МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О.В. Головченко, Г.І. Кошовий, Л.С. Найда



# Аналітична геометрія

**Навчальний посібник**



Харків «ХАІ» 2000

УДК 517

Аналітична геометрія / О.В. Головченко, Г.І. Кошовий, Л.С. Найда. – Навч. посібник.- Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2000.- 41 с.

Розглянуто основні теоретичні питання з курсу аналітичної геометрії як на площині, так і у просторі, передбачені програмою курсу «Вища математика» для технічних вузів з поширеною математичною підготовкою. Перший розділ присвячений аналітичній геометрії на площині, другий - просторовій аналітичній геометрії, включаючи поверхні другого порядку. У третьому розділі пропонується 6 практичних занять, які охоплюють значну кількість прикладів, як розв'язаних, так і для самостійного розв'язання з наведеною відповіддю.

Для студентів І курсу вищих технічних навчальних закладів. Може бути також корисним для аспірантів.



Іл. 27. Бібліогр.: 7 назв

Рецензенти: канд. фіз. – мат. наук, доц. В. Т. Лисиця,
канд. фіз. – мат. наук, доц. В. О. Міщенко

## Зміст

# 1. Аналітична геометрія на площині

## 1.1. Вступ до аналітичної геометрії

Аналітична геометрія - частина математики, в якій досліджуються геометричні образи засобами алгебри на основі методу координат.

Аналітична геометрія - один з методів геометричного дослідження, що грунтується на використанні алгебри і аналізу нескінченно малих величин.

Засновником аналітичної геометрії вважається французький вчений Рене Декарт (1596-1650), хоч деякі її елементи зустрічалися раніше. Так, єгиптяни, виконуючи будівельні роботи, користувалися паралельними відрізками (координатами), грецькі астрономи Гіппарх (II ст. до н.е.) і Птолемей (II ст. до н.е.) застосовували сферичні координати (широту і довготу) для визначення положення різних точок земної поверхні.

До створення аналітичної геометрії на площині причетний також сучасник Декарта, теж французький вчений П. Ферма. Ці вчені, працюючи незалежно один від одного, оформили і певною мірою завершили в XVII ст. аналітичну геометрію на площині.

В аналітичній геометрії на площині розглядаються дві основні задачі:

1) як, знаючи геометричні властивості лінії (як множини точок), знайти її рівняння, тобто рівняння, яке зв'язує координати її точок;

2) як, знаючи рівняння лінії, яке зв'язує координати її точок x і y, визначити геометричні властивості цієї лінії.

Основним поняттям аналітичної геометрії є поняття системи координат, а основним методом дослідження геометричних об'єктів - метод координат.

Ідея координат на площині полягає в тому, що положення будь-якої точки на площині визначається перетином двох ліній, кожна з яких належить сім'ї координатних ліній, що утворюють координатну сітку, таку, що через конкретну точку площини проходить одна і тільки одна координатна лінія кожної з двох сімей. Таким чином установлюється взаємно однозначна відповідність між точками евклідової площини і впорядкованими парами чисел $x$ та $y$ -координатами точки на площині.

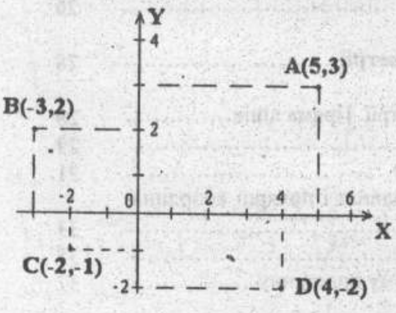


Рис. 1.1

Одна з найпростіших систем координат називається декартовою. Вона складається з двох взаємно перпендикулярних числових прямих зі спільним початком відліку. Прямі називають осями координат, а початок відліку - центром системи координат. Одиниця масштабу однакова для обох осей.

Декартові координати деяких точок показано на *рис.1.1.*

Координатні лінії - це прямі, паралельні осям.

Горизонтальну вісь *Ox* називають віссю абсцис, а вертикальну вісь *Oy* - віссю ординат. Вони ділять площину на чверті (квадранти): точка *A(5,3)* належить квадранту *1*, *B(-3,2) - 2*, *C(-2,-1) - 3* і *D(4,-2) - 4*.

## 1.2. Найпростіші задачі на декартові координати

**1.Відстань між двома точками.** Є дві точки $M_1(x_1, y_1)$ й $M_2(x_2, y_2)$; потрібно знайти відстань $d = M_1 M_2$ між ними.

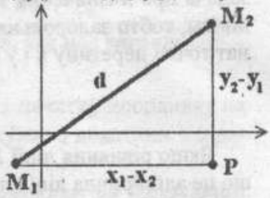


Рис. 1.2

За теоремою Піфагора для $\Delta M_1PM_2$ маємо

$$M_1P^2 + M_2P^2 = M_1M_2^{\,2},$$

або $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Таким чином, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

***Приклад 1.1.*** Знайти відстань між точками *A* і C на *рис.1.1*.

***Розв'язання:*** $d = AC = \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{65}$.

**2. Поділ відрізка в заданому відношенні.** Маємо відрізок $M_1M_2$ (*рис.1.3*); потрібно знайти точку M(x,y), що ділить його в заданому відношенні $M_1M{:}M_2M=\lambda$.

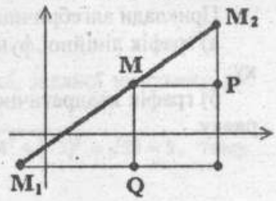


Рис. 1.3

Розвязок випливає з подібності трикутників $M_1QM$ і $MPM_2$: $\dfrac{M_1Q}{MP} = \dfrac{MQ}{M_2P} = \lambda$,

або $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$, $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $x(1+\lambda) = x_2 + x_1$, $x = \dfrac{x_2 + x_1}{1+\lambda}$

(вираз для *y* доводиться аналогічно). Таким чином,

$$x = \frac{x_2 + x_1}{1+\lambda},\ y = \frac{y_2 + y_1}{1+\lambda}.$$

Зокрема, при $\lambda=1$ маємо поділ відрізка на дві рівні частини, і точка цього поділу визначається координатами $x = \dfrac{x_2 + x_1}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_2 + y_1}{1+\lambda}$.

***Приклад 1.2.*** У трикутнику з вершинами *O(0,0)*, *A(8,0)* і *B(0,6)* визначити довжину медіани *OC*.

***Розв'язання.*** Знайдемо координати *C*, що поділяє відрізок *AB* на рівні частини:

$$x = \frac{8+0}{2} = 4,\ y = \frac{0+6}{2} = 3.$$

Далі за формулою відстані

$$OC = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

***Відповідь:*** *OC =5.*

### 1.3. Рівняння лінії на площині

Рівняння $F(x,y)=0$ визначає на площині із системою координат $xOy$ деяку лінію, яка являє собою сукупність усіх точок, координати яких задовольняють це рівняння; при цьому співвідношення $F(x,y)=0$ називають рівнянням лінії.

Навпаки, коли задано лінію на площині $xOy$, то, записуючи аналітично геометричні властивості, характерні для цієї лінії, одержуємо її рівняння.

Якщо задано дві лінії рівняннями $F_1(x,y)=0$, $F_2(x,y)=0$, то може виникнути задача про визначення точки їх перетину. Ця точка повинна належати обом лініям, тобто задовольняти обидва рівняння. Отже, для знаходження координат точки перетину x і y потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Якщо рівняння лінії $P(x,y)=0$, де $P(x,y)$ - багаточлен степеня $n$, то кажуть, що це алгебрична лінія порядку $n$.

Неалгебричні лінії називають трансцендентними.

Приклади алгебричних ліній, які зустрічались в елементарній математиці:

а) графік лінійної функції - пряма лінія - алгебрична лінія першого порядку;

б) графік квадратичної функції - парабола - алгебрична лінія другого порядку.

### 1.4. Пряма лінія

Це алгебрична лінія першого порядку і, як було зазначено у попередньому підрозділі, для одержання рівняння прямої лінії потрібно прирівняти багаточлен першого степеня до нуля:

$$Ax + By + C = 0.$$

Це і є загальне рівняння прямої. Тут може бути два випадки. Коли $B \neq O$, то, виконуючи ділення на $B$, рівняння можна подати у вигляді

$$y = \kappa x + b.$$

Воно відоме з елементарного курсу математики, а тут його будемо називати рівнянням з кутовим коефіцієнтом, бо $k = tg\alpha$, де $\alpha$ - кут нахилу прямої до осі абсцис; $b$ - початкова ордината.

Коли $B=0$, а $A \neq O$, то, виконуючи ділення на $A$, одержуємо рівняння $x = a$, яке визначає пряму, паралельну осі $Oy$, що проходить через точку $a$ на осі $Ox$. Зазначимо, що для таких прямих кутовий коефіцієнт $k = tg\frac{\pi}{2} = \pm\infty$, і подати його у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом неможливо.

Якщо пряма $y = kx + b$ проходить через точку $(x_0, y_0)$, то $y_0 = kx_0 + b$, або, виключаючи параметр $b$, дістанемо рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Для довільного $k$ цим рівнянням визначається в'язка прямих, що проходить через задану точку $(x_0, y_0)$.

Слід розглянути також випадок, коли жоден з коефіцієнтів $A$, $B$ і $C$ не дорівнює нулеві, тоді загальне рівняння можна подати у вигляді $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Це рівняння прямої у відрізках, що відтинаються від осей даною прямою. Тут $a=-C/_{A}$, $b=-C/_{B}$. Дійсно, коли $x = 0$, то маємо $By + C = 0$, або $y=-C/_{B}=b$; коли ж y = 0 (вісь абсцис), то $x=-C/_{A}=a$.

Використовують також нормальне рівняння прямої, яке має вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

де $p$ визначає довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму $(p\geq 0)$; $\alpha$ - кут, що утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом осі $Ox$, $\beta$ - кут між перпендикуляром і віссю $Oy$.

Загальне рівняння зводиться до нормального множенням на нормуючий множник:

$$a=\pm\ 1/\sqrt{A^2+B^2}.$$

***Приклад 1.3.*** Записати нормальне рівняння прямої, заданої загальним рівнянням: $4x-3y+10=0$.

***Розв'язання.*** Нормуючий множник $-\frac{1}{5}$, бо $\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$, тому одержуємо $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0$.

***Відповідь:*** $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0$.

## 1.5. Найпростіші задачі на пряму

У цьому підрозділі розглянемо декілька найпростіших задач:

**1.** Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки $(x_1,y_1)$ і $(x_2,y_2)$.

Із в'язки прямих $y - y_1 = k(x - x_1)$, що проходять через точку $(x_1,y_1)$, потрібно взяти ту, що проходить також через точку $(x_2,y_2)$:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Визначимо $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; підставимо його у рівняння в'язки і запишемо у симетричному вигляді:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

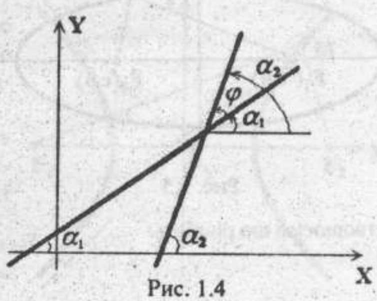


Рис. 1.4

Зазначимо, що $(x,y)$ - довільна точка, яка знаходиться на прямій, що проходить через точки $(x_1,y_1)$ і $(x_2,y_2)$.

**2.** **Знайти кут між прямими $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$.**

Розв'язок ілюструється на *рис. 1.4*:

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,\ tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} \Rightarrow tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}.$$

Зокрема, з цієї формули, що визначає кут між прямими, випливають дві умови:

1) паралельності прямих $k_2 = k_1$;

2) перпендикулярності прямих $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

*3.* Знайти відстань $D$ від точки $(x_0,y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Використовуючи нормуючий множник $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, який береться зі знаком, протилежним знаку вільного члена $C$, прийдемо до нормального рівняння прямої $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$.

Тоді $d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p|$, або $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

### 1.6. Рівняння еліпса

***Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох точок є величина стала.*** Цю величину для спрощення рівняння, яке дістанемо в результаті викладок, позначимо через $2a$. Дві дані точки називають фокусами еліпса. Відстань між ними (з тих самих міркувань) позначимо через $2c$.

Візьмемо за вісь абсцис пряму, що проходить через фокуси, а за початок координат - середину відрізка між фокусами. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$ (*рис. 1.5*).

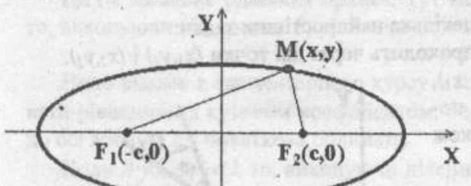


Рис. 1.5

Якщо $M(x,y)$ - довільна точка еліпса, то за означенням

$$F_1M + F_2M = 2a,$$ або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

перетворюємо цю рівність:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc,$$

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c,$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

З трикутника $F_1MF_2$ очевидно, що $2a>2c$, тобто $a^2-c^2>0$.

Позначимо $a^2-c^2=b^2$.

Тоді одержимо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - канонічне рівняння еліпса.

З цього рівняння видно, що осі координат є осями симетрії еліпса тому, що коли точка $(p,q)$ задовольняє рівняння, то і точки $(-p,q)$, $(p,-q)$, $(-p,-q)$ - теж.

Якщо $y=0$, то $x=\pm a$, якщо $x=0$, то $y=\pm b$. Точки $(\pm a,0)$ і $(0,\pm b)$ називаються вершинами еліпса.

Відношення $\frac{c}{a}=\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ називається ексцентриситетом еліпса: $\varepsilon\in(0,1)$, $\varepsilon$ характеризує форму еліпса.

Зазначимо, що є й інше *означення еліпса як геометричного місця точок, відношення відстаней яких до даної точки (фокуса) та даної прямої (директриси) є величина стала*, менше одиниці та дорівнює ексцентриситету $\varepsilon$. Для канонічного рівняння еліпса у випадку, коли $a>b$, рівняння директриси, що відповідає фокусу $F_2(c,0)$, буде $x=\frac{a}{\varepsilon}$, або $x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

## 1.7. Гіпербола

Крива зустрічалася в курсі елементарної математики, коли розглядався графік оберненої пропорційності $y=1/x$.

Але у цьому підрозділі буде дано означення гіперболи як геометричного місця точок на площині та одержано канонічне рівняння.

***Гіперболою називають сукупність усіх точок площини, різниця відстаней яких від даних точок цієї площини (фокусів) є величина стала.***

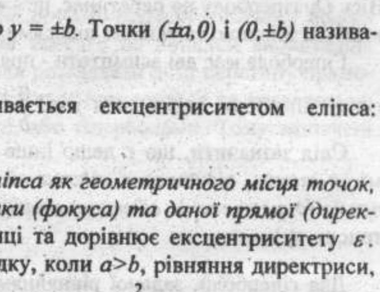

Рис. 1.6

Візьмемо систему координат так, як це було зроблено у попередньому підрозділі. Тоді $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ і $F_1M$ -

$F_2M = \pm 2a$, де $M(x,y)$ - довільна точка гіперболи *(рис.1.6)*:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2.$$

Виконуючи перетворення цієї рівності подібно до попереднього підрозділу, дістанемо

$$\left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = \left(a^2-c^2\right)a^2.$$

Але тепер з $\Delta F_1MF_2$ видно, що $2a<2c$, тому $a^2 - c^2 = -b^2$. Таким чином, одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це і є канонічне рівняння гіперболи. З нього випливає, що гіпербола має дві осі симетрії *(головні осі)*, а також центр симетрії *(центр гіперболи)*.

Якщо $y=0$, $x=\pm a$; якщо $x=0$, то $y=\pm ib$. Це означає, що вісь $Ox$ перетинає гіперболу в двох точках (вершинах гіперболи) і вісь - $Ox$ - дійсна вісь. Вісь $Oy$ гіперболу не перетинає, це - *«уявна вісь»*. Відповідно сталі $a$ і $b$ називаються дійсною та уявною півосями гіперболи.

Гіпербола має дві асимптоти - прямі лінії, що характеризують нескінченні гілки гиперболи, їх рівняння $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Слід зазначити, що є дещо інше ***означення гіперболи як геометричного місця точок, відношення відстаней яких до даної точки (фокуса) і даної прямої(директриси)є величина стала, більше одиниці*** (вона дорівнює ексцентриситету).

Для гіперболи, заданої рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, рівняння директриси, що відповідає фокусу $F_2(c,0)$, буде таким: $x = -\frac{a}{c}$, або $x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

## 1.8. Парабола

Зазначимо, що параболою в елементарній математиці називають графік квадратної функції $y = ax^2 + bx + c$. Його побудову успішно виконує кожен учень 10 класу, але зараз буде дано більш строге ***означення параболи як множини точок площини, які мають однакову відстань від даної точки (фокуса) та даної прямої (директриси).*** За цим означенням виведемо канонічне рівняння.

Візьмемо вісь абцис - пряму, що проходить через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь ординат - через середину відстані від фокуса до директриси.

Тоді фокус $F(\frac{p}{2},0)$, а директриса $x=-\frac{p}{2}$ *(рис.1.7)*; $M(x,y)$ - довільна точка параболи. При цьому

$$FM = x + \frac{p}{2}, \quad \text{або} \quad \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

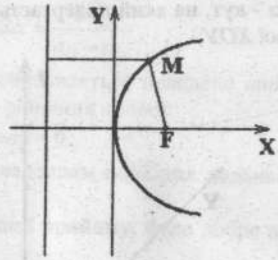

Рис. 1.7

Підносимо цю рівність до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

скорочуємо подібні і в результаті маємо канонічне рівняння параболи $y^2=2px$.

Парабола має вісь симетрії - вісь $Ox$, її вершина знаходиться на початку координат.

Зазначимо, що між параболою, гіперболою та еліпсом існує спорідненість. Вона пояснюється тим, що всі ці криві - *алгебричні лінії другого порядку*, причому ніяких інших кривих другого порядку, якщо не зважати на випадки виродження (особливі випадки), нема. Окрім того, коли розглядати лінії перетину прямого кругового конуса площиною, яка обертається навколо осі, то виявляється, що вони є або еліпсами, або параболами, або гіперболами. Тому зазначені криві називають *конічними перетинами*.

## 1.9. Перетворення координат

Розглянемо перехід від однієї декартової системи до іншої без зміни одиниці масштабу. Нехай на площині окрім старої системи координат $xOy$ дано нову систему $XOY$; потрібно встановити зв'язок між ними. Зупинимось на трьох випадках:

1. Паралельне перенесення: осі нової системи утворюються в результаті паралельного перенесення старих, наприклад, у точку з координатами *(a, b)*.

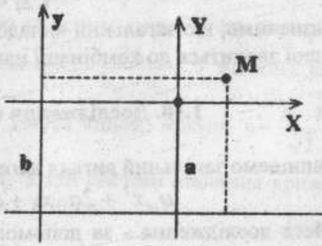

Рис. 1.8

Тоді *(рис. 1.8)*

$$x = a + X,$$
$$y = b + Y.$$

2. Дзеркальне відображення, в результаті якого нові координати осі утворюються за рахунок дзеркального відображення старих, наприклад, відносно осі $Oy$; тоді з *рис. 1.9* одержимо

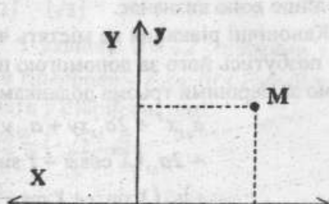

Рис. 1.9

$$x = -X,\ y = Y.$$

3. Поворот навколо початку координат *(рис. 1.10)*, тоді

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

де $\alpha$ - кут, на який повертається стара система координат $xOy$ для утворення нової $XOY$.

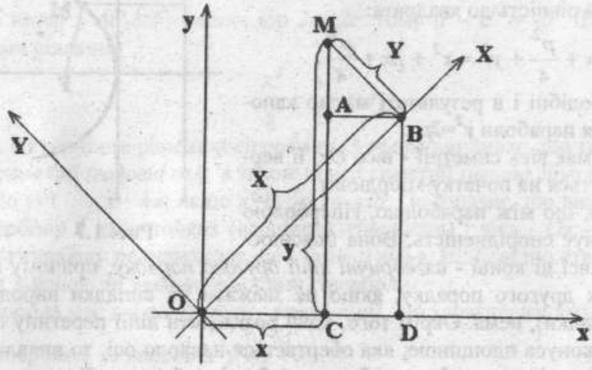


**Рис. 1.10**

Ці формули забезпечуються рівностями

$$OC = OD - AB,$$
$$CM = DB + AM.$$

Зазначимо, що загальний випадок переходу від однієї декартової системи до іншої зводиться до комбінації наведених вище трьох випадків.

## 1.10. Дослідження кривих другого порядку

Запишемо загальний вигляд алгебричної лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0.$$

Мета дослідження - за допомогою перетворення декартових координат звести дане рівняння до найпростішого вигляду і, таким чином, з'ясувати, яку лінію воно визначає.

Канонічні рівняння не містять члена з добутком координат, тому спробуємо позбутись його за допомогою повороту системи на кут $\alpha$. Спочатку слідкуємо за першими трьома доданками:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 +$$
$$+ 2a_{12}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)*(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) +$$
$$+ a_{22}(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2,$$ тут

$$2A_{12} = 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2a_{12}\cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha.$$

Якщо хочемо мати $A_{12} = 0$, то кут повороту $\alpha$ повинен задовольняти рівняння
$$2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha, \text{ або } tg 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Отже, коли $\alpha$ - кут повороту такий, що задовольняється наведене вище рівняння, то у нових координатах матимемо таке рівняння кривої:
$$A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_1X + A_2Y + a_0 = 0,$$
тут коефіцієнти $A_{11}$, $A_{22}$, $A_1$ та $A_2$ визначаються зведенням подібних доданків при розкритті дужок.

Приклад, який слід розглянути для демонстрації прийому, буде добре відома лінія, що задається рівнянням $xy = 1$.

***Приклад 1.4.*** Дослідити алгебричну криву другого порядку, яка має рівняння
$$x\cdot y = 1.$$

***Розв'язання.*** Коли її подати у вигляді $y = \frac{1}{x}$, то дана крива є графік оберненої пропорційності, відомої з курсу алебри за 9 клас. Проведемо дослідження, користуючись загальною схемою дослідження алгебричних кривих другого порядку:
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0.$$

Щоб позбутися другого доданка, потрібно здійснити поворот системи координат на кут $\alpha$, що визначається формулою $tg 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$. У нашому випадку $a_{11} = 0$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 0$, тобто $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, маємо: $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$; тут $XOY$ - нова система координат. У цій системі рівняння кривої набере вигляду
$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = 1, \text{ або } \frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Це рівняння гіперболи з дійсною $a = \sqrt{2}$ і уявною $b = \sqrt{2}$ півосями і $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ *(рис. 1.11)*. Координати фокусів гіперболи - $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$ у новій системі координат. Знайдемо їх координати у старій системі:
$$F_1:\ x = -\frac{c}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},\quad y = -\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, -\sqrt{2});$$
$$F_2:\ x = \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\quad y = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Рівняння асимптот у новій системі $Y = \pm X$, а у старій системі

$$\frac{y+x}{\sqrt{2}} = \pm\frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 0 \text{ і } y = 0.$$

На *рис. 1.11* $xOy$ - стара система координат, $xy = 1$; $XOY$ - нова система координат, $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$.

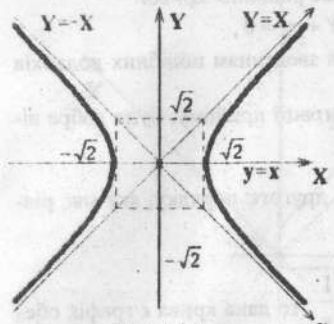


Рис. 1.11

***Приклад 1.5.*** Дослідити криву, що має рівняння $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

***Розв'язання.*** Маємо $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 1$, тому $tg2\alpha = \frac{-2}{1-1} = -\infty$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, таким чином, $x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}$, а рівняння набуває вигляду $2X^2 - 8\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}X + 25 = 0$, або

$$\left(X - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot 2\sqrt{2}\left(X - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Це є рівняння параболи з вершиною у точці з координатами $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ і $p = 2\sqrt{2}$.

У старій системі координат - вершина *(2,1)*. Побудову виконати самостійно.

## 1.11. Полярна система координат

Окрім декартової системи координат на площині використовується ще й так звана полярна система. Для її визначення вибирають точку на площині як початок, яку називають полюсом, а також промінь, який виходить з цієї точки,- полярну вісь. Тоді довільна точка $M$ однозначно фіксується двома величинами: $r$ - відстанню її від полюса і кутом $\varphi$, який утворюється відрізком $OM$ з полярною віссю *(рис. 1.12)*.

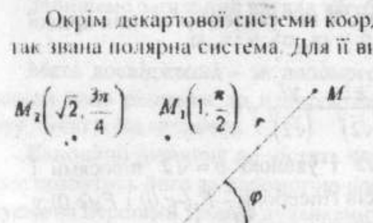


Рис. 1.12

Полярний кут $\varphi$ вимірюється в радіанах і вважається додатним, коли його відкладають у напрямі проти годинникової стрілки.

Полярний радіус $r$ - величина невід'ємна: $r \geq 0$.

Деякі автори користуються узагальненою полярною системою, в якій полярний радіус може бути від'ємним. У цьому випадку $(-r, \varphi)$ має координати $(r, \varphi+\pi)$.

Якщо полярну і декартову систему сумістити так, щоб полюс збігався з початком декартової системи, а додатна піввісь $Ox$ мала напрям полярної осі, то досить просто одержати такий зв'язок між координатами цих систем:

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

***Приклад 1.6.*** Розглянемо рівняння кола $x^2 + y^2 = 2y$. У полярній системі воно буде таким: $r^2 = 2r\sin\varphi$, або, скоротивши його на $r$, маємо $r = 2\sin\varphi$.

Коло можна побудувати безпосередньо виходячи з цього рівняння. Беремо значення $\varphi$, для яких відомі $\sin\varphi$ *(рис. 1.13)*:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \; r = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \; r = 2.$$

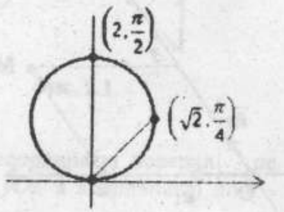


**Рис. 1.13**

## 1.12. Загальні системи координат

***Координати на прямій.*** Числова вісь - пряма, на якій вказано точку $O$ (початок осі), вектор $\overline{O1}$, що задає масштаб (довжина вектора $\overline{O1}$ дорівнює одиниці) і додатний напрям осі (*рис. 1.14*).


Рис. 1.14

На числовій осі кожній точці $M$ відповідає число $x$ - відстань точки $M$ до початку осі зі знаком «+», якщо точка розташована праворуч, і «-», якщо вона ліворуч від початку осі: $\overline{OM} = xO1$. Число $x$ називають координатою точки $M$ на числовій осі і записують $M(x)$.

***Системи координат на площині*** - це правило, яке встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини і впорядкованими парами чисел, які називаються координатами заданої точки.

Вибрана точка $O$ на площині та впорядкована пара неколінеарних векторів $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ утворюють репер $<O, \overline{e_1}, \overline{e_2}>$, який визначає систему координат таким чином. Кожна точка $M$ площини визначає вектор $\overline{OM}$. Якщо його розкласти за векторами $\overline{e_1}$ та $\overline{e_2}$ у лінійну комбінацію $\overline{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$, то точці $M$ відповідає впорядкована пара чисел $(x,y)$.

Таким чином утворюється так званa **афінна система координат** на площині (*рис. 1.15*).

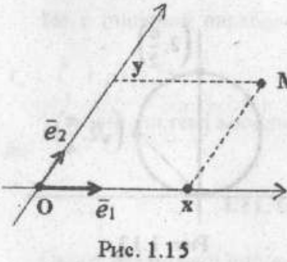

Рис. 1.15

Першу координату точки в цій системі називають **абсцисою**, а другу - **ординатою** точки.

Вісь, що визначається точкою $O$ і вектором $\overline{e_1}$, називають віссю **абсцис** $Ox$; вісь, що задана точкою $O$ і вектором $\overline{e_2}$, - віссю **ординат** $Oy$.

Якщо кут між осями координат прямий, то система координат називається прямокутною декартовою системою координат.

У просторі вказано точку $O$ та впорядковану трійку некомпланарних векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, що утворюють репер $<O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}>$, який визначає ***афінну систему координат у просторі***: для довільної точки $M$ $\overline{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}$ визначає координати точки $M(x,y,z)$.

Вісь $Oz$, що задається точкою $O$ та вектором $\overline{e_3}$, носить назву осі **аплікат**.

# 2. Аналітична геометрія у просторі

## 2.1. Системи координат у просторі

Творець аналітичної геометрії Рене Декарт не зміг цілком здійснити "арифметизацію" геометрії - поширити метод координат на простір, а обмежився лише вивченням плоских кривих.

У кінці XVII і протягом XVIII ст. координатний метод був перенесений на простір в основному працями А. Клеро й Л. Ейлера.

Окрім декартової системи у просторі широко застосовуються циліндрична та сферична системи координат.

*Циліндричні координати (r, φ, z),* зображено на *рис. 2.1,* це полярні координати на площині, до яких додано координату *z*.

Зрозуміло, що для опису всіх точок у просторі достатньо значень

$$0 \le r \le \infty, -\pi \le \varphi \le \pi, -\infty \le z \le \infty .$$

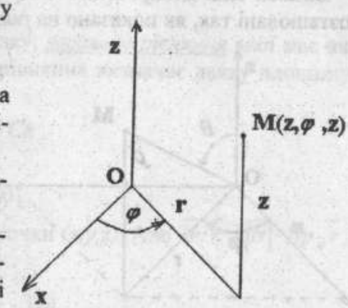

Рис. 2.1

Координатні поверхні, тобто поверхні, на яких одна з координат - стала, а решта змінюється, утворюють три сім'ї:

$r$ = const (циліндри), $\varphi$ = const (півплощини), $z$ = const (площини).

Координатні лінії, на яких дві координати - сталі, а третя змінюється, також утворюють три сім'ї, які виникають в результаті перетину координатних поверхонь. Це будуть: кола ($r$=const і $z$ = const); прямі лінії ($\varphi$=const, $z$ = const); промені ($\varphi$ = const, $z$ =const).

Слід зазначити, що для декартової системи координатні поверхні - це площини, паралельні одній з площин *xOy, xOz* і *yOz,* а координатні лінії - прямі, паралельні одній з координатних осей.

Зв'язок між декартовими координатами $(x,y,z)$ і циліндричними $(r,\varphi,z)$, коли ці системи розташовані так, як показано на *рис. 2.2,* встановлюються формулами

$$x = r\cos\varphi , \ y = r\sin\varphi .$$

Рис. 2.2

Циліндричні координати, зокрема, використовуються при розгляді тіл обертання та конічних поверхонь.

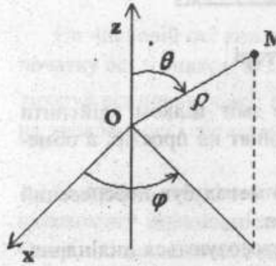


Рис. 2.3

*Сферичні координати* $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$, показані на *рис. 2.3*, подібні до географічних з тією різницею, що "широта" $\theta$ тут відраховується не від екватора, а від "північного полюса" і $\rho$ не буде сталим.

Проміжки зміни координат, достатні для опису всіх точок простору, такі: $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$.

Координатні поверхні: $\rho$ = const (сфери), $\theta$ = = const (конуси), $\varphi$ = const (півплощини).

Координатні лінії: кола ($\rho$ = const і $\theta$ = = const), півкола ($\rho$ = const, $\varphi$=const), промені ($\theta$ = const ,$\varphi$ = const).

Зв'язок між декартовими і сферичними координатами, коли ці системи розташовані так, як показано на *рис. 2.4,* забезпечується формулами

$$x = r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

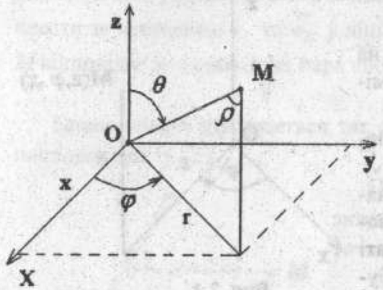


Рис. 2.4

Сферичні координати застосовуються тоді, коли розглядаються геометричні об'єкти, утворені чи обмежені сферами, конусами тощо.

Декартові, циліндричні та сферичні координати - це окремі випадки ортогональних координат, для яких характерно те, що кути між координатними лініями в точках їх перетину є прямими. Інколи використовуються і неортогональні координати, наприклад загальні афінні (див. підрозд. 1.12).

## 2.2. Рівняння поверхні у просторі

Загальний вигляд рівняння поверхні у просторі, в якому задано деяку декартову систему координат *x, y, z,* буде таким: $F(x, y, z) = 0$.

Зо̀крема, рівняння сфери - геометричного місця точок, розташованих на відстані $R$ від заданої точки (a, *b, c),* має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2 = 0. \tag{2.1}$$

Це рівняння можна одержати таким чином. Нехай $M(x,y,z)$ - довільна точка сфери. Тоді, враховуючи геометричну властивість сфери і формулу відстані між двома точками, маємо

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

Залишається піднести цю рівність до квадрата і позбутися правої частини. Після цього утворене рівняння задовольняють точки, що належать сфері, і не задовольнятимуть всі інші. А це і означає, що рівняння *(2.1)* є рівнянням сфери.

Рівняння поверхні можна записати і в інших координатах: зокрема, в сферичних загальний вигляд його буде $F(\rho, \theta, \varphi) = 0$, а рівняння сфери: $\rho - R = 0$.

Подібно до площинного випадку вводиться поняття алгебричних поверхонь. Сфера, зокрема, є алгебричною поверхнею другого порядку. У просторі також мають місце особливі випадки: уявні поверхні, випадки виродження та розпаду. Ці випадки розглядатимуться нижче при розв'язанні прикладів.

## 2.3. Площина

Це алгебрична поверхня першого порядку, <u>*загальне рівняння*</u> якої має вигляд $Ax+By+Cz+D = 0$. Покажемо, що це рівняння визначає деяку площину. Для цього введемо вектор

$$\overline{N} = Ai + Bj + Ck .$$

Тоді рівняння можна подати у формі

$$\overline{N} \cdot \overline{r} + D = 0 ,$$

де $\overline{r} = xi + yj + zk$ - радіус-вектор довільної точки *(x,y,z)*. Але $\overline{N} \cdot \overline{r} = \left|\overline{N}\right| \cdot Пр_{\overline{N}}\overline{r}$, а тому

$$Пр_{\overline{N}}\overline{r} = -\frac{D}{N},\ N = \left|\overline{N}\right|.$$

Таким чином, у просторі потрібно взяти сукупність усіх точок *M(x,y,z)*, для яких проекція радіуса-вектора на сталий вектор $\overline{N}$ є сталою величиною.

Зазначимо, що вплив коефіцієнтів *A,B,C* і *D* на розташування площини можна побачити, виходячи з *рис.2.5.* Наприклад, коли змінювати *D*, не змінюючи *A,B* і *C*, то площина, поступально рухаючись, зокрема, пройде через початок координат при *D=0*. Якщо змінювати *A,B* чи *C*, то це веде до обертання вектора $\overline{N}$ і, таким чином, до обертання площини. Коли *A=0*, то $\overline{N}$ лежить у площині *yOz*, і тому площина буде паралельною осі *Ox*. Якщо ж і *D = 0*, то площина пройде через цю вісь.

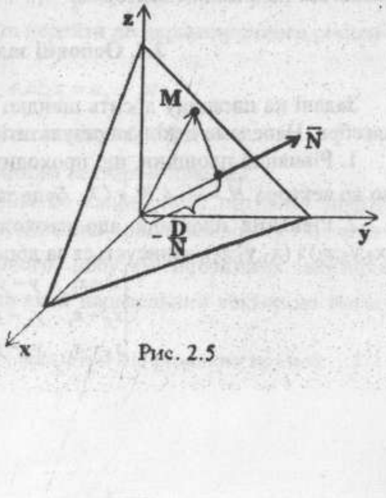

Рис. 2.5

Аналогічно розглядаються випадки, пов'язані з *B = 0* чи *C = 0* .

Зазначимо рівняння координатних

площин:

$$xOy: z = 0; \; xOz: y = 0; \; yOz: x = 0.$$

Якщо всі коефіцієнти загального рівняння відмінні від нуля, то воно може бути перетворене на рівняння у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де $a=-\frac{D}{A}$; $b=-\frac{D}{B}$; $c=-\frac{D}{C}$ - алгебричні величини відрізків, що відтинаються площиною від координатних осей. Це рівняння зручне для геометричного зображення. Наприклад, загальне рівняння $2x+3y+4z-12=0$ можна подати у вигляді $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$, з якого очевидно, що відрізки 6, 4 і 3 відтинаються від осей $Ox$, $Oy$ і $Oz$.

На *рис. 2.6* зображено ту частину площини, що знаходиться у 1-му октанті.

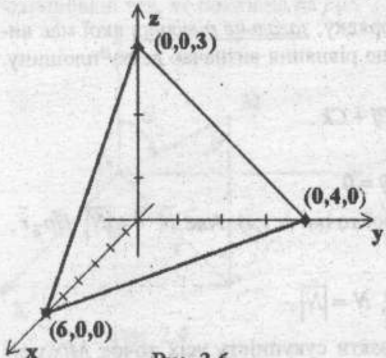


Рис. 2.6

***Нормальним рівнянням*** площини називається рівняння виду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

де $p$ - довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси цього перпендикуляра (порівн. з підрозд. 1.4).

Загальне рівняння перетворюється у нормальне за допомогою нормуючого множника

$$M = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак якого протилежний знаку коефіцієнта $D$.

Зазначимо, що вектор $\overline{N} = Ai + Bj + Ck$ для площини $Ax+By+Cz+D=0$ називається напрямним вектором.

## 2.4. Основні задачі на площину

Задачі на площину досить швидко розв'язуються за допомогою векторної алгебри. Наведемо декілька результатів розв'язання таких задач:

1. Рівняння площини, що проходить через точку $(x_0,y,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N} = Ai + Bj + Ck$, буде таким: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$ і $(x_3,y_3,z_3)$, записується за допомогою визначника

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Кут між площинами визначається кутом між напрямними векторами цих площин. Отже, якщо площини мають рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

4. Відстань від точки $(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться подібно до того, як це робилось у площинному варіанті (див. підрозд. 1.5, п. 3), тобто спочатку переходимо до нормального рівняння площини

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

а потім замість $x, y, z$ підставляємо координати точки, відстань від якої потрібно знайти. Таким чином, відстань $d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$, або в розгорнутому вигляді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 2.5. Пряма лінія у просторі

Лінія у просторі може бути задана як множина точок, спільних для двох поверхонь. Зокрема, пряма лінія як лінія перетину двох площин така:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Цю систему й будемо вважати загальним рівнянням прямої.

Пряму у просторі однозначно можна визначити за точкою і напрямом. Нехай точка має координати $(x_0, y_0, z_0)$, а напрям задано вектором $\bar{e} = im + jn + kp$. Тоді рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

називається канонічним, від якого можна перейти до параметричного рівняння

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt.$$

Особливо проста векторна форма цього запису: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{e}t$.

Слід зазначити, що вектор $\bar{e}$ є напрямним вектором прямої.

Для переходу від загального рівняння до канонічного потрібно знайти один із розв'язків системи двох рівнянь відносно трьох невідомих і напрямний вектор $\bar{e}$ за формулою векторного добутку напрямних векторів $A_ni + B_nj + C_nk$. Як $\bar{e}$ можна взяти будь-який паралельний вектор до вказаного добутку.

***Приклад 2.1.*** Записати канонічне та параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 10, \\ 6x - 5y + z = 17. \end{cases}$$

***Розв'язання.*** Складемо таблицю $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $m = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 25 = 21$,

$$n = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 30 = -27, \quad p = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 9.$$

Отже, $\bar{e} = 7i - 9j + 3k$.

Візьмемо $z = 0$, звідки $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 6x - 5y = 17. \end{cases}$. Розв'яжемо цю систему: $x = 2$, $y = -1$, тобто $x_0=2$, $y_0= -1$, $z_0 =0$. Таким чином, маємо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z}{3}$$

та її параметричне рівняння $\begin{cases} x = 2 + 7t, \\ y = -1 - 9t, \\ z = 3t. \end{cases}$

Коли один із знаменників $m$, $n$ чи $p$ дорівнюватиме нулеві, то і чисельник відповідного добутку потрібно прирівняти до нуля, тобто система $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ рівносильна системі $x = x_0$, $\frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

## 2.6. Найпростіші задачі на пряму

Задачі, зв'язані з прямою лінією у просторі подібно до задач з площиною (див. підрозд. 2.4), досить просто розв'язуються за допомогою векторної алгебри.

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$.

Тут за напрямний вектор $\bar{e}$ можна взяти вектор $(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ і далі, для довільної точки $(x,y,z)$, яка разом з першою заданою точкою визначає вектор, записати умову його паралельності з $\bar{e}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ця умова не дозволить «зійти» довільній точці $(x,y,z)$ з розшукуваної прямої, тобто є рівнянням прямої, яку потрібно знайти.

2. Знайти відстань від точки $(x_0, y_0, z_0)$ до прямої $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$.

Напрямний вектор $\bar{e} = mi + nj + pk$ і вектор $(x_0 - a)i + (y_0 - b)j + (z_0 - c)k$ утворюють паралелограм. Висота цього паралелограма і є розшукувана відстань, тому маємо

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - b & z_0 - c \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & z_0 - c \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & y_0 - b \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

3. Коли маємо дві прямі $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$, $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$, то вони можуть бути розташовані в одній площині. Необхідною і достатньою умовою цього є рівність

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Коли ж визначник, що стоїть ліворуч, відмінний від нуля, то вказані прямі будуть мимобіжними. Найкоротша відстань між ними визначається за формулою

$$d = \frac{abs\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

## 2.7. Задачі на пряму і площину

1. Для того щоб знайти точку перетину прямої $\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}$ з площиною $Ax+By+Cz+D=O$, потрібно розв'язати систему, складену з трьох рівнянь. Більш простим виявиться розв'язок, коли взяти параметричне рівняння прямої $x = a + mt$, $y = b + nt$, $z = c + pt$ і підставити його в рівняння площини: одержимо лінійне рівняння відносно $t$. Після його розв'язання будемо мати $t_0$, тоді координати точки перетину:

$$x_0 = a + mt_0, y_0 = b + nt_0, z_0 = c + pt_0.$$

2. Кут між прямою та площиною знаходимо за допомогою їх напрямних векторів. Але потрібно враховувати, що напрямний вектор прямої паралельний їй, а напрямний вектор площини перпендикулярний до площини. Тому (*рис.2.7*)

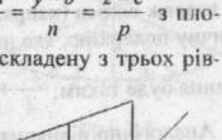


Рис. 2.7

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Умова того, що пряма належить площині, грунтується на тому, що точка *(a,b,c)*, яка належить прямій, повинна належати також і площині, тобто

$$Aa + Bb + Cc + D = 0.$$

Окрім того, напрямні вектори мають бути перпендикулярними, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Таким чином, ця умова забезпечується двома рівностями:

$$\begin{cases} Aa + Bb + Cc + d = 0, \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

## 2.8. Циліндричні поверхні

Рівняння $F(x,y)=0$ може розглядатися у тривимірному просторі $Oxyz$ як рівняння деякої циліндричної поверхні з твірною, паралельною осі $Oz$, і напрямною у площині $xOy$, що має рівняння $F(x, y)$. Для прикладу візьмемо рівняння $9x^2+4y^2-36=0$, яке визначає у площині $xOy$ еліпс: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Якщо точка $(x_0,y_0)$ належить цьому еліпсу, то у просторі $Oxyz$ точка з координатами $(x_0, y_0, z)$ теж задовольняє вказане рівняння при довільному $z$. При цьому точки $(x_0, y_0, z)$ утворюють пряму, паралельну осі $Oz$, та її рівняння.

Ця пряма називається твірною, вона проходить через точку $(x_0, y_0, 0)$, що належить еліпсу $9x^2+4y^2=36$ у площині $xOy$. Коли вибрану точку $(x_0, y_0)$ рухати вздовж еліпса (напрямна лінія), то твірна при цьому утворюватиме циліндричну поверхню, яка називається *еліптичним циліндром.* Його канонічне рівняння буде таким: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Аналогічно рівняння $\phi(x, z)=0$ і $\Psi(y, z)=0$ визначають циліндри з твірними, паралельними іншим координатним осям.

***Приклади.***

**2.2**. Рівняння $x^2-4z^2=16$ визначає у площині $xOz$ гіперболу, а у просторі - *гіперболічний циліндр*, утворений прямою, паралельною осі $Oy$, що рухається по напрямній лінії - гіперболі $x^2-4z^2=16$ у площині xOz.

2.3. Рівняння $z^2=4y$ є рівняння напрямної лінії (параболи) у площині $yOz$, вздовж якої пряма, паралельна осі $Ox$, рухаючись, утворює *параболічний циліндр*. Його рівняння $z^2 = 4y$.

## 2.9. Конічні поверхні

Рівняння $F(x,y,z)=0$ визначає конічну поверхню, якщо $F(tx,ty,tz)=t^k F(x,y,z)$ для довільної $t > 0$. Зокрема, кажуть, що $F(x,y,z)$ - функція трьох незалежних змінних – є однорідною функцією цих змінних виміру $k$.

***Приклад 2.4.***

$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0 \ \ (a,b,c > 0)$.

Це рівняння еліптичного конуса. Дійсно, $a(tx)^2 + b(ty)^2 - c(tz)^2 = t^2(ax^2+by^2-cz^2)$; далі, якщо точка $(x_0,y_0,z_0)$ належить цій поверхні, то і точки $(tx_0, ty_0, tz_0)$ при будь-якому $t$ теж належать їй. Вказані точки утворюють промінь при $t>0$ або пряму при довільному дійсному $t$:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=t\,.$$

Вона проходить через початок координат і точку $(x_0, y_0, z_0)$.

У перетині еліптичного конуса площинами $z=\pm c_0$ знаходяться еліпси, що мають рівняння

$$\frac{ax^2}{cc_0^{\ 2}}=\frac{by^2}{cc_0^{\ 2}}=1,$$

через кожну точку яких з початку координат проходять промені, які й утворюють конічну поверхню.

Коли $a=b=c$, то рівняння має вигляд $x^2+y^2=z^2$ і визначає круговий конус. Інколи конічні поверхні за наявності двох порожнин називають <u>*біконічними*</u>, або біконусами (*рис. 2.8*).

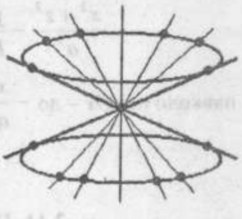

**Рис. 2.8**

## 2.10. Поверхні обертання

Нехай лінія $(Z)$, що належить площині $yOz$ і має рівняння $F(y,z)=0$, обертається навколо осі $Oz$. Тоді одержимо рівняння утвореної поверхні. Для цього візьмемо довільну точку $M$ на поверхні та знайдемо відповідну точку $\overline{M}$ на кривій $(Z)$:

$$\mathrm{M(x,y,z)}\,,\ \overline{M}\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)\!,\overline{x}=0,\overline{y}=\sqrt{x^2+y^2}\,,\overline{z}=z.$$

Оскільки $\overline{M} \in (Z)$, то $F(\bar{y},\bar{z})=0$, тобто $F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$. Отже, довільна точка поверхні $M(x,y,z)$ задовольняє рівняння

$$F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0.$$

***Приклади.***

**2.5**. Рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $z=ay^2$ навколо осі *Oz*, буде таким:

$$z=a(x^2+y^2) \quad \textit{(параболоїд)}.$$

**2.6**. Рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ навколо осі *Ox*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \text{ (еліпсоїд обертання).}$$

**2.7**. Обертання гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ навколо осі *Oy* приводить до

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textit{(однопорожнинний гіперболоїд)},$$

а навколо осі *Ox* – до $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ *(двопорожнинний гіперболоїд)*.

## 2.11. Поверхні другого порядку (огляд)

Поверхнею другого порядку називається поверхня, що визначається рівнянням другого степеня відносно змінних $x$, $y$, $z$ - координат довільної точки.

При відповідному виборі прямокутної декартової системи координат у просторі рівняння поверхонь можна звести до одного з виглядів:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ (еліпсоїд);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (однопорожнинний гіперболоїд – *рис. 2.9*);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ (двопорожнинний гіперболоїд);

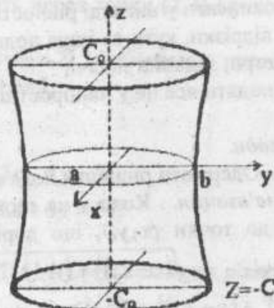

Рис. 2.9

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$ (конус);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (еліптичний циліндр);

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ (гіперболічний циліндр);

$y^2=2px$ (параболічний циліндр);

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$ (пара площин, що перетинаються);

$x^2=a^2$ (пара паралельних площин).

Це є канонічні рівняння поверхонь другого порядку.

Слід зазначити, що досить часто виникають випадки виродження поверхонь у площину $(x^2=0)$, точку $(x^2+y^2=0)$ чи пусту множину $(x^2+y^2+z^2=-1)$ – уявний еліпсоїд.

# 3. Практичні заняття з аналітичної геометрії

### *Заняття 1. Прямі задачі аналітичної геометрії. Пряма лінія*

**Рівнянням лінії** називається рівняння $F(x,y)=0$, яке задовольняють координати будь-якої точки $M(x,y)$ цієї лінії і тільки вони.

Для того, щоб одержати рівняння лінії як геометричного місця точок, що задовольняють певні властивості, потрібно:

1) взяти довільну точку $M(x,y)$ лінії;
2) записати у вигляді рівності загальну властивість всіх точок лінії;
3) відрізки, кути та інше подати через координати довільної точки $x$ і $y$ та параметри, задані в задачі;
4) подати все це у найпростішому вигляді.

***Приклади.***

**3.1**. Одержати рівняння кола з центром $(x_0,y_0)$ та радіусом R.

***Розв'язання.*** Коло - це геометричне місце точок $M(x,y)$, які мають відстань до точки $(x_0,y_0)$, що дорівнює $R$. Відстань між точками $M(x,y)$ та $M_0(x_0,y_0)$ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$ піднесемо до квадрата $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Отже, це і є рівняння кола.

**3.2**. Знайти рівняння лінії руху довільної точки $M(x,y)$, яка має однакову відстань від точок $(0,2)$ і $(4,-2)$.

***Відповідь:*** $x-y-2=0$.

**3.3**. Написати рівняння бісектрис координатних кутів.

***Відповідь:*** $y=x$, $y=-x$.

**3.4**. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $(2,2)$ та осі $Ox$, і побудувати його.

***Відповідь:*** $y=\frac{x^2}{4}-x+2$.

**3.5**. Знайти точку, що ділить відрізок $AB$, де $A(-2,1)$, $B(3,6)$, у відношенні $3:2$ $(AM:MB=3:2)$.

***Відповідь:*** $(1,4)$.

**Загальне рівняння прямої** на площині $Ax+By+D=0$.

Якщо $B\neq 0$, то його зводимо до вигляду $y=kx+b$ - рівняння з кутовим коефіцієнтом $k=tg\alpha$, де $\alpha$ - кут нахилу до осі $Ox$. Рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Кут $\varphi$, що відраховується проти годинникової стрілки від прямої $y=k_1x+b_1$ до прямої $y=k_2x+b_2$, визначається за допомогою

$$tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Умова паралельності: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності: $k_1 = -1/k_2$.

Рівняння в'язки прямих, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{y - y_2}.$$

***Приклади.***

**3.6.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точку (2,3) і утворює кут 135" з віссю *Ox*.

***Розв'язання.*** Візьмемо рівняння в'язки $y-3=k(x-2)$ і виберемо з нього те, для якого $k=tg135° = -1$, тобто $y-3=-(x-2)$, або $y+x=5$.

***Відповідь:*** $y+x=5$.

**3.7.** Визначити кут між прямими:

а) $\begin{cases} 5x - y - 7 = 0, \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ 6x + 4y + 9 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 4y = 6, \\ 8x + 6y = 11. \end{cases}$

***Відповідь:*** *а) 45°; б) 0°; в)90°.*

**3.8.** У трикутнику з вершинами $A(-2,0)$, $B(2,6)$ і $C(4,2)$ скласти рівняння сторони *AC*, медіани *BE* та висоти *BD*.

***Відповідь:*** $x-3y-2=0$, $5x-y=4$, $3x+y=12$.

**3.9.** Побудувати трикутник, сторони якого задано рівняннями $x+y=4$, $3x-y==0$, $x-3y-8=0$; знайти кути і площу трикутника.

***Відповідь:*** $tg\alpha = \frac{4}{3}; tg\beta = tg\gamma = 2, S = 16.$

### *Заняття 2. Рівняння кола та еліпса*

**Рівняння кола,** центр якого у точці $(x_0, y_0)$, а радіус $R$, буде таким:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Якщо розкрити дужки, то дістанемо $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Тому, коли маємо обернену задачу, потрібно виділити квадрати.

***Приклади.***

**3.10.** Знайти центр та радіуси кіл:

а) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$, б) $x^2+y^2+5x-7y-25=0$, в) $x^2+y^2-8x+7=0$. Побудувати їх.

***Розв'язання.***

б) $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - 7y + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} = 0, \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 16.$

***Відповідь:*** *а)(3, -2), R=6; б)* $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), R = 6$; *в)(4, 0), R=4.*

**3.11.** Скласти рівняння кола з центром *(-4,3)* і радіусом *5*. Побудувати його. Чи належать цьому колу точки *( -1,-1), (3,2), (0,0)?*

***Відповідь:*** $x^2+y^2+8x-6y=0$, *1 і 3* $\in$, *а 2 ні.*

**3.12.** Дано точку $A(-4,6)$. Скласти рівняння кола, діаметр якого є відрізок $OA$.

***Відповідь:*** $x^2+y^2+4x-6y=0$.

**3.13.** Побудувати коло $x^2+y^2+5x=0$ та пряму $x+y=0$. Знайти точки їх перетину.

***Відповідь:*** $(0;0)$, $(-2,5;2,5)$.

**3.14.** Скласти рівняння кола, що проходить через точку $(1,2)$ і торкається координатних осей.

***Відповідь:*** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ *або* $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

**3.15.** Знайти кут між радіусами кола $x^2+y^2+4x-6y=0$, які проведені у точці перетину кола з віссю $Oy$.

***Відповідь:*** $tg\alpha = -2,4$.

**3.16.** Скласти рівняння кола, що проходить через точки $(-1,3)$, $(0,2)$, $(1,-1)$.

*Вказівка.* Підставити у рівняння $x^2+y^2+ax+by+c=0$ задані точки і визначити $a,b$ і $c$.

**3.17.** Знайти область розташування кривої $y=\sqrt{-x^2+4x}$ та побудувати її.

**Рівняння еліпса** $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, де $a$ і $b$ - півосі, $(x_0,y_0)$ - його центр. Нехай $a>b$. Тоді фокуси еліпса розташовані на прямій $y=y_0$ на відстані $c=\sqrt{a^2-b^2}$ від центра. Відношення $\dfrac{c}{a}=\varepsilon<1$ називається ексцентриситетом еліпса.

***Приклади.***

**3.18.** Довести, що кожне з рівнянь а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$, б) $16x^2+25y^2+32x-100y=284$, в) $4x^2+3y^2-8x+12y=32$ визначає еліпс. Знайти його півосі, центр і ексцентриситет.

***Розв'язання.***

б) Виділимо повні квадрати так, як це робили у прикладі 3.10: $16(x^2+2x+1)-16+25(y^2-4y+4)-100=284$, $16(x+1)^2+25(y-2)^2=400$, розділимо обидві частини рівняння на 400 і одержимо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1.$$

Його центр - $(-1,2)$, півосі - $a=5$, $b=4$; $c=\sqrt{25-16}=3$, $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$.

***Відповідь:*** а) $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $(3,-1)$, $\varepsilon=2/3$; в) $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $(1,-2)$, $\varepsilon=1/2$.

**3.19.** Побудувати еліпс $x^2+4y^2=16$, знайти його фокуси і ексцентриситет.

***Відповідь:*** $(-2\sqrt{3},0)$, $(2\sqrt{3},0)$.

**3.20.** Скласти рівняння еліпса, якщо: а)відстань між фокусами $8$, а мала вісь $b=3$; б) велика піввісь $a=6$, а ексцентриситет $=0,5$.

*Відповідь:* а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

**3.21.** Ординати всіх точок кола $x^2+y^2=36$ скорочені втроє. Скласти рівняння нової кривої.

*Відповідь:* $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

**3.22.** Скласти найпростіше рівняння еліпса, в якого відстань одного з фокусів до кінців великої осі дорівнює $5$ і $1$.

*Відповідь:* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ *або* $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$.

**3.23.** Визначити розташування прямої відносно еліпса:

а) $2x-y=3, 9x^2+16y^2=144$;

б) $2x+y=10, 4x^2+9y^2=36$;

в) $3x+2y=20, x^2+4y^2=40$.

*Відповідь:* а) *пряма перетинає еліпс;* б) *проходить за межами еліпса;* в) *торкається еліпса.*

### *Заняття 3. Рівняння гіперболи та параболи*

**Рівняння гіперболи:** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Тут $(x_0, y_0)$ – центр кривої; $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ - асимптоти гіперболи, $a$ – дійсна піввісь, $b$ – уявна *(рис.3.1)*.

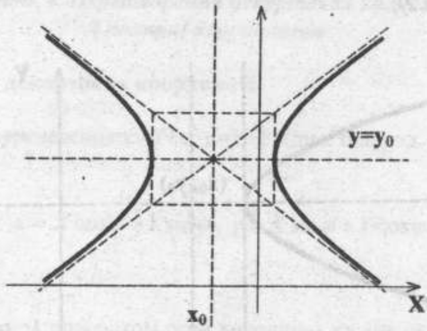


Рис. 3.1

***Приклади.***

**3.24**. Довести, що кожне з рівнянь

а) $16x^2-9y^2-64x-54y=161$,

б) $9x^2-16y^2+90x+32y=367$,

в) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$

визначає гіперболу. Знайти її центр, півосі та рівняння асимптот.

***Розв'язання.*** б) Виділимо повні квадрати:

$$9(x^2+10x+25)-9*25-16(y^2-2y+1)+16=367,\text{ або}$$

$9(x+5)^2-16(y-1)^2=576$. Розділимо останнє на $576$: $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$. Це рівняння гіперболи з центром у точці $(-5,1)$, півосями $a=8$, $b=6$ і асимптотами $y-1=\pm\frac{3}{4}(x+5)$.

***Відповідь:*** *а)* $(2,3)$, $a$-$3$, $b=4$, $y+3=\pm\frac{3}{4}(x-2)$;

*в)* $(2,-1)$, $a=4$, $b=3$, $y-1=\pm\frac{3}{4}(x+5)$.

**3.25.** Побудувати гіперболу $x^2-4y^2=18$ та її асимптоти. Знайти кут між асимптотами.

*Вказівка.* Фокуси розташовані на відстані $c=\sqrt{a^2+b^2}$ від центра на прямій $y=y_0=0$.

***Відповідь:*** $tg\alpha=2$.

**3.26.** Знайти область розташування кривої $y=-\sqrt{9+x^2}$.

**3.27.** Знайти точки перетину асимптот гіперболи $x^2-3y^2=12$ з колом, що має центр у правому фокусі гіперболи і проходить через $(0,0)$.

***Відповідь:*** $(0,0)$ $(6,\pm 2\sqrt{3})$.

**Рівняння параболи.** Маємо два найпростіших рівняння параболи $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ та $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$; $(x_0,y_0)$ є вершиною цих парабол. Перше з рівнянь визначає параболу, симетричну відносно прямої $y=y_0$, її фокус - $F\left(x_0+\frac{p}{2},y_0\right)$ (*рис.3.2*).

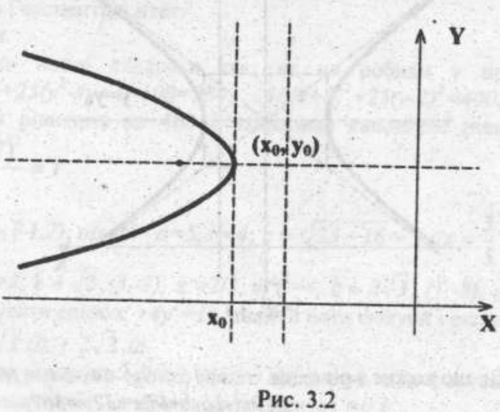


Рис. 3.2

Друга парабола симетрична відносно прямої $x=x_0$, а фокус розміщено у точці $\left(x_0, y_0+\dfrac{p}{2}\right)$. Рівняння директрис відповідно: $x=x_0-\dfrac{p}{2}$ та $y=y_0-\dfrac{p}{2}$.

***Приклади.***

**3.28.** Довести, що кожне з рівнянь а) $y^2=4x-8$, б) $x^2=2-y$, в) $y=4x^2-8x+7$, г) $y=-\dfrac{x^2}{6}+2x-7$, д) $x=2y^2-12y+14$ визначає параболу. Знайти координати вершини та параметр $p$.

***Розв'язання.*** З правої частини виділимо квадрат: $2y^2-12y+14=2(y-3)^2-4$, тому маємо канонічне рівняння $2\cdot\dfrac{1}{4}(x+4)=(y-3)^2$, що визначає параболу з вершиною $(-4,3)$ і $p=1/4$.

***Відповідь:*** *а) (2,0), p=2; б) (0,2), p-1/2; в) (1,3), p 18; г) (6,-1), p-3.*

**3.29.** Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від точки $(0,2)$ та прямої $y=4$.

***Відповідь:*** $y=3-x^2/4$.

**3.30.** Знайти рівняння параболи, що проходить:

а) через точки $(0,0)$ і $(1,-3)$ симетрично відносно осі $Ox$;

б) через точки $(0,0)$ і $(2,-4)$ симетрично відносно осі $Oy$.

***Відповідь:*** *а)* $y^2=9x$; *б)* $y=-x^2$.

**3.31.** В параболу $y^2=2px$ вписано правильний трикутник. Знайти його вершини.

***Відповідь:*** $(0,0)$ $(6, \pm 2\sqrt{3})$.

## *Заняття 4. Перетворення декартових координат і полярні координати*

**Перетворення декартових координат:**

а) паралельне перенесення $x=X+a$, $y=Y+b$ (див. підрозд. 1.9);

*б) поворот*

$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi,\ y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi.$$

***Приклади.***

**3.32.** Рівняння $xy=k$ поворотом осей координат на кут $\varphi=45°$ перетворюється на рівняння $X^2-Y^2=2k$, що визначає рівносторонню гіперболу, асимптоти якої є старі координатні осі.

**3.33.** На який кут потрібно повернути осі координати, щоб зник член, що містить $xy$ в рівняннях: а) $x^2-xy+y^2=3$, б) $5x^2-4xy+2y^2-24=0$? Побудувати старі, нові осі та криві.

***Відповідь:*** *а)45°, б) arctg2.*

**3.34.** Поворотом на *45°* спростити рівняння $3x^2-xy+3y^2=8$. Знайти координати фокусів у старій системі координат.

***Відповідь:*** $X^2+2Y^2=4$, *(1,1) (-1,-1).*

**3.35.** Звести рівняння до канонічного вигляду:

*а)* $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y=12$; *б)* $x^2-6xy+y^2-4x-4y+12=0$;

*в)* $x^2+4xy+4y^2-20x+10y=50$, *г)* $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8=0$.

***Відповідь:*** *а)* $X^2/8+Y^2/4=1$; *б)* $X^2/8-Y^2/4=1$; *в)* $Y^2=2\sqrt{5}X$; *г) пара прямих.*

**Полярні координати.**

Нехай на площині задано точку O - полюс - і промінь, що виходить з неї (полярна вісь). Тоді положення довільної точки *M* визначається:

1) полярним кутом $\varphi$ між *OM* і полярною віссю;

2) відрізком *OM=r* (див. підрозд. 1.11).

Якщо прийняти полюс за початок декартових прямокутних координат, а полярну вісь - за вісь *Ox*, то декартові координати зв'язані с полярними за допомогою формул $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

***Приклади.***

**3.36.** Побудувати лінію $r=2+2\cos\varphi$.

*Вказівка.* Скласти таблицю значень *r* для $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi$.

**3.37.** Побудувати лінії: а) $r=a\varphi$ (спіраль Архімеда); б) $r^2=a^2\cos 2\varphi$ ( лемніската Бернуллі); в) $r=a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

**3.38.** Побудувати криву, задану рівнянням $r=6\cos\varphi$.

***Розв'язання.***

Помножимо рівняння на *r*, тоді $r^2=6r\cos\varphi$, і перейдемо до декартових координат:

$x^2+y^2=6x \Rightarrow (x-3)^2+y^2=9$. Це - коло з центром *(3;0)* і радіусом *3*.

**3.39.** Подати рівняння прямої $x + y = \sqrt{x^2}$ у полярній системі координат.

***Розв'язання.*** Запишемо відповідне нормальне рівняння:

$$x\frac{1}{\sqrt{2}} + y\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0 \Rightarrow x\cos\frac{\pi}{4} + y\sin\frac{\pi}{4} - 1 = 0 \Rightarrow r\cos\varphi\cos\frac{\pi}{4} + r\sin\varphi\sin\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

***Відповідь:*** $r = \dfrac{l}{\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

**3.40.** Скласти рівняння кола в полярній системі координат, якщо:
а) воно проходить через полюс, його центр на полярній осі, а радіус $r=5$;
б) воно дотикається до полярної осі в полюсі і має радіус $3$.

***Відповідь:*** *а)* $r=10\cos\varphi$; *б)* $r=\pm\sin\varphi$.

**3.41.** Знайти полярні координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:

*а)* $r=4\cos\varphi$; *б)* $r=3\sin\varphi$; *в)* $r=-58\sin\varphi$, *г)* $r=6\cos(\pi/3-\varphi)$.

***Відповідь:*** $а)(2;0), R=2; б)(0,3), R=\dfrac{3}{2}; в)\left(0,-\dfrac{5}{2}\right), R=\dfrac{5}{2}; г)\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), R=3.$

## *Заняття 5. Площина у просторі*

**Рівняння площини** $Ax+By+Cz+D=0$ **(загальний вигляд ).** $\overline{N} = Ai + Bj + Ck$ - напрямний вектор. Якщо D=0, площина проходить через початок координат; якщо A=0 (B=0,C=0), то площина паралельна осі Ox (Oy, Oz). Коли $D\neq 0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$ і $C\neq 0$, то можна одержати рівняння площини у відрізках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Рівняння площини, що проходить через точку $(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N} = Ai + Bj + Ck$, має такий вигляд: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

***Приклади.***

**3.42.** Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(a,a,0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{OM}$.

***Розв'язання.*** $\overline{OM}$ - це радіус-вектор точки M, тому $\overline{OM} = ai+aj$ (див. рис. 3.3). Використаємо останню формулу:

$$a(x-a)+a(y-a)=0.\ ax+ay=2a^2.$$

***Відповідь:*** $x+y=2a$.

**3.43.** Побудувати площину $2x+3y+6z=12$ і знайти напрям напрямного вектора.

***Відповідь:*** $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}, \cos\beta = \dfrac{3}{7}, \cos\gamma = \dfrac{6}{7}$.

**3.44.** Скласти рівняння площини, що проходить через:

а) точку (-1,2,3) перпендикулярно до $\overline{OM}$;

***Відповідь:*** $x-2y-3z+14=0$.

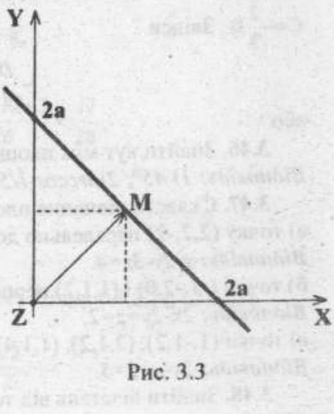


Рис. 3.3

б) точки $M_1(0,-1,3)$ і $M_2(1,2,5)$ перпендикулярно до вектора $M_1M_2$;
***Відповідь:*** *x+4y-2z-2.*

в) точки (0,1,3) і (2,4,5) паралельно осі Ox;
***Відповідь:*** *2y-3z+7-0.*

г) точки (0,1,2) (1,-1,3) (3,-2,1).

**Основні задачі на площину**

**1.** Кут, утворений двома площинами, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{N_1\cdot N_2}$, тут $\overline{N_1}$ і $\overline{N_2}$ - напрямні вектори площин

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D=0.$$

**2.** Умова перпендикулярності: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

**3.** Умова паралельності: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

**4.** Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|:N.$$

***Приклади.***

**3.45.** Скласти рівняння площини, що проходить через точку (-1,-1,2) перпендикулярно до площин $x-2y+z=4$, $x+2y-2z+4=0$.

***Розв'язання.***

Рівняння шукаємо у вигляді Ax+By+Cz+D=0. Координати даної точки задовольняють це рівняння. Отже, маємо, -A-B+2C+D=0, умови перпендикулярності забезпечують ще два рівняння: A-2B+C=0 => A-2B=-C і A+2B-2C=0=> =>2A=C. Таким чином, C = 2A, A - 2B = -2A, 2B = 3A. Якщо D = 0, то маємо -A-3A/2+4A=0=>A=B=C=0, якщо $D\neq 0$, то -5A+8A= -2D => 3A= -2D, 2B=-2D, $C=-\dfrac{2}{3}D$. Звідси

$$-\frac{D}{3}x-\frac{D}{2}y-\frac{2D}{3}z+\frac{D}{2}=0,$$

або

$$2x+3y+4z=3.$$

**3.46.** Знайти кут між площинами: 1)x-2y+2z=8 і x+z=5; 2)x+2z=6 і x+2y=4.
***Відповідь:*** *1) 45°; 2)arccos 1/5.*

**3.47.** Скласти рівняння площини, що проходить через:

а) точку (2,2,-2) паралельно до площини x-2y-3z=4;
***Відповідь:*** *x-2y-3z=4.*

б) точки (-1,-2,0) і (1,1,2) перпендикулярно до площини x+2y+2z=4;
***Відповідь:*** *2x-2y+z=2.*

в) точки (1,-1,2), (2,1,2), (1,1,4);
***Відповідь:*** *2x-y+z=5.*

**3.48.** Знайти відстань від точки (5,1,-1) до площини x-2y-2z+4=0.

***Відповідь:*** *3.*

**3.49.** Знайти відстань між паралельними площинами 4x+3y-5z=8 і 4x+3y-- z+12=0.

***Відповідь:*** $2\sqrt{2}$.

### *Заняття 6. Пряма у просторі. Задачі на пряму і площину*

Рівняння прямої, що проходить через точку A(a,b,c) паралельно вектору $\overline{P}=(m,n,p)$, має вигляд $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$. Це і є канонічне рівняння прямої, вектор $\overline{P}$ називають напрямним.

Параметричне рівняння прямої: $x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt$.

Рівняння прямої як лінії перетину двох площин називається загальним:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

***Приклади.***

**3.50.** Знайти кут між прямими $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$

***Розв'язання.*** Кут між прямими є кут між відповідними напрямними векторами. Щоб знайти їх, візьмемо вектори-добутки напрямних векторів площин: $(i-j+k)\times(2i+j-2k)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=i+4j+3k$,

$$(i+j+k)\times(2i+3j-k)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-4i+3j+k,$$

тоді $$\cos\varphi=\frac{(i+4j+3k)\cdot(-4i+3j+k)}{\sqrt{1+16+9}\cdot\sqrt{16+9+1}}=\frac{-4+12+3}{26}=\frac{11}{26}.$$

***Відповідь:*** $\varphi=\arccos\frac{11}{26}$.

**3.51.** Побудувати прямі $\begin{cases} y=3, \\ z=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2, \\ z=x+1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ z=y. \end{cases}$

**3.52.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точки (-1,2,3), (2,6,-2). Знайти її напрямні косинуси.

***Відповідь:*** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$;$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{10}$;$\cos\beta=\frac{4\sqrt{2}}{10}$;$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**3.53.** Знайти кут між прямою x=2z-1, y= -2z+1 та прямою, що проходить через початок координат і точку (1,-1,-1).

***Відповідь:*** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**3.54.** Довести, що пряма $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої x=z+1, y=1-z.

**3.55.** Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (2,-3,4) на вісь Oz.

***Відповідь:*** *3x+2y=0, z=4.*

**3.56.** Знайти відстань від точки M(2,-1,3) до прямої $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{5}$.

*Вказівка.* A(-1,-2,1) - точка на цій прямій, а P(3,4,5) - напрямний вектор прямої. Тоді $d = \dfrac{\left|\overline{P}\times\overline{AM}\right|}{P}, P = \left|\overline{P}\right|$.

***Відповідь:*** $\dfrac{3\sqrt{33}}{10}$.

**3.57.** Знайти відстань між прямими $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{2}, \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

***Відповідь:*** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

**3.58.** Визначити найкоротшу відстань між прямими

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

*Вказівка.* Це мимобіжні прямі. $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$ - напрямні вектори, $A_1(-1,0,1)$ і $A_2(0,-1,2)$ – точки на прямих. Тоді $d = \dfrac{\left|\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{A_1A_2}\right|}{\left|\overline{P_1}\times\overline{P_2}\right|}$.

***Відповідь:*** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

## Пряма і площина

Кут між прямою $\dfrac{x-a}{m} = \dfrac{y-b}{n} = \dfrac{z-c}{p}$ та площиною Ax+By+Cz+D=0 визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N}\cdot\overline{P}}{N\cdot P} = \frac{Am+Bn+Cp}{N\cdot P}, \text{ де } N = \sqrt{A^2+B^2+C^2}, P = \sqrt{m^2+n^2+p^2}.$$

Умова перпендикулярності: Am+Bn+Cp=0.

Умова паралельності:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Точка перетину прямої та площини визначається таким чином: підставляючи параметричне рівняння прямої x=mt+a, y=nt+b, z=pt+c у рівняння площини Ax+By+Cz+D=0, одержимо лінійне відносно t рівняння, знайдемо $t_0$, а потім і точку перетину $x_0, y_0$ і $z_0$.

***Приклади.***

**3.59.** Визначити проекцію точки (3,1,-1) на площину x+2y+3z=30.

***Розв'язання.*** Через точку (3,1,-1) проведемо пряму перпендикулярно до заданої площини $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$ і знайдемо точку перетину:

x=3+t; y-2t+1; z=3t-1; 3+t+2(2t+1)+3(3t-1)=14t+2=30. $t_0=28/14=2$; $x_0=5$; $y_0=5$, $Z_0=5$. Це і є проекція, яку потрібно було знайти.

***Відповідь:*** *(5,5,5).*

**3.60.** Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x+y-3z+1=0$ з прямими $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$; $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$.

***Відповідь:*** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z-2}{1}$.

**3.61.** При якому значенні A площина Ax+3y-5z+1=0 буде паралельна прямій $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?

***Відповідь:*** *A= -1.*

**3.62.** Перевірити, чи належить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ площині 4x+3y-z+3=0.

***Відповідь:*** *належить.*

**3.63.** Через пряму $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0$.

***Відповідь:*** $11x-17y-19z+10=0$.

## Список використаної літератури

Головченко О.В., Кошовий Г.І., Найда Л.С. Векторна алгебра та її застосування. - Харків: Харк. авіац. ін-т, 1999.-58 с.

Кованцова Л.В., Кованцов М.І. Математична хрестоматія. Геометрія. - К.: Рад. шк., 1970. - 383 с.

Куренной Г.Ч. Математика: Справочник.-Харьков: Фолио, 1997. - 463 с.

Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Сорокін Ю.І., Федін М.Г. Математика в поняттях, означеннях і термінах: У 2 ч. - К.: Рад. шк.,1986. Ч. 1. -383 с.; Ч. 2. - 460 с.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М.: Наука, 1997.- 352 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. - М.: Наука, 1973.– 640 с.

Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1961.-295 с.

г3 3-00

Головченко Олександр Васильович
Кошовий Георгій Іванович
Найда Леонід Семенович

1экз

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Редактор Л. О Кузьменко

Коректор Т. В. Савченко



Зв. план, 2000
Підписано до друку 28.11.2000
Формат 60x84 $^1/_{16}$. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 2,2. Облік.-вид. арк. 2,56. Т. 300 прим.
Замовлення 207. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17