отож,

$$\left. \begin{array}{l} f : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \\ h^1 : 24x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 60x_4 = 120; \\ g^2 : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{1234} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C; \\ h^1_{1234} : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{2} - \\ \quad - I = 0; \\ g^2_{1234} : 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, \\ \quad i, j, k = 1, \dots, 4, \\ \quad i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right.$$

Цільова функція моделюється тут сім'єю гіперсфер з параметром C , що належать E^4 , а графічну їх модель на ПКП-4 складають сім'ї концентричних кругів-проєкцій сфер, які нале-

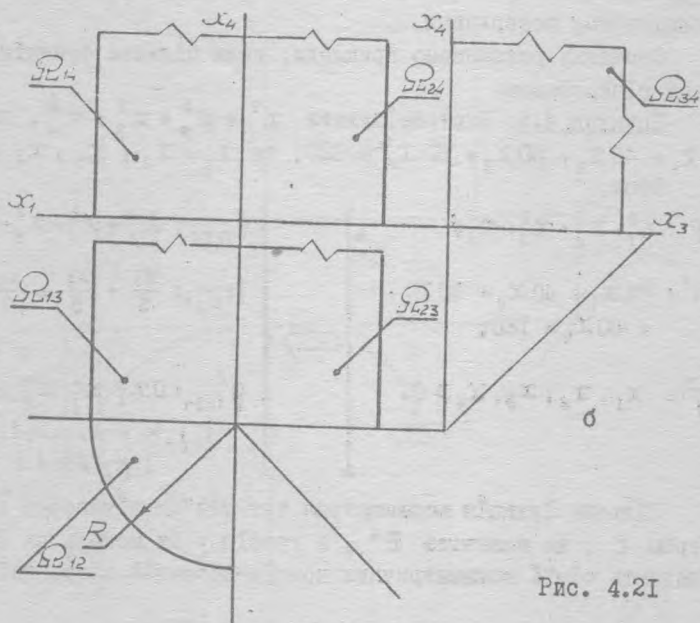
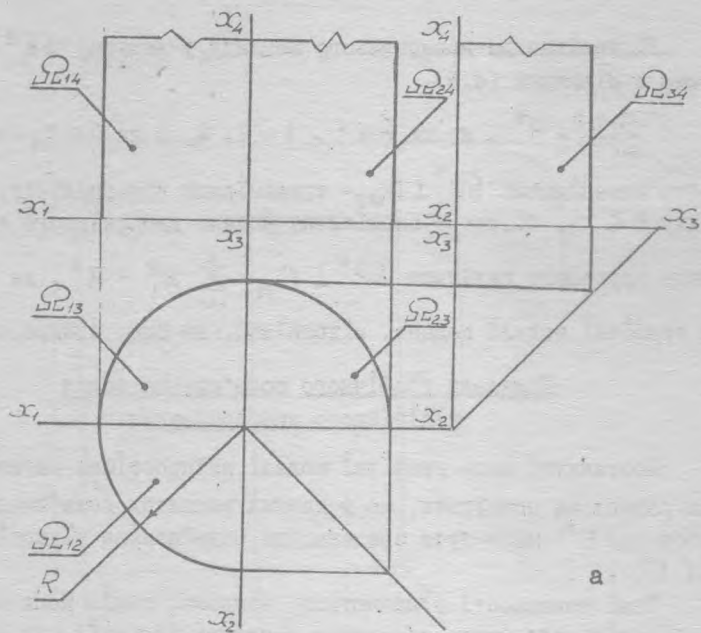


Рис. 4.21

жать додатним проекційним просторам Π_{ijk} , де $i, j, k = 1, 2, \dots, 4$ та $i \neq j \neq k \neq i$.

УФ = σ моделюється відсіком гіперплощини h_{1234}^1 , обмеженим слідами $h_{12}^1, h_{13}^1, h_{14}^1, h_{23}^1, h_{24}^1, h_{34}^1$, осями проекцій, відсіками двовимірних площин проекцій.

Очевидно, що цільова функція мінімального значення (гіперсфера мінімального радіуса) визначається точкою дотику гіперсфери до гіперплощини $h_{1234}^1: h_{1234}^1 \Pi f_{1234}^{\min} = M$. Оскільки $|N_1^1 O| > |N_3^1 O| > |N_2^1 O| > |N_4^1 O|$, то точка M належить відсіку $N_2^1 N_3^1 N_4^1 \subset h_{1234}^1$.

Це впливає з

Твердження 4.1. У кожному з тривимірних відсіків $Ox_i x_j x_k$ (де $i, j, k = 1, \dots, n$ та $i \neq j \neq k \neq i$) евклідового простору, обмежених взаємно перпендикулярними двовимірними площинами проекцій $Ox_i x_j$ (де $i, j = 1, \dots, n$ та $i \neq j$), віддалі точки перетину осей проекцій O від гіперплощини $h_{1\dots n}$ визначається як

$$|MO| = \frac{|N_i O| \cdot |N_j O| \cdot |N_k O|}{\sqrt{|N_i O|^2 \cdot |N_j O|^2 + |N_i O|^2 \cdot |N_k O|^2 + |N_j O|^2 \cdot |N_k O|^2}},$$

де $i, j, k = 1, \dots, n$ та $i \neq j \neq k \neq i$, а $N_i = Ox_i \Pi h_{1\dots n}$, $M = MO \cap h_{1\dots n}$, $MO \perp h_{1\dots n}$.

Дійсно, у двовимірному випадку, тобто у площині $Ox_1 x_2$, виходячи з подібності $\Delta N_1 N_2 O$ та $\Delta N_2 M' O$, маємо (рис. 4.22, а)

$$|M' O| = \frac{|N_1 O| \cdot |N_2 O|}{\sqrt{|N_1 O|^2 + |N_2 O|^2}},$$

а тому у випадку $\lim_{|N_1 O| \rightarrow \infty} |M' O| = |N_2 O|$, бо $|M' O| = \frac{|N_2 O|}{\sqrt{1 + \frac{|N_2 O|^2}{|N_1 O|^2}}}$,

і у випадку $\lim_{|N_2 O| \rightarrow \infty} |M' O| = |N_1 O|$, бо $|M' O| = \frac{|N_1 O|}{\sqrt{\frac{|N_1 O|^2}{|N_2 O|^2} + 1}}$.

У першому випадку пряма $N_1 N_2$ стає паралельною Ox_1 , а у другому - паралельною Ox_2 .

У тривимірному випадку ($Ox_1 x_2 x_3$; рис. 4.22, б) відповідно одержуємо з прямокутного $\Delta N_3 M' O$

$$|MO| = \frac{|H_3O| \cdot |M'O|}{\sqrt{|H_3O|^2 + |M'O|^2}},$$

а тому, враховуючи знов-таки попередній випадок, маємо

$$|MO| = \frac{|H_1O| \cdot |H_2O| \cdot |H_3O|}{\sqrt{|H_1O|^2 \cdot |H_2O|^2 + |H_1O|^2 \cdot |H_3O|^2 + |H_2O|^2 \cdot |H_3O|^2}}.$$

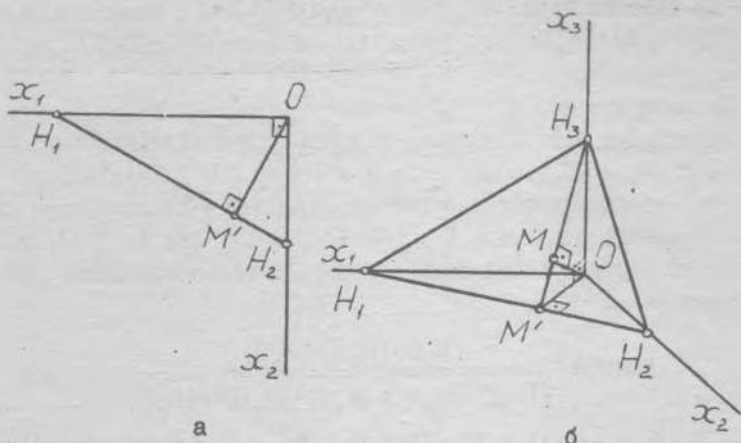


Рис. 4.22

Вважаючи $|H_1O| = \text{const}$ та $|H_2O| = \text{const}$, згідно з

$$|MO| = \frac{|H_1O| \cdot |H_2O|}{\sqrt{\frac{|H_1O|^2 \cdot |H_2O|^2}{|H_3O|^2} + |H_1O|^2 + |H_2O|^2}}$$

помічаємо, що зростання в даному випадку $|H_3O|$, а тому й будь-якого з відрізків H_1O , H_2O , H_3O , веде до збільшення віддалі $|MO|$. Так, при необмеженому зростанні $|H_3O|$ одержуємо (якщо $|H_1O| = \text{const}$ та $|H_2O| = \text{const}$)

$$\lim_{|H_3O| \rightarrow \infty} |MO| = \frac{|H_1O| \cdot |H_2O|}{\sqrt{|H_1O|^2 + |H_2O|^2}} = |M'O|.$$

Тут площина h_{123} стає горизонтально-проєціюючою ($h_{123} \perp \Pi_{12}$).

Знаходження гіперсфери мінімального радіуса виконується за допомогою заміни площин проєкцій у тривимірних проєкційних просторах: Π_{123} , Π_{124} , Π_{234} та Π_{134} (див. рис. 4.23). Точку дотику гіперсфери мінімального радіуса позначено через M . Її визначає мінімальний радіус R^{min} .

Визначивши, що точкою мінімуму є проєкція M'_{23} на проєкційному полі Π'_{23} , будемо за нею M_{24} , за M_{24} та $x_3^M - M_{23}$, далі, за радіусом R^{min} , - гіперсферу f_{1234}^{min} . За допомогою площини-посередника $\Sigma \parallel \Pi_{123} (\Sigma_{24} \rightarrow M_{24})$ одержуємо сферу $f_{123}^{\Sigma} = \sum \Pi f_{1234}^{min}$, за допомогою площини-посередника $\Sigma \parallel \Pi_{12} (\Sigma_{23} \rightarrow M_{23})$ - коло $f_{12}^{\Sigma} = \sum \Pi f_{123}^{\Sigma}$, на якому за x_2^M будемо M_{12} , а потім й M_{13} та M_{14} . Нарешті, $f_1^{min} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2,25$ та $f_1^{min} = 2,25$.

Що стосується максимуму функції, то його визначає точка H_1 як найбільш віддалена точка Уф від центра гіперсфери O - моделі цільової функції. Маємо $|OH'_1| = |OM'_{12}| = |OM'_{13}| = R^{max} = 5$, і тому $f_{1234}^{max} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 25$ та $f^{max} = 25$.

Розв'язання задачі значно спрощується, якщо геометрична модель умови-обмеження h^1 - проєціююча гіперплощина.

$$\text{Випадок 1. } h^1_{1234} \perp \Pi_{123}; h^1_{1234} : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} - I = 0.$$

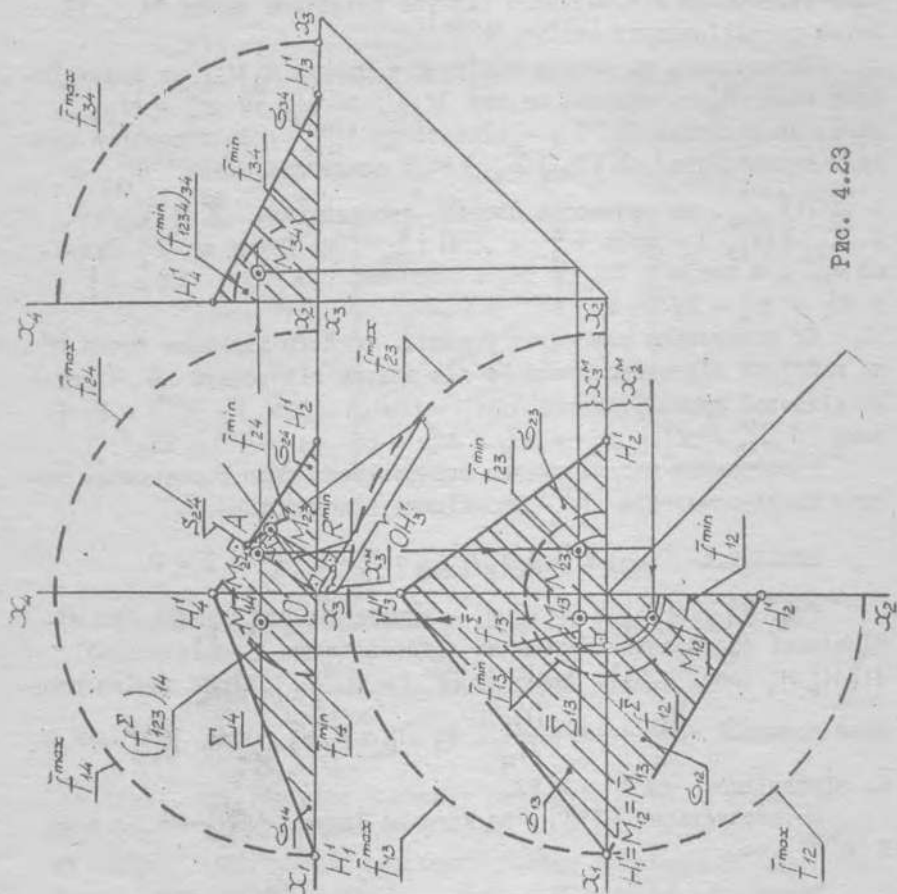
Тут $h^1_{1234} \cap \Pi_{123} = H_1 H_2 H_3$ - відрізок $Ox_1^+ x_2^+ x_3^+$. Радіус мінімальної сфери визначається як віддаль точки O від граней $H_1 H_2 H_3$ (рис. 4.24). Маємо $|OM'_{13}| = R^{min}$, після заміни площини проєкцій $\frac{\Pi_{13}}{\Pi_{12}} \rightarrow \frac{\Pi'_{13}}{\Pi'_{12}}$, де $\Pi'_{13} \perp H_1 H_2$. Отже, $R^{min} = 2,2$ і, відповідно, $f^{min} = 2,84$.

Що стосується f^{max} , то його не існує, бо $H_4 \rightarrow \infty$, а тому й $R^{max} \rightarrow \infty$.

$$\text{Випадок 2. } h^1_{1234} \perp \Pi_{12}; h^1_{1234} : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{3} - I = 0.$$

Очевидно, що $h^1_{1234} \cap \Pi_{12} = \bar{h}^1_{12}$. Радіус мінімальної сфери визначається як віддаль точки O від сліду \bar{h}^1_{12} . Отже, $|OM_{12}| = R^{min} = 2,6$ і $f^{min} = 6,76$ (рис. 4.25).

У наступному прикладі гіперсферою моделюється умова-обмеження.



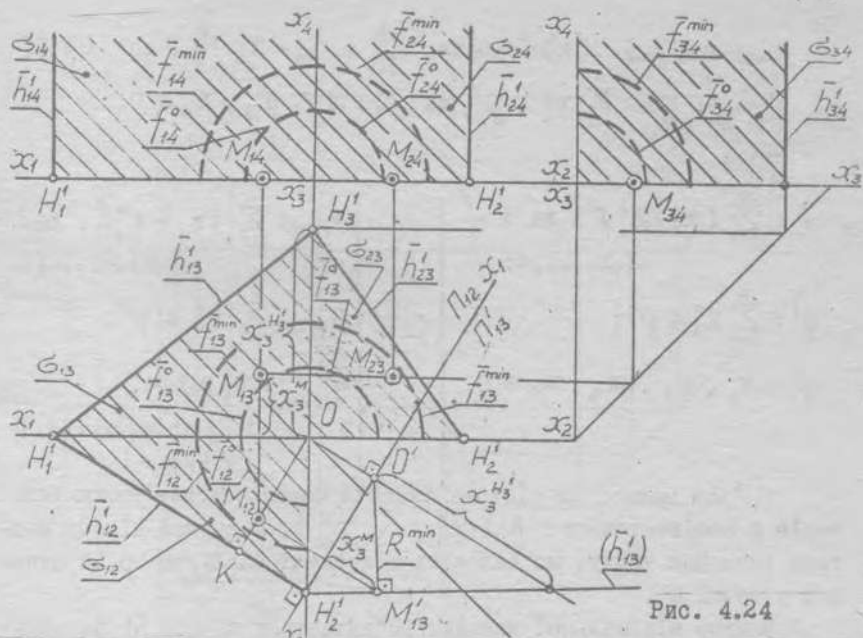


Рис. 4.24

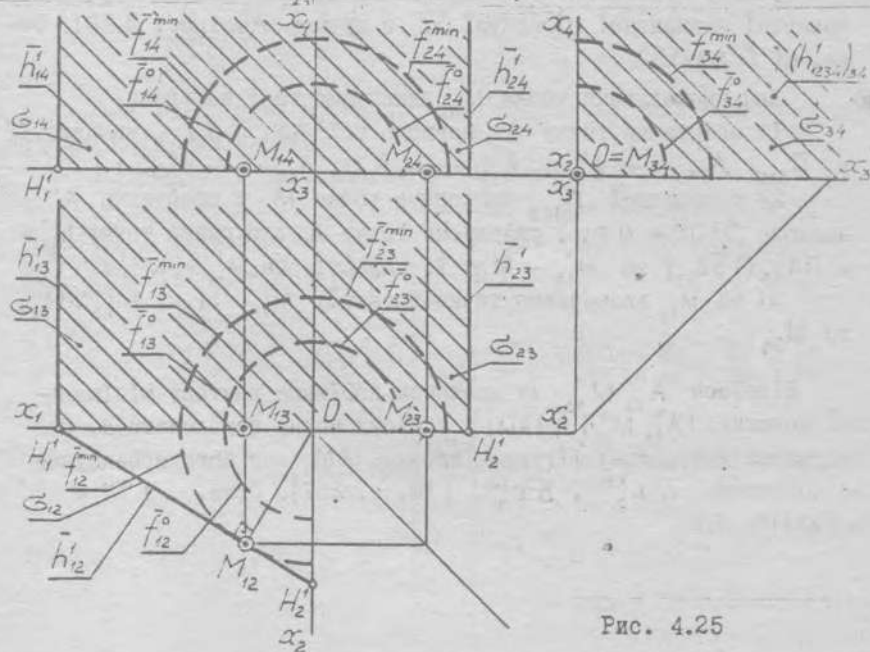


Рис. 4.25

Приклад 4.6. Мінімізувати $\sum_{i=1}^4 (x_i - x_i^A)^2$, де $i = 1, 2, \dots, 4$, якщо $\sum_{i=1}^4 x_i^2 \leq \rho^2$ та $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Отже,

$$\left. \begin{array}{l} f: \sum_{i=1}^4 (x_i - x_i^A)^2, \text{ де } i = \\ \quad \quad \quad = 1, 2, \dots, 4; \\ g^1: \sum_{i=1}^4 x_i^2 \leq \rho^2; \\ g^2: x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_{1234}: \sum_{i=1}^4 (x_i - x_i^A)^2, \text{ де } i = \\ \quad \quad \quad = 1, 2, \dots, 4; \\ g_{1234}^1: \sum_{i=1}^4 x_i^2 \leq \rho^2; \\ g_{1234}^2: 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, \\ \quad \quad \quad i, j, k = 1, \dots, 4, \\ \quad \quad \quad i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right.$$

Звідси маємо, що цільова функція моделюється в'язкою векторів з носієм-точкою $A(x_1^A, \dots, x_4^A)$, а другий кінець вектора визначає точку, що належить гіперкулі радіусом ρ з центром у точці O .

Вектор мінімальної довжини визначається точкою M перетину поверхні зазначеної гіперкулі Ω з прямою AO (рис. 4.26). Отже, $M = OA \cap \Omega$.

Для знаходження точки M виконуємо такі побудови:

- 1) обертаючи точку A навколо осі $Ox_2 = \dot{j}\dot{j}$, вводимо Π у $\Pi_{123}: A_{14} \longrightarrow A'_{14}, A_{13} \longrightarrow A'_{13}, A_{12} \longrightarrow A'_{12}$;
- 2) у просторі Π_{123} знаходимо точку M : обертаючи A' навколо $\dot{j}^2 \dot{j}^2 = Ox_3$, одержуємо точку A ; будуємо точку $M'_3 = OA''_{13} \cap \Omega_{13}$; за $M''_{13} - M'_{12}$ і, нарешті, за $M'_{12} - M_{12}$;
- 3) за M_{12} визначаємо точки-проекції $M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}$ та M_{34} .

Відрізок $A''_{13} M''_{13}$ за довжиною дорівнює вектору мінімальної довжини: $|A''_{13} M''_{13}| = |AM|$; у цьому можна переконатися, побудувавши натуральну фігуру відрізка AM за його проекціями за допомогою $\Delta x_2^{AM}, \Delta x_1^{AM}$ [18, с. 257]. Отже, $f^{min} = |AM|^2 = 576$.

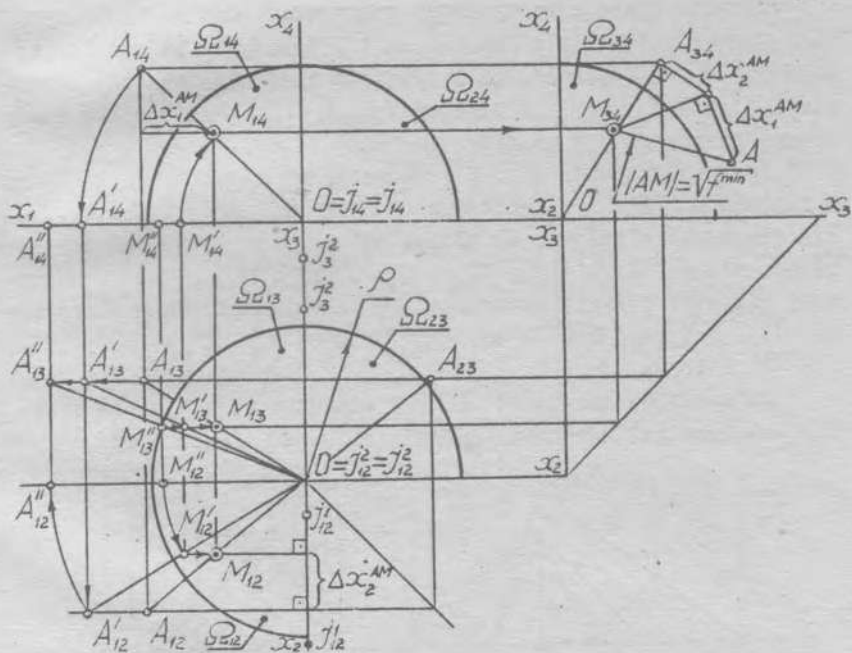


Рис. 4.26

Далі розглянемо приклад, коли цільова функція моделюється проєціюючим циліндром.

Приклад 4.7. Максимізувати $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, якщо $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 20$, $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 30$ та $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, тобто

$$f: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

$$g^1: 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 20;$$

$$g^2: \frac{3}{4}x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 30;$$

$$g^3: x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{1234}: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C; \\ g^1_{1234}: \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{20} + \frac{x_4}{20} - I \geq 0; \\ g^2_{1234}: \frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{30} + \frac{x_4}{30} - I \leq 0; \\ g^3_{1234}: 0x_i^+ x_j^+ x_k^+, \\ \quad i, j, k = I, \dots, 4, \\ \quad i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Цільова функція геометрично моделюється сім'єю співвісних проєціюючих циліндрів з параметром c . Незалежна змінна x_4 у рівнянні f необмежена, що й зумовлює проєкційність зазначеної сім'ї відносно Π_{123} , а перетин $f_{1234} \cap \Pi_{123}$ являє собою сім'ю концентричних сфер з центром O (рис. 4.27).

Умови-обмеження g^1, g^2 геометрично моделюються лінійним багатovidом (УФ) з вершинами G_i^1 та G_i^2 (де $i = 1, 2, \dots, 4$). Він обмежений відсіками як площин $\bar{Q}_{1234}^1, \bar{Q}_{1234}^2$, так і проєкційних площин $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}, \Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{34}$. Точкою максимуму цільової функції є вершина $G_4^2 = M$ (як найбільш віддалена від O). Звідси $R^{\max} = 40$, $f_{1234}^{\max} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1600$ і $f^{\max} = 1600$.

Ще простіше знаходимо f^{\max} у випадку, коли цільова функція має лише дві незалежні змінні: $x_1^2 + x_2^2$ (рис. 4.28).

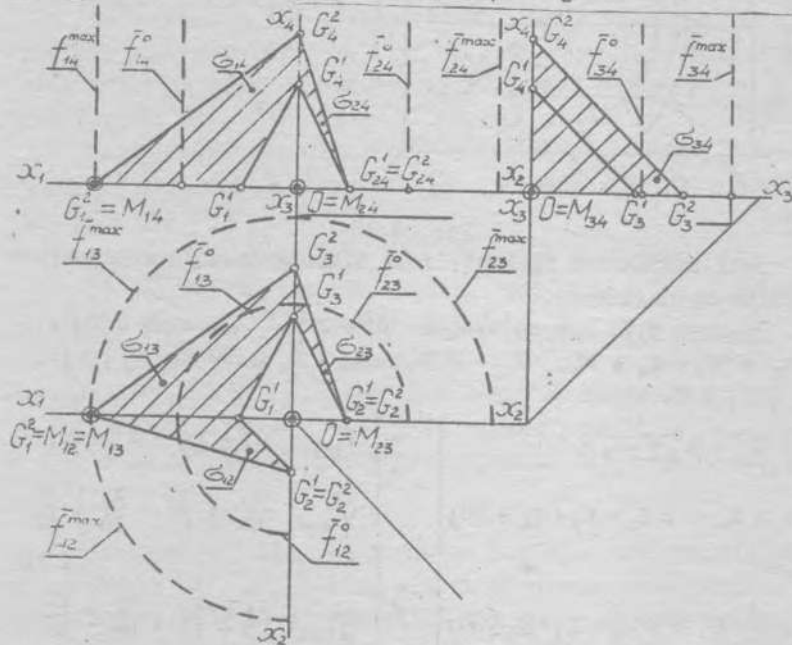


Рис. 4.27

Тут перетин $f_{1234} \cap \Pi_{12}$ являє собою сім'ю концентричних кіл з центром O .

УФ залишається незмінною.

Незмінною залишається й точка максимуму цільової функції:

$$G_1^2 = M, \text{ а тому } R^{\max} = 40, \quad f_{1234} : x_1^2 + x_2^2 = 1600 \text{ і } f^{\max} = 1600.$$

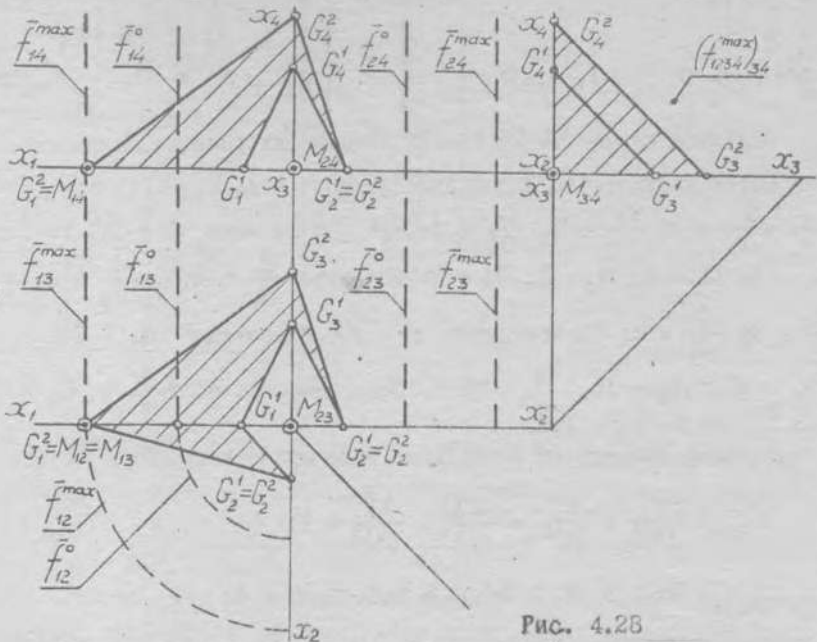


Рис. 4.28

На завершення розглянемо приклад графічного моделювання нелінійної оптимізаційної ситуації економічного характеру, де цільова функція може моделюватись гіперелліпсоїдом.

Приклад 4.8 [21, с. 12]. Мінімізувати витрати на виробництво x_i одиниць продукту A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які аналітично моделюються у вигляді $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{k_i}$, де $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ та $a_i, k_i > 0$, а продукти A_i мають бути вироблені у кількості, не меншій від b_i ($i = 1, 2, \dots, n$), та задовольняти умову на асортимент:

$$\sum_{i=1}^n d_i x_i \geq d, \text{ де } d_i, d > 0.$$

Отже, маємо:

$$\left. \begin{aligned}
 f: \sum_{i=1}^n a_i x_i^{k_i} &= K(x_1, \dots, x_n); \\
 g^1: x_i &\geq b_i; \\
 g^2: \sum_{i=1}^n d_i x_i &\geq d, \text{ де } d_i, d > 0; \\
 g^3: x_i &\geq 0, i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 f_{1\dots n}: \sum_{i=1}^n a_i x_i^{k_i} &= C; \\
 g_{1\dots n}^1: x_i &\geq b_i; \\
 g_{1\dots n}^2: \sum_{i=1}^n d_i x_i &\geq d, \\
 &\text{де } d_i, d > 0; \\
 g_{1\dots n}^3: x_i &\geq 0, \\
 &i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

Оскільки на a_i та k_i ніяких додаткових умов не накладено, то з метою конкретизації домовимося, що $n = 4$, $k_1 = \dots = k_4 = 2$, $\frac{C}{a_1} = 4$, $\frac{C}{a_2} = 3$, $\frac{C}{a_3} = 4$, $\frac{C}{a_4} = 3$ і, якщо $C = 12$, то $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$. Поклавши $\frac{d}{d_1} = 4,5$, $\frac{d}{d_2} = 3$, $\frac{d}{d_3} = 4$, $\frac{d}{d_4} = 2$, та прийнявши $d = 63$, одержуємо: $d_1 = 14$, $d_2 = 21$, $d_3 = 18$, $d_4 = 31,5$. Покладемо ще, що $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2,5$, $b_4 = 1,5$.

У цьому випадку (4.6) набуває вигляду:

$$f_{1234}: \frac{x_1^2}{(4)^2} + \frac{x_2^2}{(3)^2} + \frac{x_3^2}{(4)^2} + \frac{x_4^2}{(3)^2} = 1;$$

$$g_{1234}^1: x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2,5, x_4 \geq 1,5;$$

$$g_{1234}^2: \frac{x_1}{4,5} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} + \frac{x_4}{2} \geq 1;$$

$$g_{1234}^3: 0 \leq x_i \leq x_j \leq x_k, \quad i, j, k = 1, \dots, 4, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

З рис. 4.29 очевидно, що мінімальним із сім'ї гіпереліпсоїдів є той, що визначається точкою $M = M_{34}(0; 0; 2,5; 1,5)$. Його осі знаходимо, використовуючи центральну подібність (з центром O) обрисів еліпсоїдів на двовимірних проєкційних полях $(4, 4', 5, 5', \bar{5}, \bar{5}', 4'', 4''')$. Звідси $M_{34} 2' \parallel I_2$ та $M_{34} 3' \parallel I_3$, а потім за точками $2'$ та $3'$, одержуємо відповідно точки на інших проєкційних двовимірних полях.

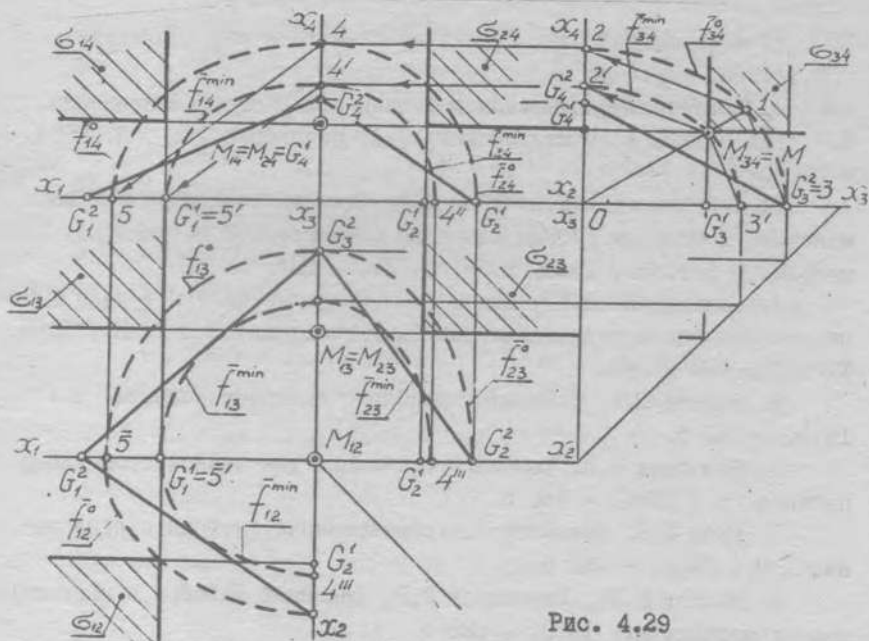


Рис. 4.29

За координатами точки M графічно знаходимо аналітичну модель, що відповідає мініимальному значенню цільової функції:

$$f_{1234}^{\min} = \frac{x_1^2}{(3)^2} + \frac{x_2^2}{(2,2)^2} + \frac{x_3^2}{(3)^2} + \frac{x_4^2}{(2,2)^2} = 1 \text{ та } f^{\min} \approx 1,25.$$

Розгляд цих нечисленних прикладів мав на меті продемонструвати, що існують випадки, коли розв'язання задач оптимізації проєкційними графічними методами доцільне, а особливо за умови застосування комп'ютерної графіки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., 1968. - 912 с.
2. Интерактивные методы в теории игр и программировании. В.З. Беленький, В.А. Волконский, С.А. Иванков и др. М., 1974. - 240 с.
3. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Геометрические задачи на максимум и минимум // Энциклопедия элементарной математики. Геометрия: В 5 т. М., 1966. Т. 5. С. 270 - 347.
4. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Выпуклые фигуры и тела // Энциклопедия элементарной математики. Геометрия: В 5 т. М., 1966. Т. 5. С. 182 - 267.
5. Волков В.А. Элементы линейного программирования. М., 1975. - 143 с.
6. Воробьев Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Л., 1974. - 160 с.
7. Гасс С.И. Линейное программирование (методы и приложения). М., 1961. - 452 с.
8. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., 1970. - 528 с.
9. Канторович Л.В., Горстко А.В. Математическое оптимальное программирование в экономике. М., 1968. - 96 с.
10. Лейбин А.С., Гордецкий Д.З. Популярное введение в многомерную геометрию. Харьков, 1964. - 192 с.
11. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М., 1969. - 698 с.
12. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., 1966. - 648 с.
13. Розенфельд Б.А., Яглом И.М. Многомерные пространства // Энциклопедия элементарной математики. Геометрия: В 5 т. М., 1966. Т. 5. С. 349 - 391.
14. Филиппов П.В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. Л., 1979. - 280 с.
15. Филиппов П.В., Королев Н.Т., Чистая И.В. Начертательная геометрия многомерного пространства в линейном программировании. Л., 1986. - 136 с.
16. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975. - 534 с.

17. Чернецкий Н.М. Графические модели объектов четырехмерного пространства на полнопольном комплексном чертеже. Харьков, 1986. - 101 с.
18. Чернецкий М.М. Лекції з нарисної геометрії. Київ, 1995. - 295.
19. Чернецкий Н.М. Полнопольный комплекс проекций многомерного пространства: В 2 ч.-Харьков, 1999.
20. Курс начертательной геометрии / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др. М., 1956. - 435 с.
21. Введение в нелинейное программирование / Под ред. К.Х. Эльстера. М., 1985. - 264 с.
22. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М., 1969. - 332 с.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА.....	3
1. Загальне формулювання задачі математичного програмування.....	4
2. Застосування графічної моделі двовимірного простору.....	5
3. Застосування графічної моделі тривимірного простору.....	21
3.1. Застосування проєкційних графічних моделей до розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування.....	21
3.2. Застосування проєкційних графічних моделей до розв'язання оптимізаційних задач нелінійного програмування.....	44
4. Застосування проєкційної графічної моделі багатовимірного простору.....	59
4.1. Графічне моделювання задач лінійного програмування.....	60
4.2. Графічне моделювання задач нелінійного програмування.....	81
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	98

су

Микола Михайлович Чернецький

ПРОЕКЦІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Редактори: С. П. Гевло,
Л. О. Кузьменко
Коректор Т. В. Савченко

Зв. план, 2000

Підписано до друку 02.10.2000

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Папір офс. № 2. Офс. друк.

Умовн.-друк. арк. 5,6. Облік.-вид. арк. 6,31. Т. 100 **крим.**

Замовлення 144. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

Ротапринт друкарні «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
