МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

О.Ф. Тихевич

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Харків "ХАІ" 2000

УДК 681.5.01 : 51

Математичний апарат проектування систем керування / О.Ф. Тихевич. Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2000. – 28 с.

Посібник містить розділи векторно-матричної алгебри, що використовуються у дослідженні сучасних систем керування багатовимірними об'єктами. Розглянуто типи матриць, математичні операції над матрицями і векторами, методи визначення власних значень матриць, а також функцій. Матеріал викладено у вигляді довідника, що має приклади у кожному розділі.

Для студентів денної та заочної форм навчання за фахом «Системи керування ЛА і комплексів», а також «Автоматизовані системи керування».

Бібліогр.: 6 назв.

Р е ц е н з е н т и: канд. техн. наук, доц. В.А. Северілов,
канд. техн. наук, доц. В.Т. Фесенко

ВСТУП

У наші часи складність різноманітних технічних пристроїв і комплексів настільки зросла, що їх нормальне функціонування неможливе без застосування методів автоматичного керування та стабілізації. У свою чергу, складність об`єктів автоматичного керування потребує нових підходів і методів проектування, що базуються на понятті вектора стану і простору станів. Для математичного опису складних систем використовують математичні методи, основані на векторно-матричному способі запису диференціальних та алгебричних рівнянь. Для багатовимірних систем автоматичного керування, що мають багато входів і виходів, важливими є поняття керованості та спостережуваності. Наявність у системи таких якостей перевіряється із застосуванням матриць стану, входу та виходу, визначенням рангів матриць керованості та спостережуваності. Виникли нові способи перевірки стійкості багатовимірних систем, що також потребують використання методів матричної алгебри. І, на завершення, аналіз таких систем не обходиться без визначення перехідної матриці стану, що являє собою матричну функцію. Ось тому в цьому посібнику викладається апарат матричної алгебри, необхідний для побудови і аналізу математичних моделей складних систем автоматичного керування. Матеріали, що містяться в цьому посібнику, призначені для практичних занять з курсу «Основи проектування систем керування літальних апаратів».

1. Матриці

Матриця - це сукупність дійсних або комплексних чисел, чи об'єктів іншої природи (поліномів, функцій та ін.), розташованих у вигляді прямокутної таблиці:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Така таблиця, що має m рядків та n стовпчиків, містить mn клітин (позицій). Тоді кажуть, що матриця має розмір $m \times n$, і її звуть $(m \times n)$-матрицею. Числа чи інші об'єкти, розташовані у клітинах матриці, називають елементами матриці. Кожний елемент матриці відрізняється від іншого своїми індексами, наприклад, a_{34}, a_{46}. У загальному випадку елемент позначають a_{ij}, де перший індекс i завжди вказує на номер рядка, а другий - номер стовпчика (j).

Матриці позначаються звичайно або великою літерою, або за допомогою загального елементу, який ставлять у фігурні чи квадратні дужки, наприклад, **B** або $\{b_{ij}\}$. Матриця у розгорнутому вигляді - це таблиця, яка охоплена квадратними, звичайними або фігурними дужками, наприклад,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1{,}6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{Bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 12 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 1 \end{Bmatrix} .$$

Дві матриці дорівнюють одна одній, якщо вони мають однаковий розмір і якщо дорівнюють їх відповідні елементи, наприклад, матриця A дорівнює матриці B, якщо $a_{ij} = b_{ij}$. Зрозуміло, що порівнювати можна тільки такі матриці, в яких число рядків і стовпчиків збігається.

Стовпчики матриці звуть *векторами-стовпчиками*, а рядки - *векторами-рядками*.

Якщо кількість рядків і стовпчиків у матриці збігаються (**m =n**), вона називається квадратною матрицею порядку **m** або n. Сукупність діагональних елементів a_{ii} квадратної матриці створюють її головну діагональ.

Квадратна матриця порядку n називається діагональною матрицею, якщо всі елементи поза головною діагоналлю дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для будь-яких $i \neq j$. Вона може позначатися як

$$\mathrm{diag}\,(a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ \dots\ ,\ a_{nn}\ ).$$

Діагональна матриця порядку n , в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці ($a_{ii} = 1$, $i = 1,2,\dots,n$), називається одиничною матрицею. Вона позначається великою літерою I або, інколи, E. Наприклад,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$ - діагональна матриця (3x3),

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ - одинична матриця (3 x 3).

Матриця, в якої всі елементи тотожно дорівнюють нулю, називається нульовою матрицею і позначається цифрою **0** , наприклад:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Зазначимо, що нульова матриця може мати будь-який розмір $m \times n$, в той час як одинична матриця - завжди квадратна. Матриця, що має лише один елемент, звичайно ототожнюється з цим елементом.

Квадратна матриця називається верхньою (нижньою) трикутною, якщо дорівнюють нулю всі елементи, розташовані під (над) головною діагоналлю:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Матриця $1 \times n$, в якої лише один рядок, називається матрицею-рядком, або вектором-рядком.

Матриця $n \times 1$, в якої лише один стовпчик, є матриця-стовпчик, чи, просто, вектор.

Діагональна матриця є окремим випадком як верхньої, так і нижньої трикутних матриць.

Якщо у матриці A розміром $(m \times n)$ поміняти місцями рядки і стовпчики (така операція зветься транспонуванням), одержимо матрицю A^T розміром $(n \times m)$, яка називається транспонованою матрицею стосовно вихідної матриці A, наприклад:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Якщо квадратна матриця збігається зі своєю транспонованою, тобто $A=A^T$, вона називається симетричною матрицею, а її елементи зв'язані співвідношенням $a_{ij} = a_{ji}$ (симетрія відносно головної діагоналі). Матриця, для якої $A = - A^T$, називається кососиметричною матрицею, а її елементи зв'язані співвідношенням $a_{ij} = - a_{ji}$, до того ж елементи головної діагоналі дорівнюють нулю ($a_{ii} = 0$). Нижче подано приклади симетричної та кососиметричної матриць:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо елементи матриці A комплексні ($a_{ij} = \alpha_{ij} + j \cdot \beta_{ij}$), то матриця $\overline{A}$ з елементами $\overline{a_{ij}} = \alpha_{ij} - j \cdot \beta_{ij}$ є *комплексно-спряженою* матрицею відносно матриці A.

Матрицю A^{*} розміром (n x m) називають *спряженою* відносно матриці A розміром (m x n), якщо вона дорівнює транспонованій комплексно-спряженій матриці $\left(\overline{A}\right)^{T}$, тобто $a_{ji}^{*} = \overline{a_{ij}}$.

Матриця, що дорівнює своїй спряженій, тобто $A = (\overline{A})^{T} = A^{*}$, називається *ермітовою*. Якщо $A = -(\overline{A})^{T}$, то матриця A - *косоермітова.*

Матриця A називається *дійсною,* якщо вона дорівнює своїй комплексно-спряженій матриці ($A = \overline{A}$). Якщо $A = -\overline{A}$, то матриця A називається *уявною.*

2. Операції з матрицями

Додавання матриць

Якщо матриці A і B мають однаковий розмір (m x n), їх сумою буде третя матриця $C = A + B$, елементи якої визначаються таким чином: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0,5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -0,25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2+2 & 4-2 \\ -3+3 & 1+0 \\ 0,5+4 & 3-0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4,5 & 2,75 \end{bmatrix}.$$

Операція додавання комутативна ($A+B = B+A$) і асоціативна ($A+(B+C) = (A+B)+C$). Вона, природно, поширюється на будь-яке число доданків. Очевидно, що матриця A не зміниться при підсумовуванні її з нульовою матрицею того ж розміру ($A + 0 = 0 + A = A$).

Множення матриці на число (скаляр)

Якщо маємо матрицю A розміром (m x n) і число (скаляр) k, добуток являє собою матрицю $C = kA$, елементи якої дістають множенням відповідних елементів матриці A на це число, тобто $c_{ij} = ka_{ij}$, наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad k = 2, \quad C = kA = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Спільний множник елементів матриці можна виносити за її дужки, вважаючи його скалярним множником. Справедливі такі співвідношення:

$$kA = Ak;\ (k + q)A = kA + qA;\ k(A + B) = kA + kB;\ (kq)A = k(qA),$$

де A і B - матриці однакового розміру; k і q - числа (скаляри).

Різниця двох матриць однакових розмірів може бути зображена як $A - B = A + (-1)B$, тобто $C = A - B$, якщо $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Множення матриць

Множити одну матрицю на другу можна тільки тоді, коли вони узгоджуються за формою, що означає рівність <u>числа стовпчиків першої</u> матриці <u>числу рядків другої</u>. Наприклад, маємо матрицю A розміром (m x n) і матрицю B розміром (n x r). Тоді добутком є матриця C розміром (m x r), в якої елементи визначаються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ \ i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, r.$$

Це означає, що елемент c_{ij}, розташований на перехресті i-го рядка та j-го стовпчика матриці C, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B. Порядок множення має суттєве значення, бо взагалі операція множення матриць не підпорядкована комутативному законові ($AB \neq BA$). Для матриць A розміром (n x m) і B розміром (m x n) існують як добуток AB розміром (n x n), так і добуток BA розміром (m x m).

Зрозуміло, що ці добутки при $n \neq m$ не можуть дорівнювати один одному, бо не збігаються розміри вихідних матриць. Та навіть при $n = m$, коли маємо справу з квадратними матрицями, добутки AB і BA у більшості випадків не дорівнюватимуть один одному. Якщо ж маємо $AB = BA$, то матриці A і B називаються <u>*переставними*</u>. Наприклад, матриці A і I є переставними матрицями, якщо A - квадратна, а I має відповідний розмір ($AI = IA$).

Якщо хоча б одна з матриць добутку AB є нульовою, то результатом є нульова матриця.

Зазначимо, що, коли $AB = 0$, не обов'язково $A = 0$ чи $B=0$, наприклад:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Операція множення матриць асоціативна, тобто $(kA)B = kAB = A(kB)$, де k - скаляр; $A(BC) = (AB)C$ (якщо A, B, C узгоджуються за формою), дистрибутивна, тобто

$$(A + B)C = AB + BC\,,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

але не комутативна.

Іноді при розгляді добутку AB кажуть, що це <u>правий добуток</u> A на B, або <u>лівий добуток</u> B на A.

Правий добуток квадратної матриці A на діагональну матрицю D можна одержати, перемножуючи стовпчики матриці A на відповідні елементи головної діагоналі матриці D, наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix},\quad AD = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}.$$

Лівий добуток матриці A на D дістають, перемножуючи рядки матриці A на відповідні елементи діагоналі матриці D:

$$DA = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{11} \\ a_{21}d_{22} & a_{22}d_{22} \end{bmatrix}.$$

Якщо маємо транспоновані матриці A^T і B^T, можна користуватися таким правилом:

$$B^T A^T = (AB)^T \text{ або, навпаки, } (AB)^T = B^T A^T.$$

Добуток блокових матриць

Іноді корисно сконструювати матрицю з елементами, що являють собою матриці, або звести задану матрицю до іншої з елементами, які є підматрицями вихідної матриці, наприклад:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix},\ \text{де}$$

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що таким же чином поділена й матриця B, що має розмір (3 x 3):

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & | & b_{12} & b_{13} \\ - & - & - & - \\ b_{21} & | & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & | & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Суму матриць A і B можна виразити за допомогою підматриць так:

$$A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_3 + B_3 \\ A_2 + B_2 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}.$$

Добуток матриць A і B можливо також виразити за допомогою підматриць:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_3B_2 & A_1B_3 + A_3B_4 \\ A_2B_1 + A_4B_2 & A_2B_3 + A_4B_4 \end{bmatrix}.$$

Взагалі добуток двох матриць можна виразити за допомогою підматриць тільки у тому випадку, коли підматриці, утворені внаслідок поділу, узгоджуються за формою. Число вилучених в A стовпчиків мусить дорівнювати числу вилучених у B рядків за умови, що вихідні матриці A і B узгоджуються за формою. Тоді утвореними підматрицями можна оперувати як і звичайними елементами.

Диференціювання матриць

Припустимо, що A(t) - матриця розміром (m x n), в якої елементи $a_{ij}(t)$ є диференційовними функціями змінної t. Тоді

$$\frac{d}{dt}[A(t)] = \dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}(t)}{dt} & \frac{da_{m2}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Похідна від суми двох матриць дорівнює сумі похідних від цих матриць:

$$\frac{d}{dt}[A(t) + B(t)] = \dot{A}(t) + \dot{B}(t).$$

Похідна від добутку двох матриць утворюється таким же чином, як і похідна від скалярного добутку, за тим винятком, що має зберігатися первісний порядок слідування співмножників добутку, наприклад:

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left[A^3(t)\right] = \dot{A}(t)A^2(t) + A(t)\dot{A}(t)A(t) + A^2(t)\dot{A}(t).$$

Інтегрування матриць

Інтеграл від матриці визначається як матриця, утворена з інтегралів від елементів вихідної матриці.

3. Визначники матриць

Як відомо, поняття ***визначника*** найчастіше застосовують, коли згідно з правилом Крамера розв'язують систему лінійних алгебричних рівнянь, яка у векторно-матричному запису має вигляд

$$A\,x = y,$$

де A - матриця коефіцієнтів, x - вектор-стовпчик з невідомими елементами, y - вектор-стовпчик правих частин системи рівнянь.

Визначник (або детермінант) матриці A (det (A)) - це числова функція, яка розраховується за деякими правилами на основі квадратної таблиці, що складається з коефіцієнтів системи рівнянь:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Табличне зображення визначника за формою збігається з матрицею системи рівнянь, тобто складається з тих же елементів і у тому ж порядку, що й матриця A. Іноді визначник матриці зображується як $|A|$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A розміром (n x n) називається визначник (n - 1)-го порядку, що утворюється викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика. ***Ад'юнктою,*** або ***алгебричним доповненням*** Δ_{ij} елемента a_{ij}, називають його мінор з таким знаком, що визначається за формулою

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad .$$

Визначник $|A|$ матриці A знаходять за допомогою методу Лапласа:

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} .$$

Якщо A і B - квадратні матриці порядку n , визначник добутку цих матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, або

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = |A| \cdot |B| .$$

Властивості визначників

1.Визначник одиничної матриці дорівнює 1.

2. Визначник дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю всі елементи будь-якого стовпчика (або рядка), або однакові чи пропорційні відповідні елементи будь-яких двох рядків (або двох стовпчиків).

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки (або стовпчики), знак визначника зміниться на протилежний, а його величина не зміниться за модулем.

4. Якщо всі елементи рядка (або стовпчика) помножити на число K, визначник множиться на K. Якщо всі елементи матриці A помножити на число K, визначник дорівнюватиме

$$K^{n} \cdot \det A .$$

5. Величина визначника не зміниться, якщо до будь-якого рядка (чи стовпчика) додати помножені на K відповідні елементи другого рядка (стовпчика).

6. Якщо два визначники однакових порядків відрізняються між собою лише елементами i-го стовпчика, їх сума дорівнює визначнику, в якого елементи i-го стовпчика дорівнюють сумі відповідних елементів i-х стовпчиків вихідних визначників, а решта елементів залишається такими ж самими, що й у вихідних визначниках (властивість лінійності).

7. Визначник суми двох матриць дорівнює

$$\det(A+B) = \det A + \sum\Delta(1) + \sum\Delta(2) + \cdots + \sum\Delta(n-1) + \det B ,$$

де $\Delta(s)$ - визначник, який одержують заміною s -х стовпчиків першої матриці відповідними стовпчиками другої матриці.

4. Обернена матриця та її застосування

Розглянемо систему **n** лінійних алгебричних рівнянь з **n** невідомими:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{або } A\,x = y.$$

За методом Крамера невідомі x_i знаходять як частку двох визначників: у знаменнику - головний визначник $|A|$, а у числівнику - визначник, що одержують з головного заміною стовпчика з індексом i даного x_i на стовпчик правих частин

У матричній формі запису це

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{B}\,y, \text{ де}$$

$$B = \frac{1}{|A|} \cdot \left[\Delta_{ji}\right].$$

Матриця $\left[\Delta_{ji}\right]$ називається <u>*приєднаною матрицею*</u> та позначається **Adj A**. Цю матрицю дістають транспонуванням матриці, утвореної заміною елементів матриці A (a_{ij}) їх алгебричними доповненнями:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Підставимо матричне рівняння розв`язків у вихідне рівняння

$$A\,(B\,y) = y = I\;y, \quad \text{а тому} \quad A\,B = I.$$

Якщо підставити у розв`язок вихідне рівняння, одержимо

$$x = B\,(A\,x) = I\,x, \quad \text{а тому} \quad B\,A = I.$$

Таким чином, матриця B, що задовольняє такі умови ($AB = BA = I$), називається ***оберненою матрицею*** щодо матриці A і позначається A^{-1}.

Отже,
$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}, \quad A A^{-1} = A^{-1} A = I.$$

Зазначимо, що матриця A^{-1} (обернена) існує тоді і тільки тоді, коли $\det A = |A| \neq 0$, тобто коли матриця A є *невиродженою,* або *неособливою.* Крім того, умова $\det A \neq 0$ свідчить, що вихідні рівняння є незалежними.

Додаткові властивості оберненої матриці:

$$1) \quad (A^{-1})^{-1} = A; \qquad 2) \quad (A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}.$$

Добуток обернених матриць

Добуток обернених матриць підпорядковується тим же правилам перестановки, як і у добутку транспонованих матриць. Щоб довести це, розглянемо добуток у вигляді

$$C = B\,A.$$

Помножимо обидві частини даного рівняння зліва на $B^{-1}A^{-1}$ і справа на C^{-1}:

$$B^{-1}A^{-1}C\,C^{-1} = B^{-1}A^{-1}A\,B\,C^{-1}.$$

Тоді

$$B^{-1}A^{-1} = C^{-1}, \text{ або } \quad C^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Похідна від оберненої матриці

Для значень часу t , коли матриця A(t) є такою, що її можна диференціювати, а також існує обернена матриця, похідна від $A^{-1}(t)$ визначається таким чином:

$$\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)\right] = -A^{-1}(t)\cdot\dot{A}(t)\cdot A^{-1}(t).$$

Зазначимо, що

$$\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)\right] \neq \left(\frac{dA(t)}{dt}\right)^{-1}.$$

Доповнення. Матриця A називається *інволютивною*, якщо вона збігається з оберненою, тобто

$$A=A^{-1} \quad \text{і} \quad A\cdot A=I.$$

Матриця A називається *ортогональною*, якщо обернена матриця збігається з транспонованою, тобто

$$A^{-1}=A^{T}\ \text{, або}\quad A=(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}\text{, або}\ A\cdot A^{T}=I.$$

З оберненою матрицею тісно пов'язано поняття *рангу матриці.* Ранг визначається за допомогою мінорів матриці. У загальному випадку *мінор порядку* **p** довільної **n x m** матриці **A** - це визначник довільної **p x p** підматриці матриці A.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Якщо **r** - ранг прямокутної матриці **A** розміром **m x n** , то

$$r\le \min(n,m).$$

Зрозуміло, що ранг матриці **n x n** **r** менше **n** тільки у тому випадку, якщо матриця є *особливою,* тобто якщо елементи будь-яких двох (чи більше) рядків (стовпчиків) однакові або пропорційні та не є лінійно незалежними.

5. Вектори і лінійні векторні простори

Поняття *вектори-стовпчики* і *вектори-рядки* є узагальненням понять вектора у дво- або тривимірних просторах на **n**- вимірний простір. Якщо **n** - більше трьох, геометричне зображення втрачає свій сенс, але термінологія, пов'язана із звичними координатними системами, є корисною.

Скалярний добуток

Скалярний (або *внутрішній*) *добуток* двох векторів **x** і **y** позначається **<x,y>** і визначається як

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=(\mathbf{x}^{*})^{T}\mathbf{y}=\mathbf{y}^{T}\mathbf{x}^{*}=x_1^{*}y_1+x_2^{*}y_2+\cdots+x_n^{*}y_n\neq \mathbf{x}^{T}\mathbf{y}^{*}.$$

У цій формулі x_i^{*} - комплексно-спряжені складові, тому що в загальному випадку вектор **x** може мати комплексні складові.

У випадку дійсних **x** і **y** скалярний добуток набуває більш знайомого вигляду:

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \ ,$$

або

$$\mathbf{<x,y>=x^T y=y^T x=<y,x>}.$$

Приклад:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1+j \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 1+j \\ 2j \end{bmatrix}.$$

Тоді скалярний добуток

$$<x,y>=(x^*)y=(1-j)(1+j)+2(2j)=2+4j.$$

Очевидно, що результат не дорівнює $\mathbf{x}^T\mathbf{y}^*=(1+j)(1-j)+2(-2j)=2-4j$, а є комплексно-спряженим.

Зовнішній (двійковий) добуток векторів

Зовнішнім добутком вектора-стовпчика **x** розміром (n x 1) на вектор-стовпчик **y** розміром (m x 1) (у загальному випадку елементи обох векторів можуть бути комплексними величинами) є матриця розміром (n x m) , що має вигляд

$$\mathbf{x} >< \mathbf{y} = \mathbf{x}\,(\mathbf{y}^*)^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1^* & x_1 y_2^* & \cdots & x_1 y_m^* \\ x_2 y_1^* & x_2 y_2^* & \cdots & x_1 y_m^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1^* & x_n y_2^* & \cdots & x_n y_m^* \end{bmatrix}.$$

Ортогональні вектори

Два вектори називаються *ортогональними* , якщо їх скалярний добуток **<x,y>** дорівнює нулю, тобто **<x,y> =0** .

Приклад: $x=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad <x,y> = 0\cdot 2 + 1\cdot 0 = 0.$

Вектори **x** та **y** - ортогональні вектори.

<u>*Довжина вектора*</u>

<u>*Довжин*</u>*а* вектора, або <u>*норма*</u> вектора (позначається як $\|X\|$) - це квадратний корінь із скалярного добутку **x** на **x**, тобто

$$\|X\| = \sqrt{<X,X>} = \sqrt{x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \cdots + x_n^* x_n} .$$

Наслідком цього визначення є такі співвідношення:

нерівність трикутника - $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$.;

нерівність Шварца - $|<X,Y>| \le \|X\| \cdot \|Y\|$.

Одиничний вектор

Одиничним вектором $\hat{X}$ називається такий вектор, довжина якого дорівнює одиниці, тобто $<\hat{X},\hat{X}> = 1$. Одиничний вектор можна одержати з вектора **X** , ділячи кожну його складову на довжину цього вектора:

$$\hat{X} = \frac{X}{\sqrt{<X,X>}} .$$

Лінійна незалежність

Вектори X_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ зі складовими $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ називаються <u>лінійно незалежними</u>, якщо не існує таких сталих $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (хоча б одна з них має бути відмінною від нуля), що

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_m X_m = 0 .$$

З поняттям лінійної незалежності векторів пов'язані деякі важливі визначення.

Квадратна матриця **A** називається <u>*особливою*</u>, якщо її стовпчики чи рядки не є лінійно незалежними. У цьому випадку визначник матриці дорівнює нулю: $(|A| = 0)$. Якщо $|A| \ne 0$, то матриця називається <u>*неособливою*</u>, або <u>*невиродженою*</u>. Таким чином, обернені матриці існують тільки для неособливих (невироджених) матриць.

Якщо рядки (стовпчики) особливої матриці лінійно зв'язані одним співвідношенням, то матриця називається <u>*просто виродженою*</u> , або такою, що має дефект кратності 1 . Якщо рядки (стовпчики) зв'язані між собою більше ніж одним співвідношенням, то матриця називається <u>*багатократно*</u>

виродженою . Якщо існує **q** таких співвідношень, то матриця має дефект (або виродженість) кратності **q** . Квадратна матриця порядку **n** має дефект **q**, якщо всі **q-1** мінори її детермінанта дорівнюють нулю, але хоч один з її **q**-х мінорів відмінний від нуля. Ранг матриці у цьому випадку дорівнює

$$r = n - q \ .$$

Правило виродженості Сільвестра. Дефект добутку двох матриць не менше дефекту кожної з матриць і не вище суми дефектів матриць.

Повертаючись до умови лінійної незалежності векторів X_i (i=1,2,..., m), очевидно, що її можна визначити на основі рангу матриці, утвореної з елементів **m** векторів X_i $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ (i=1,2,..., m ; m≤n). Ця матриця має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}.$$

Якщо ранг матриці А, складеної з тих **m** векторів, менше ніж **m**, тобто r < m , то існує лише **r** лінійно незалежних векторів з даної множини. Решту m-r векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації цих **r** векторів. Отже, необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності вказаних векторів є рівність рангу матриці А величині **m**.

Множина векторів називається *лінійним векторним простором* , якщо для будь-яких двох векторів визначена операція додавання і для будь-якого вектора - операція множення на число. Найпростішим прикладом лінійного векторного простору є множина векторів, що належать тривимірному просторові.

Якщо система векторів $X_1, X_2, \ldots, X_m$ належить простору **S** , то і множина векторів Y, що є лінійною комбінацією цих векторів,–

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_m X_m \ ,$$

утворює векторний простір. *Вимірність* цього простору дорівнює максимальному числу його лінійно незалежних векторів.

Якщо тільки r векторів X_i(i = 1,2, ... , m) є лінійно незалежними, то вимірність простору, який можна утворити цими векторами, дорівнює **r**, тобто рангу системи векторів X_i .

Приклад: Розглянемо вектори

$$X_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T, \qquad X_2 = [0 \;\; 1 \;\; 1]^T, \quad X_3 = [1 \;\; 2 \;\; 1]^T .$$

Ці вектори є лінійно залежними, тому що $X_1 + X_2 = X_3$. Ранг матриці , створеної з цих векторів, дорівнює двом. Тому вимірність простору, утвореного цими векторами, теж дорівнює двом.

У n-вимірному просторі n складових вектора Y можуть вибиратися незалежно у тому випадку, якщо вектор Y утворюється системою векторів, що мають ранг n . Тоді систему n лінійно незалежних векторів називають також *лінійною оболонкою*. Вказані n лінійно незалежних векторів можна використати і як базис простору. *Базисом* простору називається така система векторів, що будь-який вектор простору виражається *єдиним чином* у вигляді лінійної комбінації цих векторів (базисних векторів). Базис є по суті системою координат.

Якщо задано складові вектора Y, то необхідно визначати базис або систему координат, відносно якої вказані ці складові. Наприклад, розташування точки у тривімірному просторі може задаватися у прямокутній системі координат, циліндричній системі координат, сферичній системі координат і т. ін . Твердження, що Y має складові 1, 0, 2 , тобто

$$Y = [1 \;\; 0 \;\; 2]^T ,$$

не має сенсу, якщо не визначено також і базис.

6. Власні значення матриць і власні вектори

Розглянемо векторне рівняння

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} ,$$

де **x** та **y** - вектори-стовпчики, а A - квадратна матриця порядку (n x n). Це рівняння можна трактувати як перетворення вектора **x** у вектор **y**.

Виникає питання , чи існує такий вектор **x** , який за результатом перетворення A переходить у вектор **y** , що має той же напрямок у векторному просторі, що й вектор **x** . Якщо такий вектор існує, то **y** пропорційний **x**, або

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} , \qquad (6.1)$$

де λ - скаляр, що є коефіцієнтом пропорційності.

Значення λ_i , для якого рівняння (6.1) має розв'язок $\mathbf{x}_i \neq 0$, називається *власним значенням* матриці A . Відповідний вектор розв'язку $\mathbf{x} \neq 0$ називається *власним вектором* матриці A, що породжений даним власним значенням λ_i.

Рівняння (6.1) можна записати у вигляді системи однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0. \end{aligned}$$

Цю систему рівнянь можна записати у матричному вигляді:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0\text{, або }(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0. \qquad (6.2)$$

Така система однорідних рівнянь має розв'язок, що не дорівнює нулю, тільки у тому випадку, якщо визначник матриці $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, що називається *характеристичною матрицею*, дорівнює нулю, тобто

$$\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0. \qquad (6.3)$$

Багаточлен n-го степеня відносно λ, що одержується з цього співвідношення, називається *характеристичним рівнянням* матриці A.

Загальний вигляд цього рівняння такий:

$$P(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0.$$

Корені λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) цього рівняння є *власними значеннями*, або *характеристичними числами* матриці A. Характеристичні числа можуть бути відмінними, кратними, комплексно-спряженими.

Якщо багаточлен $P(\lambda)$ записати у вигляді добутку множників (характеристичні числа припускаємо різними), тобто

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\dots(\lambda - \lambda_n),$$

і прийняти $\lambda = 0$, то $P(0) = (-1)^n(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n) = b_n$. Водночас з рівняння (6.3) при $\lambda=0$ дістанемо $b_n = (-1)^n \cdot \det A$. Отже,

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A,$$

тобто *добуток власних значень матриці дорівнює її визначнику* . Ця властивість може бути використана для перевірки значень коренів характеристичного рівняння, одержаних чисельним методом . Звернемо увагу на те, що у випадку , коли будь-яке власне значення дорівнює нулю, матриця A - особлива. .

З характеристичного рівняння можна знайти, що коефіцієнт при λ^{n-1} дорівнює

$$b_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m),$$

і водночас з визначника $|\lambda I - A|$ дістати

$$b_1 = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) .$$

Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} ,$$

тобто сума діагональних елементів квадратної матриці дорівнює сумі її власних значень.

Враховуючи важливу властивість цієї суми , їй надали особливе найменування - *слід матриці*, який має свою власну позначку:

Tr A , або **Sp A** .

Корисним прикладом застосування поняття "слід матриці" є чисельний алгоритм одержання коефіцієнтів характеристичного полінома, який зручно реалізувати, маючи ЕОМ. Справа у тому, що безпосереднє розкриття визначника характеристичної матриці det(λI - A) при значних n може бути досить складним, тому використання ЕОМ прискорить розв'язання задачі та позбавить можливих помилок, притаманних при обчислюваннях вручну.

Якщо позначити слід матриці A^k (тобто матриці, одержаної множенням матриці A k разів саму на себе) через T_k , можна записати такі формули для обчислення коефіцієнтів характеристичного полінома:

$$b_1 = -T_1 ,$$

$$b_2 = -(b_1 T_1 + T_2), ,$$

$$b_3 = -\frac{1}{3}(b_2 T_1 + b_1 T_2 + T_3) ,$$

....

$$b_n = -\frac{1}{n}(b_{n-1} T_1 + b_{n-2} T_2 + \cdots + b_1 T_{n-1} + T_n) .$$

Властивості характеристичних чисел матриць мають особливу вагу, коли досліджують динамічні системи, характеристики яких наведено у вигляді диференціальних рівнянь стану, а саме

$$\dot{X} = AX \quad ,$$

де A - матриця стану, X - вектор стану. У цьому випадку корені характеристичного полінома $\det(\lambda I - A) = 0$ визначають стійкість системи. Окрім того, характеристичні числа, якщо вони різні та дійсні, є фактично спряженими частотами. Повний набір власних значень $\lambda_i; i = \overline{1, n}$ іноді називають *спектром матриці*.

Для кожного з n власних значень λ_i (i = 1, 2, ... , n) матриці A (вважається, що λ - різні) можна дістати розв'язки рівняння $(\lambda_i I - A)x_i = 0$ відносно $\mathbf{x}_i$.

Вектори $\mathbf{x}_i$ є *власними векторами* матриці A . Оскільки маємо справу з системою однорідних рівнянь, добуток $\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i$ (де $\mathbf{k}_i$ - скаляр) також служить розв'язком. Тому рівняння $(\lambda I - A)x_i = 0$ визначає однозначно лише напрямок кожного з $\mathbf{x}_i$.

Метод, що базується на розв'язанні наведеного вище рівняння, є основним методом визначення власних векторів, але у деяких випадках їх можна знайти , користуючись характеристичною матрицею $\lambda I - A$ [1]:

$$x_i = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_i) \\ \Delta_{12}(\lambda_i) \\ \dots \\ \Delta_{1n}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

де $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots, \Delta_{1n}$ - алгебричні доповнення елементів першого рядка характеристичної матриці.

Матриця, утворена векторами-стовпчиками $\mathbf{k}_i \mathbf{x}_i$, називається *модальною матрицею* і позначається M.

Припустимо, що матриця M - неособлива, тобто існує обернена матриця M^{-1}. Тоді квадратна матриця A може бути зображена у вигляді

$$A = M\Lambda M^{-1} \, ,$$

де у випадку, коли власні значення різні, $\Lambda = diag\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ - діагональна матриця з власними значеннями на головній діагоналі.

Таке зображення має назву *спектрального розвинення* матриці A.

Водночас можна записати

$$M^{-1}AM = \Lambda.$$

Така операція називається *діагоналізацією* квадратної матриці А.

Більш високі степені матриці А можна дістати аналогічним чином:

$$A^p = M\Lambda^p M^{-1},$$

що випливає з

$$\Lambda^p = (M^{-1}AM)(M^{-1}AM)\cdots(M^{-1}AM) = M^{-1}A^p M .$$

Корисно мати на увазі такі властивості власних значень (характеристичних чисел):

якщо матриця А має власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то

матриця A^m має власні значення $\lambda_1^m, \lambda_2^m, ..., \lambda_n^m$,

матриця A^{-1} має власні значення $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, ..., 1/\lambda_n$,

матриця A^T має власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$,

матриця кА має власні значення $k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_n$.

Наведене вище співвідношення $\Lambda = M^{-1}AM$ є одиничним випадком *перетворення подібності*. Матриця В *подібна* матриці А, якщо має такі ж самі власні значення, як матриця А. Матриця В може бути одержана за допомогою будь-якої неособливої матриці Н та операції перетворення подібності $B = H^{-1}AH$.

7. Функції від матриць та методи їх обчислення

Теорія матриць є ефективним засобом дослідження динамічних систем, властивості яких відображені лінійними диференціальними рівняннями у матрично-векторному вигляді

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad ,$$

де X - вектор стану системи, А - матриця стану розміром (n x n), В - матриця входу розміром (n x r), U - вектор зовнішніх впливів розміром (r x 1). Якщо прийняти U(t)=0, то розв'язок наведеного рівняння буде таким:

$$X(t) = \exp(At)\, X(0),$$

де X(0) - вектор стану у момент часу t=0.

Експоненціальна функція e^{At}, що називається *перехідною матрицею стану*, або *фундаментальною матрицею*, є матрицею розміром (n x n).

Ця матриця відіграє дуже важливу роль не тільки для одержання розв'язку однорідного диференціального рівняння стану, але й для дослідження реакції лінійної динамічної системи на будь-яке зовнішнє діяння.

Взагалі експоненціальну функцію від будь-якої квадратної матриці X можна зобразити у вигляді збіжного ряду

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{X^s}{s!}.$$

Тому , аналогічно,

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s t^s}{s!}.$$

Доведено, що цей ряд збігається рівномірно та абсолютно.

Диференціювання експоненціальної функції від матриці виконується за звичайним правилом

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

Треба мати на увазі, що взагалі $e^X e^Y \neq e^Y e^X$, причому співвідношення $e^X e^Y = e^{X+Y}$ має сенс тільки у випадках, коли X та Y - переставні матриці. За допомогою експоненціальної функції можна одержати також й інші функції від матриць:

$$\sin X = \frac{1}{2i}(e^{iX} - e^{-iX}); \qquad \cos X = \frac{1}{2}(e^{iX} + e^{-iX});$$

$$\operatorname{sh} X = \frac{1}{2}(e^{X} - e^{-X}); \qquad \operatorname{ch} X = \frac{1}{2}(e^{X} + e^{-X});$$

$$e^{iX} = \cos X + i \cdot \sin X; \qquad e^{-X} = \cos X - i \cdot \sin X.$$

На основі операції перетворення подібності матриця A з різними власними значеннями може бути зведена до діагональної форми. Отже, з урахуванням того, що експоненціальна функція від діагональної матриці визначається досить просто, для визначення матричної функції e^{At} зручно скористатися співвідношенням

$$e^{At} = M \cdot \exp(\Lambda t) \cdot M^{-1} = M \cdot diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \cdot M^{-1},$$

де M - модальна матриця. Ця формула є окремим випадком загального визначення функції від матриці (якщо вона має різні власні значення):

$$F(A) = MF(\Lambda)M^{-1} = M \begin{bmatrix} F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F(\lambda_n) \end{bmatrix} . M^{-1}.$$

Для знаходження функції F(A), що являє собою матричний багаточлен від матриці A, в якої власні значення різні, можна скористатися теоремою Сільвестра

$$F(A)=\sum_{i=1}^{n} F(\lambda_i)\frac{\prod_{j=1,i\neq j}^{n}(A-\lambda_j I)}{\prod_{j=1,i\neq j}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)},$$

а також теоремою і методом Келі-Гамільтона, які розглянемо окремо.

8.Теорема та метод Келі-Гамільтона

Ця теорема базується на вказаній вище залежності $A^p = M\Lambda M^{-1}$, що дозволяє одержати корисне співвідношення. Якщо $N(\lambda)$ - багаточлен від λ у вигляді

$$N(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

то відповідний багаточлен зі змінною A дорівнює

$$N(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_{n-1}A + c_n I.$$

Якщо вибраний багаточлен є характеристичним багаточленом, тобто $N(\lambda) = P(\lambda)$, то $N(\lambda_1)=N(\lambda_2)= ... =N(\lambda_n)=0$.Звідси випливає

$$P(A) = [0], \text{ де } P(\lambda) = |\lambda I - A|.$$

Одержаний результат відомий як <u>*теорема Келі-Гамільтона*</u> .Вона стверджує, що кожна квадратна матриця порядку **n** задовольняє свій характеристичний поліном.

Ця теорема дозволяє знаходити різноманітні функції від матриці A, у тому числі й обернену матрицю.

Одержати функцію від матриці можна за допомогою <u>*методу Келі-Гамільтона*</u>, що походить від теореми відповідної назви.

Припустимо, що маємо випадок, коли степінь матричного багаточлена N(A) є вищим, ніж порядок матриці A.

Розділимо відповідний багаточлен $N(\lambda)$ на характеристичний поліном матриці $P(\lambda)$. Маємо:

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)},$$ де $R(\lambda)$ - залишковий член, степінь якого **n-1**

(якщо степінь $P(\lambda)$ дорівнює **n**). Перепишемо цей вираз у вигляді

$$N(\lambda) = Q(\lambda)\cdot P(\lambda) + R(\lambda).$$

Завдяки тому, що $P(\lambda)=0$,

$$N(\lambda) = R(\lambda).$$

Відповідно до теореми Келі-Гамільтона $P(A) = [0]$, і тому

$$N(A) = R(A).$$

Цей метод зручний для поліноміальних функцій від матриць.

Приклад: Маємо $N(A)=A^4+A^3+A^2+A+1$, $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$,

$$N(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 .$$

Характеристичний поліном матриці A дорівнює $\lambda^2+3\lambda+2=0$. Тоді

$$\frac{\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2+3\lambda+2}=\lambda^2-2\lambda+5+\frac{-10\lambda-9}{\lambda^2+3\lambda+2} .$$

Залишковий член $R(\lambda)=-10\lambda-9$, і тому $N(A)=R(A)=-10A-9I$.

Метод Келі-Гамільтона можна використати для відшукання матричної функції $F(A)$, для якої $F(\lambda)$ є аналітичною функцією в околі початку координат і може бути зображений у вигляді нескінченного збіжного ряду відносно λ .

І в цьому випадку $F(\lambda)=Q(\lambda)\cdot P(\lambda)+R(\lambda)$, де $P(\lambda)=0$, а

$$R(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+...+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} .$$

Отже, відповідно до теореми Келі-Гамільтона

$$F(A)=R(A) ,$$

де $R(A)$ - багаточлен від A степеня **n-1** .

Якщо матриця A має різні характеристичні числа, невідомі коефіцієнти $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{n-1}$ можна знайти шляхом послідовної підстановки $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ у рівняння $F(\lambda)=R(\lambda)$. Утворюється система **n** лінійних рівнянь відносно **n** невідомих коефіцієнтів α_i :

$$F(\lambda_1)=R(\lambda_1);$$
$$F(\lambda_2)=R(\lambda_2);$$
$$..................... ;$$
$$F(\lambda_n)=R(\lambda_n).$$

Приклад: Знайти $F(A)=e^{At}$, якщо $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$.

Як відомо з попередніх прикладів, характеристичні числа цієї матриці дорівнюють: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Матриця A має порядок 2, тому багаточлен $R(\lambda)$ першого порядку $R(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda$. Треба знайти два коефіцієнти. Складемо відповідні рівняння:

$$F(\lambda_1)=R(\lambda_1),\ \ F(\lambda_2)=R(\lambda_2),$$

або

$$\begin{cases} e^{-t}=\alpha_0-\alpha_1, \\ e^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1. \end{cases}$$

Розв'язок цих двох рівнянь такий: $\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$, $\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$.
Тоді

$$F(A)=e^{At}=\alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

Трапляються випадки, коли матриця А має кратні характеристичні числа. Тому, якщо А містить характеристичне число λ_i порядку **s**, то за результатом підстановки λ_i у рівняння $F(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ одержимо лише одне лінійно незалежне рівняння замість **s** рівнянь. Решту **s-1** лінійних рівнянь, які потрібні для знаходження коефіцієнтів α_i, дістанемо диференціюванням обох частин рівняння $F(\lambda) = R(\lambda)$:

$$\left.\frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_i}, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1 .$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. В.П. Сигорский. Математический аппарат инженера. - Киев: Техніка,1975. - 768 с.

2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов.- М.: Энергоатомиздат, 1987. - 496 с.

3. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). - М.: Наука, 1970. - 620 с.

4. Современная математика для инженеров /Под ред. Э.Ф.Беккенбаха. - М.: ИЛ, 1958. - 500 с.

5. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления /Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1990. - 332 с.

6. Енциклопедія кібернетики: В 2 т. - К.: АН УРСР, 1973.Т. 1. – 583 с.; Т. 2. – 572 с.

ЗМІСТ

Вступ ____ 3

1.Матриці ____ 3

2.Операції з матрицями ____ 6

3.Визначники матриць ____ 10

4.Обернена матриця та її застосування ____ 12

5.Вектори та лінійні векторні простори ____ 14

6.Власні значення матриць і власні вектори ____ 18

7.Функції від матриць та методи їх обчислення ____ 22

8. Теорема та метод Келі - Гамільтона ____ 24

Список використаної та рекомендованої літератури ____ 26

Тихевич Олег Феофанович

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план,2000
Підписано до друку 04.10.2000
Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Умовн.-друк. арк. 1,5. Облік-вид. арк 1,75. Т. 100 прим.
Замовлення 145 Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні "ХАІ"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17