

514
Ж650

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського

“Харківський авіаційний інститут”

Л.В. Желдакова, П.Т. Коцавець, О.Г. Ушакова

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

Навчальний посібник

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0184004

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА
БІБЛІОТЕКА
Національного аерокосмічного
університету ім. М.Є.Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Харків «ХАІ» 2001

УДК 517.91(075.8)

Теорія стійкості / Л.В. Желдакова, П.Т. Кошавець, О.Г. Ушакова. –
Навч. посібник. - Харків: Нац. аерокосмічний ун-т “Харк. авіац. ін-т”,
2001. – 41 с.

Наведено основні поняття та визначення теорії стійкості за
Ляпуновим: поняття стійкості, асимптотичної стійкості,
нестійкості. Досліджено стійкість розв'язків автономної системи,
стійкість розв'язків системи диференціальних рівнянь. Подано
класифікацію типів точок спокою для системи двох рівнянь.
Розглянуто приклади розв'язання задач, проведено дослідження
стійкості положення рівноваги та стійкості точки спокою розв'язку
диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь.
Наведено задачі для самостійної роботи.

Для студентів усіх спеціальностей.

Лл. 27. Бібліогр.: 4 назви

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук Т.О. Ахієзер,
 канд. фіз.-мат. наук, доц. В. А. Афанасьєв



© Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”, 2001 р.

Теорія стійкості, засновниками якої є великий російський вчений А.М. Ляпунов і великий французький вчений А. Пуанкаре, - важливий розділ прикладної математики. Сучасну теорію стійкості створили російські вчені М.Г. Четаєв, Є.О. Барабашин, М.П. Єругін, М.М. Красовський.

§1. Поняття стійкості. Асимптотична стійкість.

Нестійкість за Ляпуновим

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь у векторному вигляді

$$\dot{\bar{x}}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \quad (1)$$

з початковими умовами

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad (2)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ - n -вимірний вектор;

$t \in [t_0, \infty)$ - незалежна змінна, за якою проводиться диференціювання;

$\bar{f}(t, \bar{x}) = (\bar{f}_1(t, \bar{x}), \bar{f}_2(t, \bar{x}), \bar{f}_3(t, \bar{x}), \dots, \bar{f}_n(t, \bar{x}))$ - n -вимірна вектор-функція.

Зуваження до задачі Коші

Для спрощення цієї задачі її спочатку трактують як задачу Коші для скалярного диференціального рівняння першого порядку

$$x' = f(t, x)$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$.

Для спрощення всі рисунки параграфа 1, якщо немає окремих уточнень, даються для випадку $n=1$.

У зв'язку з тим, що задача теорії стійкості виникла вперше в механіці, то змінну t інтерпретують як час, вектор-функцію $\bar{x}(t)$ – як рух точки залежно від часу в просторі R^{n+1} (рис. 1).

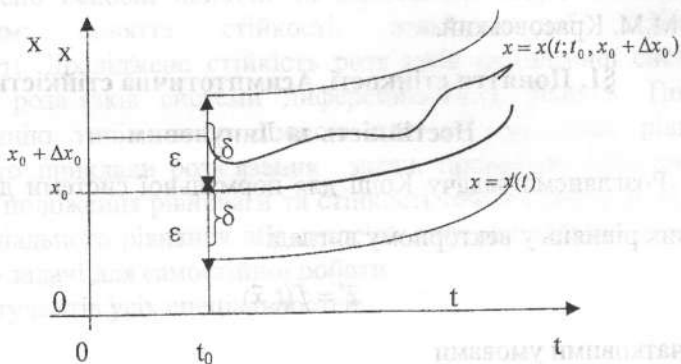


Рис. 1

Нехай задача Коші (1), (2) задовольняє умови теореми існування та єдиності, тоді через кожену точку (t_0, \bar{x}_0) області єдиності розв'язків проходить тільки одна інтегральна крива. Якщо початкові дані (t_0, \bar{x}_0) змінюються, то змінюється й розв'язок. Той факт, що розв'язок залежить від початкових умов, визначається таким чином: $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$. Як же зміниться розв'язок $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$ при зміні початкових умов (t_0, \bar{x}_0) ?

Це питання має велике як теоретичне, так і прикладне значення. Дійсно, якщо математичною моделлю будь-якого процесу є задача Коші (1), (2) і малі зміни початкових даних (t_0, \bar{x}_0) призводять до істотних змін розв'язку $\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$, тоді такою моделлю немож-

ливо користуватися, тому що початкові умови (t_0, \bar{x}_0) одержують із досліджень, а виміри не можуть бути абсолютно точними. Зрозуміло, що як математична модель дійсна тільки та задача Коші, яка стійка до малих змін початкових умов.

Визначимо поняття стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості у розумінні Ляпунова. З цією метою відхилення розв'язку $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$, спричинене відхиленням $\Delta \bar{x}_0$ початкового значення \bar{x}_0 , запишемо таким чином:

$$|\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0) - \bar{x}(t)| = |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0) - \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)|.$$

Визначення 1. Розв'язок $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$ системи (1) називається стійким за Ляпуновим у позитивному напрямку (або стійким), якщо він неперервний за \bar{x}_0 на проміжку $I = [t_0, \infty)$, тобто $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ таке, що $\forall \Delta \bar{x}_0, \forall t > t_0$, як тільки $|\Delta \bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$. Якщо, крім цього, відхилення розв'язку $\bar{x}(t)$ збігається до нуля при $t \rightarrow \infty$ для досить малих $\Delta \bar{x}_0$, тобто $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall \Delta \bar{x}_0, \forall t > t_0$, як тільки

$$|\Delta \bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

то розв'язок $\bar{x}(t)$ системи (1) називається асимптотично стійким у позитивному напрямку (або асимптотично стійким).

Так само визначаються й різні типи стійкості розв'язків в негативному напрямку.

Зауваження до визначення 1.

1. Геометрично стійкість за Ляпуновим розв'язку $\bar{x}(t)$ можна інтерпретувати таким чином (рис. 1): всі розв'язки $\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_0)$ близькі в початковий момент t_0 до розв'язку $\bar{x}(t)$ (тобто ті, які починаються в межах δ -трубки і не виходять за межі ε -трубки при всіх значеннях $t \geq t_0$).

2. Асимптотична стійкість – це стійкість з додатковими умовами:

- кожний розв'язок $\bar{x}_1(t)$, який починається в момент t_0 в Δ -трубці, із спливанням часу необмежено наближається до розв'язку $\bar{x}(t)$ (рис. 2);

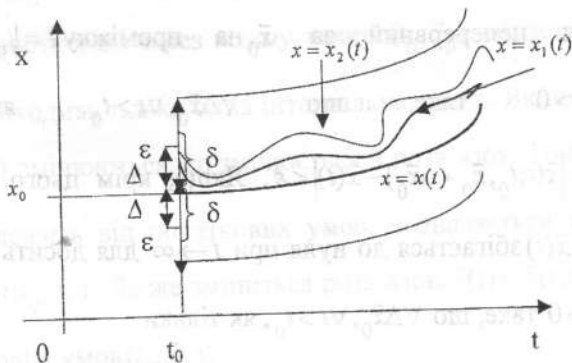


Рис. 2

- розв'язок $\bar{x}_2(t)$, який починається при $t = t_0$ за межами області притягання, але в межах δ -трубки, не виходить за межі ε -трубки, хоча може і не наближатися до розв'язку $\bar{x}(t)$.

Трубка радіусом Δ називається областю притягання розв'язку $\bar{x}(t)$.

Визначення 2. Розв'язок $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)$ системи (1) називається нестійким за Ляпуновим у позитивному напрямку (або нестійким), якщо він не є стійким у позитивному напрямку.

Так само визначається нестійкість і в негативному напрямку.

Зауваження до визначення 2.

Геометрично нестійкість за Ляпуновим означає, що серед розв'язків, близьких у початковий момент t_0 до розв'язку $\bar{x}(t)$, знайдеться хоча б один, який в деякий момент t_1 (свій для кожного такого розв'язку) вийде за межі ϵ -трубки (рис. 3).

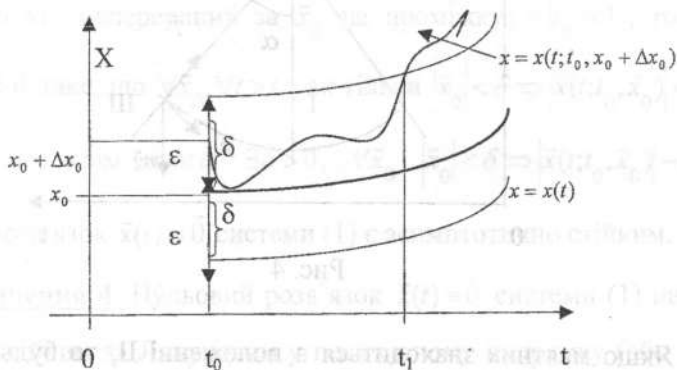


Рис. 3

Наведемо приклади із механіки, які ілюструють визначення типів стійкості для одновимірних випадків, тобто $n=1$. Розглянемо маятник, який є точковою масою m , закріпленою на невагомому стержні довжиною l (рис. 4). Якщо маятник відхилити від положення рівноваги I на кут α , то, як відомо із досвіду, він буде нама-

гтися зайняти положення I. Якщо знехтувати опором навколишнього середовища, то маятник коливатиметься навколо положення I як завгодно довго з амплітудою, що дорівнює початковому відхиленню. Це модель стійкого положення рівноваги. Якщо врахувати опір навколишнього середовища, то амплітуда коливань маятника буде зменшуватися, і з часом він займе положення I. Це модель асимптотично стійкого положення рівноваги.

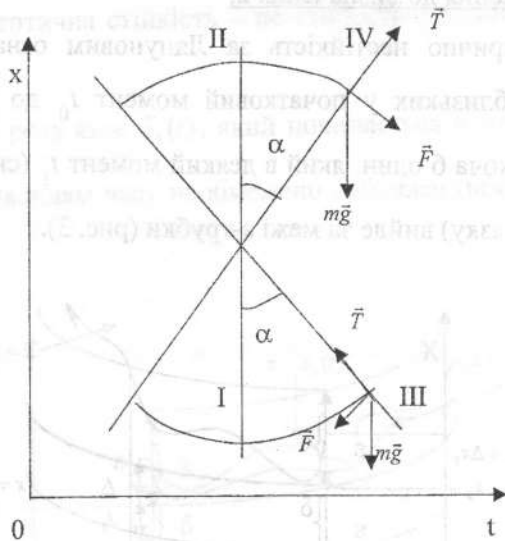


Рис. 4

Якщо маятник знаходиться в положенні II, то будь-яке його відхилення призведе до неможливості повернення в положення II. Це модель нестійкого положення рівноваги.

Дослідження стійкості довільного розв'язку $\bar{x}(t)$ системи (1) завжди можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку деякої перетвореної системи. Дійсно, в системі (1) зробимо підстановку $\bar{y}(t) = \bar{x} - \bar{x}(t)$. Тоді одержимо систему

$$\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}), \quad (4)$$

де $\bar{F}(t, \bar{y}) = \bar{f}(t, \bar{y}(t) + \bar{x}(t)) - \bar{f}(t, \bar{x}(t))$, $\bar{F}(t, \bar{0}) \equiv \bar{0}$, $\forall t \geq t_0$.

Розв'язку $\bar{x}(t)$ системи (1) відповідає нульовий розв'язок $\bar{y}(t) = 0$ системи (4).

Надалі будемо припускати, що система (1) має нульовий розв'язок, тобто $\bar{f}(t, 0) = 0 \quad \forall t > t_0$, та обмежимося дослідженням стійкості нульового розв'язку.

Переформулюємо визначення різних типів стійкості для нульового розв'язку $\bar{x}(t) = 0$ системи (1).

Визначення 3. Нульовий розв'язок $\bar{x}(t) \equiv \bar{0}$ системи (1) називається стійким за Ляпуновим у позитивному напрямку (або стійким), якщо він неперервний за \bar{x}_0 на проміжку $I = [t_0, \infty)$, тобто $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ таке, що $\forall \bar{x}_0, \forall t > t_0$, як тільки $|\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon$, $t \rightarrow \infty$. Якщо, крім цього, $\exists \delta > 0, \forall \bar{x}_0, |\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, то розв'язок $\bar{x}(t) \equiv \bar{0}$ системи (1) є асимптотично стійким.

Визначення 4. Нульовий розв'язок $\bar{x}(t) \equiv \bar{0}$ системи (1) називається нестійким за Ляпуновим у позитивному напрямку (або нестійким), якщо він не є стійким у позитивному напрямку, тобто

$$\exists \varepsilon > 0, \exists t_1 > t_0, \delta > 0, \bar{x}_0 \neq \bar{0}, |\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t; t_0, \bar{x}_0)| > \varepsilon.$$

Геометрична інтерпретація стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості нульового розв'язку $\bar{x}(t) \equiv \bar{0}$ системи (1) дана відповідно на рис. 5 – 7.

Наведемо приклади дослідження стійкості у випадку $n=1$, тобто для скалярного рівняння (1).

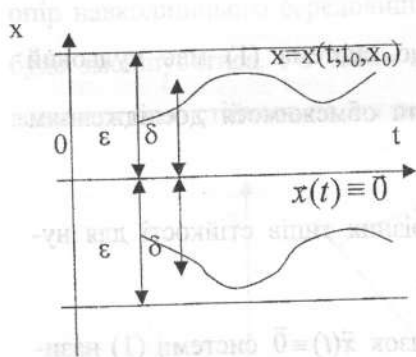


Рис. 5

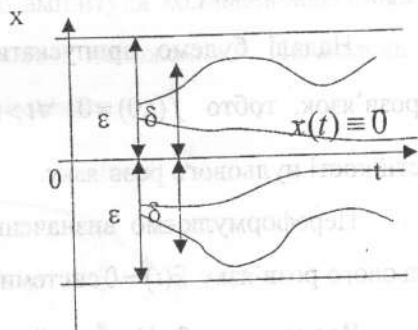


Рис. 6

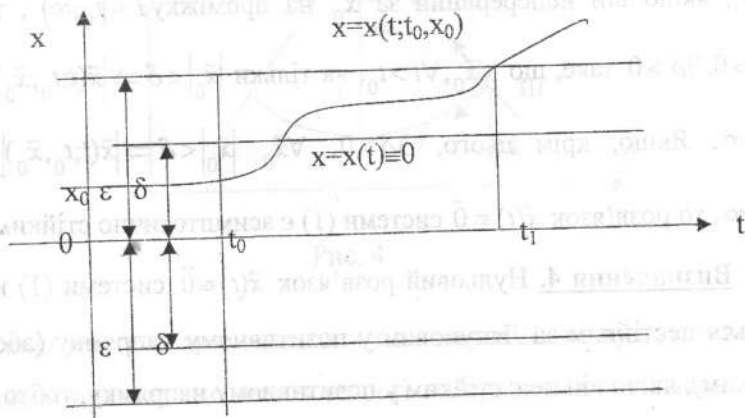


Рис. 7

Приклад 1. Провести дослідження на стійкість розв'язку зада-

чі $\frac{dx}{dt} = 2+t, x(0) = 1$.

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд

$$x = t^2/2 + 2t + C.$$

Задовольнивши початкову умову, одержимо розв'язок задачі Коші

$x = t^2/2 + 2t + 1$. Відомо, що розв'язок $\bar{x}(t)$ рівняння (1) має той же

тип стійкості, що й нульовий розв'язок рівняння (4). Проведемо за-

міну $y(t) = x - \bar{x}(t)$. Тоді $x = y(t) + \bar{x}(t) = y(t) + t^2/2 + 2t + 1$. Підставимо

одержаний розв'язок у рівняння $y' + t + 2 = 2 + t$, звідки $y' = 0$.

Останнє рівняння має загальний розв'язок $y(t) = C$. Початковій

умові $y(0) = 0$ відповідає нульовий розв'язок $y(t) = 0$. Іншій почат-

ковій умові - $y(0) = y_0$ - відповідає розв'язок $y(t) = y_0$ (рис. 8). Лег-

ко довести, що $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що

$|y_0| < \delta \Rightarrow |y(t)| < \varepsilon, \forall t > 0$. Таким чином, нульовий розв'язок $y(t) = 0$

- стійкий, а тому стійкий і розв'язок задачі Коші $x(t) = t^2/2 + 2t + 1$.

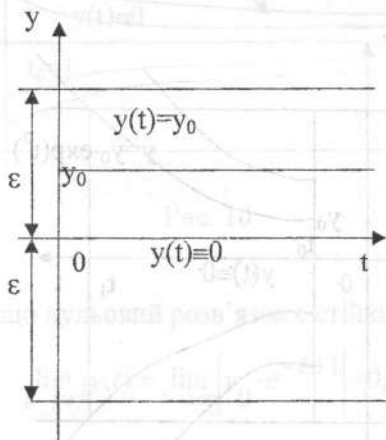


Рис. 8

Приклад 2. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = 2t(x+1), \quad x(0)=0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$x = C \cdot \exp(t^2) - 1.$$

Задовольнивши початкову умову, дістанемо розв'язок задачі Коші $x = e^{t^2} - 1$. За допомогою заміни $x = y(t) + e^{t^2} - 1$ наше рівняння перетворюється у таке: $y' = 2ty$ з загальним розв'язком $y(t) = C \cdot e^{t^2}$. Початковій умові $y(0) = 0$ відповідає нульовий розв'язок $y(t) = 0$. Іншій початковій умові - $y(0) = y_0$ - відповідає розв'язок $y(t) = y_0 \cdot e^{t^2}$ (рис. 9). Нульовий розв'язок $y(t) = 0$ - нестійкий, а тому нестійкий і розв'язок задачі Коші $x(t) = e^{t^2} - 1$.

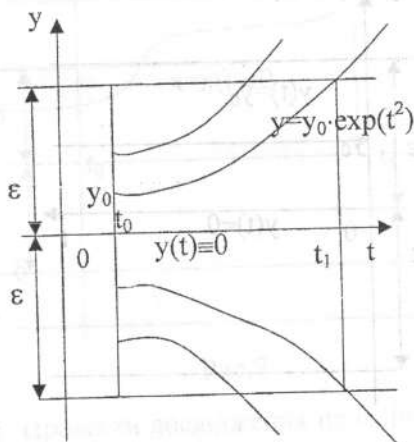


Рис. 9

Приклад 3. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$x = C \cdot e^{-t} + t^2 - 2t + 2.$$

Відповідний частинний розв'язок $x = t^2 - 2t + 2$. За допомогою заміни $x = y(t) + t^2 - 2t + 2$ наше рівняння перетворюється у таке: $y' = -y$ з загальним розв'язком $y(t) = C \cdot e^{-t}$. Початковій умові $y(1) = 0$ відповідає нульовий розв'язок $y(t) \equiv 0$. Іншій початковій умові $y(0) = y_0$ - відповідає розв'язок $y(t) = y_0 \cdot e^{-t+1}$ (рис. 10).

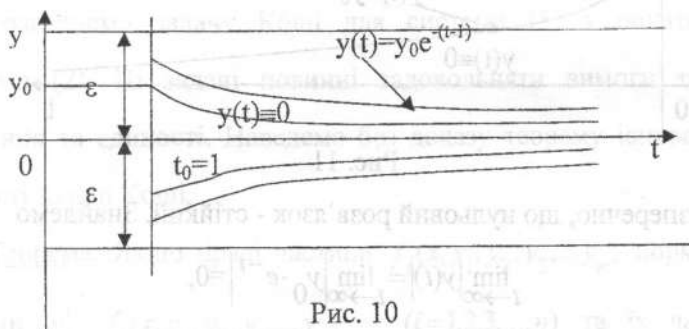


Рис. 10

Безперечно, що нульовий розв'язок є стійким. Знайдемо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y_0 \cdot e^{-t+1}| = 0,$$

тобто нульовий розв'язок $y(t) = 0$ є асимптотично стійким, і зрозуміло, що розв'язок нашої задачі $x = t^2 - 2t + 2$ також є асимптотично стійким.

Приклад 4. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x, \quad x(0) = 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$x = C \cdot e^{-t} + 1$. Відповідний частинний розв'язок - $x \equiv 1$. За допомогою заміни $x = y(t) + 1$ наше рівняння перетворюється у таке:

$y' = -y$ з загальним розв'язком $y(t) = C \cdot e^{-t}$. Початковій умові $y(0) = 0$ відповідає нульовий розв'язок $y(t) \equiv 0$. Іншій початковій умові - $y(0) = y_0$ - відповідає розв'язок $y(t) = y_0 \cdot e^{-t}$ (рис. 11).

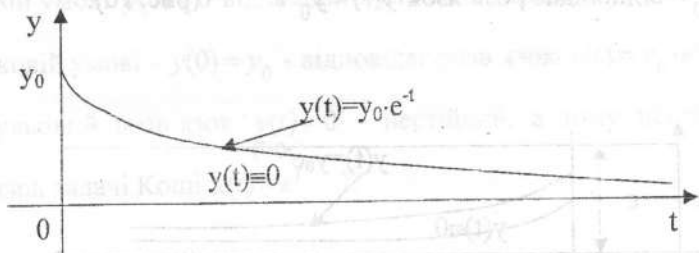


Рис. 11

Безперечно, що нульовий розв'язок - стійкий. Знайдемо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y_0 \cdot e^{-t}| = 0,$$

тобто нульовий розв'язок $y(t) \equiv 0$ є асимптотично стійким, і зрозуміло, що розв'язок нашої задачі $x = 1$ також є асимптотично стійким.

Вправи для самостійної роботи

Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

1) $x' = t(x - 1)$, $x(0) = 1$;

2) $x' = t - 1$, $x(0) = -1$;

3) $x' = t - x$, $x(0) = 1$;

4) $x' = 10x$, $x(1) = 1$.

§2. Стійкість розв'язків автономної системи.

Стійкість розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Система звичайних диференціальних рівнянь називається автономною (стаціонарною, консервативною, динамічною), якщо незалежна змінна не входить в систему рівнянь у явному вигляді.

Нормальна автономна система n -го порядку у векторній формі має вигляд

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (5)$$

Розглянемо задачу Коші для системи (5) з початковими умовами (2). Ці задачі повинні задовольняти вимоги теореми існування та єдиності. Наведемо без доказу теорему існування та єдиності задачі Коші.

Теорема. Якщо праві частини $f_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ нормальної системи $y_i' = f_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) та їх частинні похідні за змінними $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ визначені та неперервні на відкритій множині $D \subset R^{n+1}$ змінних x, y_1, y_2, \dots, y_n , то $\forall |x - x_0| < \delta$

існує неперервний розв'язок $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ задачі Коші, який буде єдиним.

Нехай $\bar{x} = \bar{x}(t)$ – розв'язок системи (5). Напрявлена крива γ , яку можна задати у параметричному вигляді $x_i = x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$), називається траєкторією розв'язку $\bar{x} = \bar{x}(t)$. Простір R^n з координатами $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, в якому розташовані траєкторії системи (5), називається фазовим простором автономної системи (5). Відомо, що інтегральні криві системи (5) можна задати у параметричному вигляді: $t = t, x_i = x_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Таким чином, інтегральна крива належить простору R^{n+1} з координатами $(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, а траєкторія є проекцією інтегральної кривої на простір R^n паралельно осі t . Проілюструємо це для випадку $n=2$, коли R^{n+1} – тривимірний простір, а фазовий простір R^n – двовимірна площина.

На рис. 12,а зображена інтегральна крива, задана параметричними рівняннями $t = t, x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$, а на рис. 12,б – проекція інтегральної кривої на площину, тобто траєкторія, задана параметричними рівняннями $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$. Стрілкою вказано напрямок зростання параметра t .

Визначення 5. Точка (a_1, a_2, \dots, a_n) називається точкою спокою (положенням рівноваги) автономної системи (5), якщо праві частини системи (5) $f_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ ($i=1,2,3,\dots,n$) в цій точці набувають нульових значень.

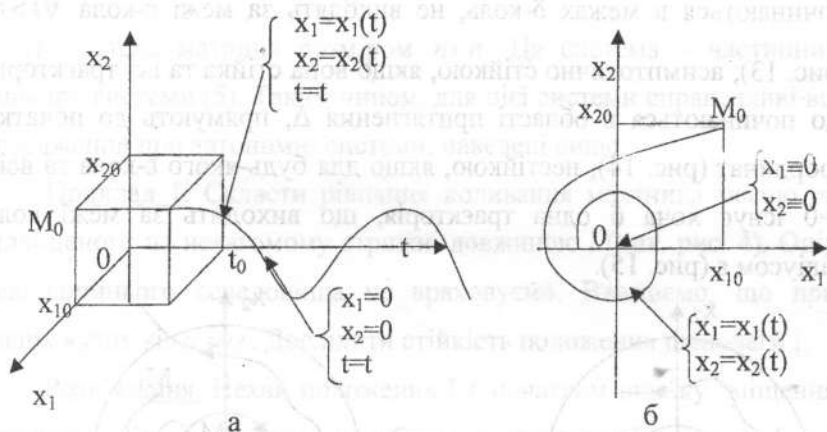


Рис. 12

Якщо (a_1, a_2, \dots, a_n) – точка спокою, то система (5) має сталий розв'язок: $\bar{x}(t) = \bar{a}$. Як відомо (див. §1), дослідження стійкості будь-якого, а тому й сталого розв'язку можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку. Тому надалі будемо припускати, що система (5) має нульовий розв'язок $\bar{x}(t) = 0$, тобто $\bar{f}(\vec{0}) = \vec{0}$, і точка спокою збігається з початком координат фазового простору R^n . В просторі R^{n+1} точка спокою відповідає нульовому розв'язку. Це зображено на рис. 12 для випадку $n=2$. Таким чином, стійкість нульового розв'язку системи (5) означає стійкість початку координат фазового простору системи (5) і навпаки.

Дамо геометричне тлумачення стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості початку фазової площини, тобто коли $n=2$. Для цього слід спроектувати аналогічно рис. 5–7 у двовимірному випадку на фазову площину R^2 , тоді проєкції δ -трубки являтимуть собою кола радіусами ϵ .

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА
 Харківський національний університет ім. М.Є. Жуковського
 «Харківський авіаційний інститут»

Точка спокою $\bar{x} \equiv 0$ є стійкою, якщо всі траєкторії, які починаються в межах δ -кола, не виходять за межі ε -кола $\forall t > t_0$ (рис. 13); асимптотично стійкою, якщо вона стійка та всі траєкторії, що починаються в області притягнення Δ , прямують до початку координат (рис. 14); нестійкою, якщо для будь-якого ε -кола та всіх $\delta > 0$ існує хоча б одна траєкторія, що виходить за межі кола радіусом ε (рис. 15).

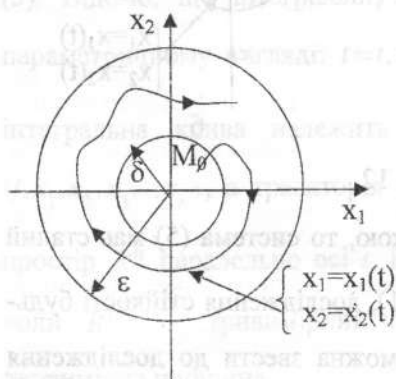


Рис. 13

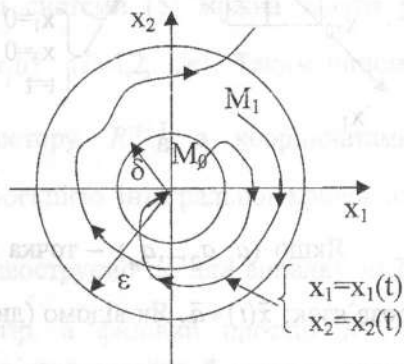


Рис. 14

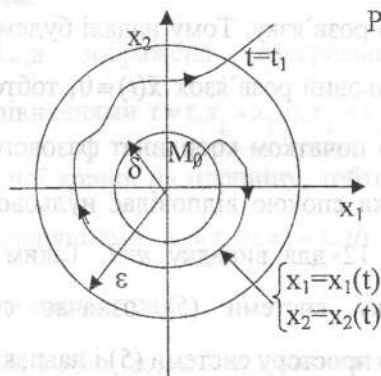
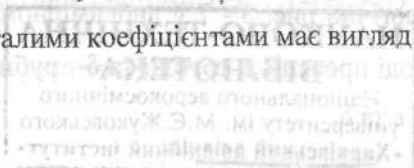


Рис. 15

Нормальна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами має вигляд



$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A \cdot \bar{x}, \quad (6)$$

де A – стала матриця розміром $n \times n$. Ця система – частинний випадок системи (5). Таким чином, для цієї системи справедливі всі твердження про автономні системи, наведені вище.

Приклад 1. Скласти рівняння коливання маятника масою m , підвішеного на невагомому стрижні довжиною l (див. рис. 4). Опір навколишнього середовища не враховуємо. Вважаємо, що при малих кутах $\sin \alpha \approx \alpha$. Дослідити стійкість положення рівноваги I.

Розв'язання. Нехай положення I є початком відліку зміщення маятника. Якщо маятник перебуває в положенні спокою I, то зміщення $x=0$ і швидкість $\frac{dx}{dt} = x' = 0$. Якщо маятник відхилити в

положення III, то йому відповідатимуть початкове зміщення $x(0) = A$ та швидкість $x'(0) = 0$. Якщо маятник відпустити, то він рухатиметься під дією двох сил: своєї ваги $m \cdot \vec{g}$ та сили натягнення стрижня \vec{T} , рівнодійна яких \vec{F} . Згідно з другим законом Ньютона

$$m \cdot x''(t) = -F.$$

Знак “мінус” означає, що діюча сила \vec{F} спрямована протилежно зміщенню. Отже, маємо

$$F = |\vec{F}| = m \cdot g \cdot \sin \alpha \approx m \cdot g \cdot \alpha = m \cdot g \cdot x/l,$$

звідки $m \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot x/l$, або $x''(t) = -g \cdot x/l$. Позначивши $x_1 = x, x_2 = x' = x'$, перейдемо від одного диференціального рівняння другого порядку до тотожної нормальної системи:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2'(t) = -g \cdot x_1/l. \end{cases} \quad (7)$$

(б) Загальний розв'язок системи (7):

$$x_1(t) = C_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t;$$

$$x_2(t) = C_1 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t - C_2 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Положенню I відповідає нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0$ автономної системи (7), а положенню III - частинний розв'язок:

$$x_1(t) = A \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t; \quad x_2(t) = -A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (8)$$

який задовольняє початкові умови $x_1(0) = A, x_2(0) = 0$.

Рівняння (8) - це параметричне рівняння еліпса з півосями $A, A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ (рис. 16), що описує траєкторію руху маятника із положення III, тобто маятник періодично відхиляється від положення рівноваги I то вправо, то вліво з амплітудою A . Точка спокою є стійкою, але не асимптотично стійкою, тому що траєкторія не прямує до положення I.

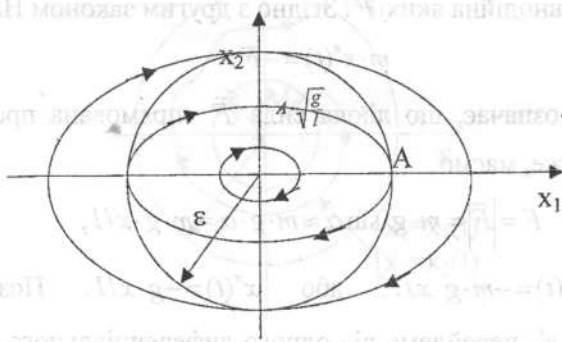


Рис. 16

Приклад 2. Дослідити стійкість положення I з урахуванням опору навколишнього середовища, припускаючи, що опір пропорційний швидкості зміщення (див. рис. 4).

Розв'язання. Рух маятника в середовищі з опором описується рівнянням

$$m \cdot x''(t) = -F - F_c,$$

де $\vec{F}_c = k \cdot \vec{x}'$ - сила опору середовища, спрямована протилежно зміщенню. Тоді рівняння руху запишеться так:

$$x''(t) = -g \cdot x(t) / l - k \cdot x'(t) / m.$$

Позначивши $x_1 = x, x_2 = x' = x_1'$, перейдемо від одного диференціального рівняння другого порядку до тотожної нормальної системи:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2'(t) = -g \cdot x_1 / l - k \cdot x_2 / m. \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язком характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}\right)}.$$

Припустивши, що $\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2} > 0$, введемо нові параметри

$$\omega = \frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2} \text{ та } \alpha = \frac{k}{2m}; \text{ тоді } \lambda_{1,2} = -\alpha \pm i \cdot \omega.$$

Загальний розв'язок системи (9):

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} [C_1 \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t];$$

$$x_2(t) = e^{-\alpha t} [-(\alpha C_1 + \omega C_2) \cdot \sin \omega t + (\omega C_1 - \alpha C_2) \cdot \cos \omega t].$$

Положенню I відповідає нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0$ автономної системи (9), а положенню III - частинний розв'язок

$$x_1(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin \omega t + \cos \omega t \right], \quad x_2(t) = -A \cdot e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \cdot \sin \omega t, \quad (10)$$

який задовольняє початкові умови $x_1(0) = A, x_2(0) = 0$. Із рівняння видно, що амплітуда коливання $A \cdot e^{-\alpha t}$ зменшується із зростанням t і $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1^2(t) + x_2^2(t)| = 0$.

Таким чином, траєкторія являє собою спіраль, що нагинується на точку $(0,0)$ (рис.17), яка є асимптотично стійким положенням рівноваги.

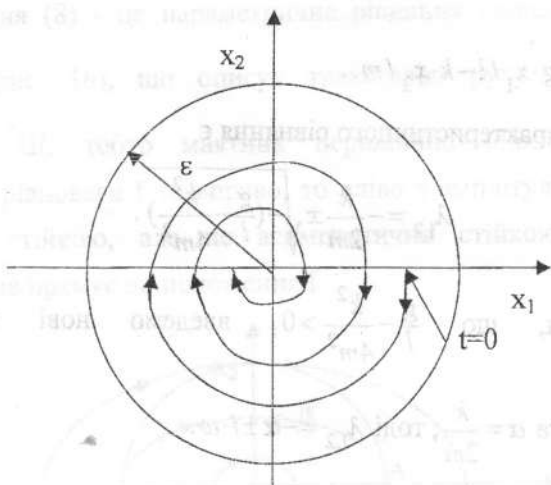


Рис. 17

Приклад 3. Дослідити стійкість положення II (див. рис. 4).

Розв'язання. Будемо відраховувати зміщення маятника від положення II. Якщо маятник знаходиться в положенні II, то $x=0$ і швидкість $\frac{dx}{dt} = x' = 0$. Відхилимо маятник у положення IV, якому

відповідають початкове зміщення $x(0)=A$ і швидкість $x'(0)=0$. Рух маятника з початкового положення описується рівнянням $x''(t)=g \cdot x/l$. Позначивши $x_1=x, x_2=x'=x_1'$, перейдемо від одного диференціального рівняння другого порядку до тотожної нормальної системи:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2; \\ x_2'(t) = g \cdot x_1/l. \end{cases} \quad (11)$$

Розв'язком характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Введемо новий параметр $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, тоді $\lambda_{1,2} = \pm \omega$.

Загальний розв'язок системи (9):

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{-\omega t} + C_2 \cdot e^{\omega t};$$

$$x_2(t) = \omega \cdot (-C_1 \cdot e^{-\omega t} + C_2 \cdot e^{\omega t}).$$

Положенню II маятника відповідає початок координат фазової площини $x_1=0, x_2=0$, а положенню IV - частинний розв'язок

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cdot (e^{-\omega t} + e^{\omega t}); \quad x_2(t) = \frac{A}{2} \cdot \omega \cdot (-e^{-\omega t} + e^{\omega t}), \quad (12)$$

який задовольняє початкові умови $x_1(0)=A, x_2(0)=0$.

Рівняння (12) - це параметричне рівняння гіперболи з півосями

$A, A \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ (рис. 18), що описує траєкторію руху маятника із

положення IV. Таким чином, положення II - нестійке за Ляпуновим.

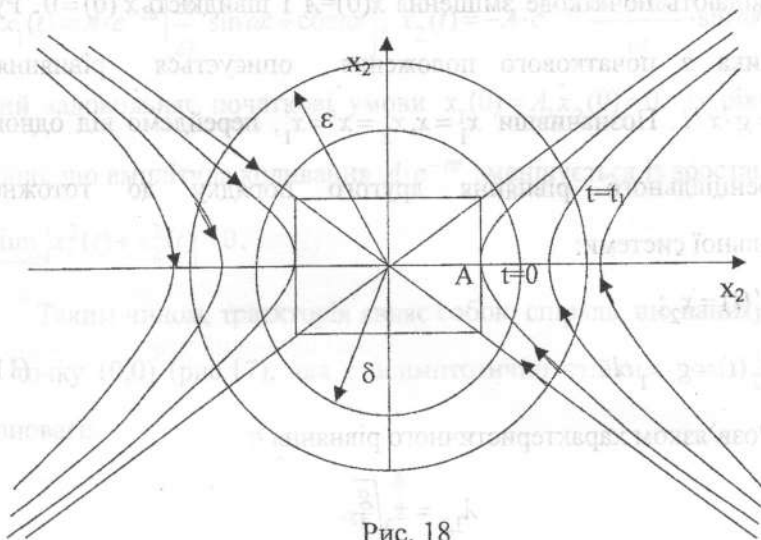


Рис. 18

§3. Типи точок спокою для системи двох рівнянь

У наведених вище прикладах для дослідження стійкості точки спокою ми знаходили загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь. Такий підхід досить довгий, а деколи й неможливий, оскільки не для всякої системи диференціальних рівнянь можна знайти розв'язок. Існують методи, які дозволяють робити правильні висновки відносно стійкості розв'язку без попереднього розв'язання системи. Ознайомимося з одним із цих методів на прикладі однорідної системи двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Запишемо систему двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases} \quad (13)$$

Знайдемо точки спокою нормальної автономної системи (13):

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = 0; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Однорідна система (14) має єдиний нульовий розв'язок, якщо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нехай ця умова виконана, тоді система (13) має єдину точку спокою $x_1 = 0, x_2 = 0$. Дослідимо її стійкість. Будемо шукати розв'язок системи (13) у вигляді

$$x_1(t) = \alpha_1 \cdot e^{\lambda t}; \quad x_2(t) = \alpha_2 \cdot e^{\lambda t},$$

де $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$ – сталі, які треба знайти.

Для знаходження λ запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15)$$

Залежно від розв'язків характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 положення рівноваги (0,0) може бути стійким, асимптотично стійким і нестійким. Розглянемо всі можливі варіанти для λ_1 та λ_2 .

I. Розв'язки характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 дійсні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

У цьому випадку загальний розв'язок системи (13) має вигляд:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 \cdot \alpha_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \alpha_{21} \cdot e^{\lambda_2 t}; \\ x_2(t) = C_1 \cdot \alpha_{12} \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \alpha_{22} \cdot e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (16)$$

де C_1, C_2 – сталі, які знаходять з початкових умов.

а) Нехай $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, тоді

$$(E1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$$

і маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1^2(t) + x_2^2(t)| = 0.$$

Таким чином, траєкторіями є криві, які прямують до початку координат при $t \rightarrow \infty$, і початок – асимптотично стійкий. При цьому, якщо в системі (16) або $C_1=0$, або $C_2=0$, то траєкторіями будуть промені, спрямовані до початку координат. Дійсно, нехай $C_1=0$,

тоді $x_1(t) = C_2 \cdot \alpha_{21} \cdot e^{\lambda_2 t}$, $x_2(t) = C_2 \cdot \alpha_{22} \cdot e^{\lambda_2 t}$ і маємо $x_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} x_2$. Так

само при $C_2=0$ дістанемо $x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} x_2$. Таке положення рівноваги

називається стійким вузлом (рис. 19).

б) Нехай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \infty.$$

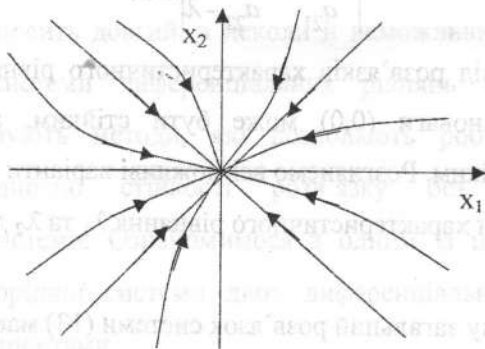


Рис. 19

Очевидно, що із спливанням часу траєкторія віддаляється від положення рівноваги. Сукупність фазових графіків така ж сама, як і у випадку "а", але напрямок зростання параметра t уздовж траєкторії буде протилежним. Таке положення рівноваги називається нестійким вузлом (рис. 20).

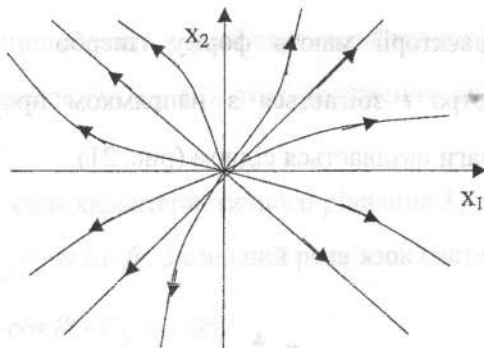


Рис. 20

в) Нехай $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, тобто корені характеристичного рівняння мають протилежні знаки. Припустимо, що $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Поклавши в

(16) $C_2=0$, одержимо $x_1(t)=C_1 \cdot \alpha_{11} \cdot e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t)=C_1 \cdot \alpha_{12} \cdot e^{\lambda_1 t}$, а тому

маємо $x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} x_2$. Траєкторією є промінь, вздовж якого із зростанням параметра t точка віддаляється від початку координат

зв'язку з тим, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} = \infty$. Таким чином, положення рівноваги

- нестійке. Поклавши в (16) $C_1=0$, дістанемо

$x_1(t) = C_2 \cdot \alpha_{21} \cdot e^{\lambda_2 t}$, $x_2(t) = C_2 \cdot \alpha_{22} \cdot e^{\lambda_2 t}$, а тому маємо $x_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} x_2$.

Траєкторією є промінь, вздовж якого із зростанням параметра t точка наближується до початку координат у зв'язку з тим, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0$. Таким чином, положення рівноваги - нестійке, але деякі розв'язки можуть бути стійкими.

Усі інші траєкторії мають форму гіперболи, і напрямком зростання параметра t збігається з напрямком променів. Таке положення рівноваги називається сідлом (рис. 21).

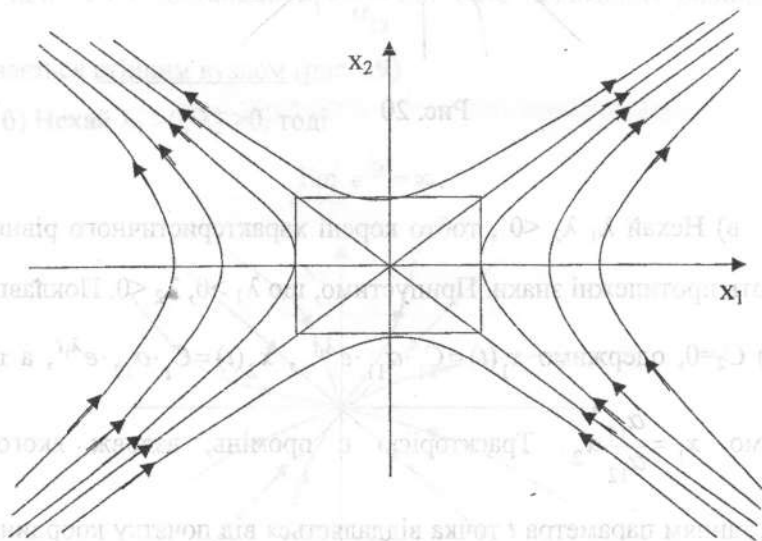


Рис. 21

Приклад 1. Розглянемо систему із прикладу 3 §2.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{I} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язок характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{I}}, \text{ де } \frac{g}{I} > 0.$$

Таким чином, якщо корені характеристичного рівняння мають протилежні знаки ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$), тоді положення рівноваги є сідлом (див. рис. 18).

II. Розв'язки характеристичного рівняння λ_1 та λ_2 комплексно спряжені: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i \cdot \beta$. Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = e^{\alpha t} [C_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \sin \beta t]; \quad (17)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} e^{\alpha t} [(\alpha C_1 + \beta C_2 - a_{12} \cdot C_1) \cdot \cos \beta t + (-\beta C_1 + \alpha C_2 - a_{11} \cdot C_2) \cdot \sin \beta t].$$

Перейдемо в рівняннях (17) до полярних координат. Поклавши $R = \max(C_1, C_2)$ та $\sigma = \arctg(C_1/C_2)$, одержимо параметричне рівняння траєкторії в полярних координатах:

$$r = R \cdot e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta \cdot t + \sigma. \quad (18)$$

При $\alpha \neq 0$ кожна траєкторія - це логарифмічна спіраль.

а) Якщо $\alpha < 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} = 0$.

Точка по спіралі асимптотично наближується до початку координат. Положення рівноваги - асимптотично стійке (рис. 22) і називається стійким фокусом.

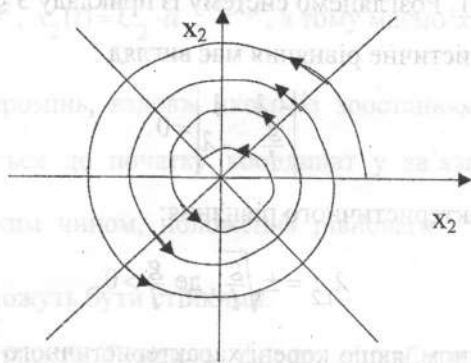


Рис. 22

б) Якщо $a > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \infty$.

Точка по спіралі асимптотично віддаляється від початку координат у нескінченність. Положення рівноваги - нестійке (рис. 23) і називається нестійким фокусом.

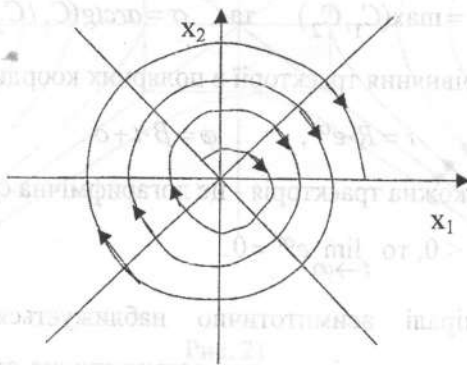


Рис. 23

в) Якщо $\alpha = 0$, то кожна траєкторія, окрім положення рівноваги, замкнута. Положення рівноваги - стійке (рис. 24) і називається центром.

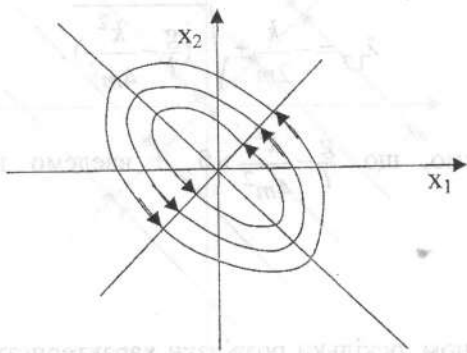


Рис. 24

Приклад 2. Розглянемо систему із прикладу 1 §2.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язок характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{де } \frac{g}{l} > 0.$$

Таким чином, оскільки розв'язки характеристичного рівняння λ_1, λ_2 комплексно спряжені, а $\alpha = 0$, тоді положення рівноваги - стійке і є центром.

Приклад 3. Розглянемо систему із прикладу 2 §2.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\left| \begin{array}{c} -\lambda \\ \frac{g}{l} - \frac{k}{m} - \lambda \end{array} \right| = 0.$$

Розв'язками характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}\right)}.$$

Припустимо, що $\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2} > 0$, і введемо новий параметр

$$\omega = \frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}.$$

Таким чином, оскільки розв'язки характеристичного рівняння

λ_1, λ_2 комплексно спряжені, а $\alpha = -\frac{k}{2m} < 0$, то положення рівноваги

- асимптотично стійке і є стійким фокусом.

III. Вироджений випадок.

а) Розв'язки характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$.

Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t};$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} (-C_1 \cdot a_{11} + C_2 \cdot (\lambda_2 - a_{11}) \cdot e^{\lambda_2 t}).$$

Через те, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} = 0$, траєкторіями є промені, які прямують від

нескінченності до прямої $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$, усі точки якої є стійким

положенням рівноваги (рис. 25).

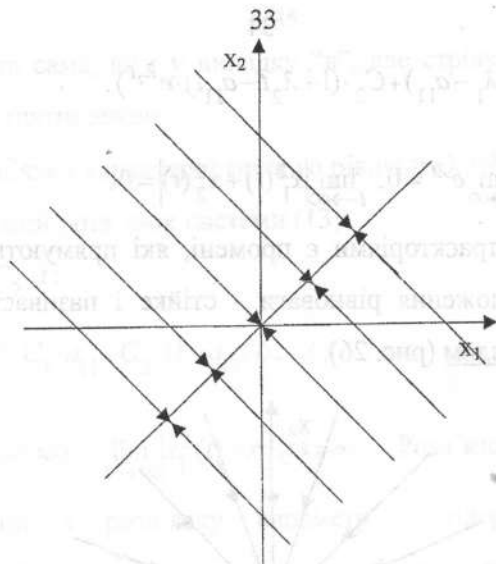


Рис. 25

б) Розв'язки характеристичного рівняння $\lambda_1=0, \lambda_2>0$.

Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t};$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} (-C_1 \cdot a_{11} + C_2 \cdot (\lambda_2 - a_{11}) \cdot e^{\lambda_2 t}).$$

Через те, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \infty$, траєкторіями є прямі, які прямують від

прямої $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$ до нескінченності. Положення рівноваги -

нестійке. Фазова картина така сама, як і у випадку "а", але стрілки на траєкторіях напрямлені протилежно.

в) Розв'язки характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda_2 t};$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} (C_1 \cdot (\lambda_1 - a_{11}) + C_2 \cdot (1 + \lambda_2 t - a_{11} t) \cdot e^{\lambda_2 t}).$$

Через те, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1^2(t) + x_2^2(t)| = 0$.

Таким чином, траєкторіями є промені, які прямують до початку координат. Положення рівноваги - стійке і називається стійким виродженням вузлом (рис. 26).

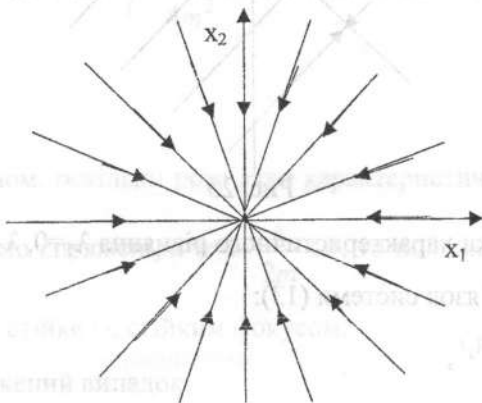


Рис. 26

г) Розв'язок характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda_2 t};$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} (C_1 \cdot (\lambda_1 - a_{11}) + C_2 \cdot (1 + \lambda_2 t - a_{11} t) \cdot e^{\lambda_2 t}).$$

Але $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \infty$. Таким чином, траєкторіями є промені, які розходяться від початку координат. Положення рівноваги - нестійке і називається нестійким виродженням вузлом. Фазова

картина така сама, як і у випадку “в”, але стрілки на траєкторіях напрямлені протилежно.

д) Розв'язки характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Загальний розв'язок системи (13):

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \cdot t;$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}} (-C_1 \cdot a_{11} + C_2 \cdot (1 - a_{11}t)),$$

а тому маємо $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1^2(t) + x_2^2(t)| = \infty$. Розв'язок - нестійкий.

Виключивши з розв'язку параметр t , одержимо рівняння $x_1 + a_{12}x_2 = C_1$. Таким чином, траєкторіями є прямі, паралельні прямій $x_1 + a_{12}x_2 = 0$. Положення рівноваги є нестійким і називається виродженим сідлом.

Проаналізуємо всі розглянуті випадки. Будемо відкладати дійсні частини коренів $Re(\lambda_1)$ та $Re(\lambda_2)$ уздовж осі x , а уявні $Im(\lambda_1)$ та $Im(\lambda_2)$ - уздовж осі y . Тоді областю стійкості буде ліва напівплощина (точка $(0,0)$ не включається) (рис. 27).

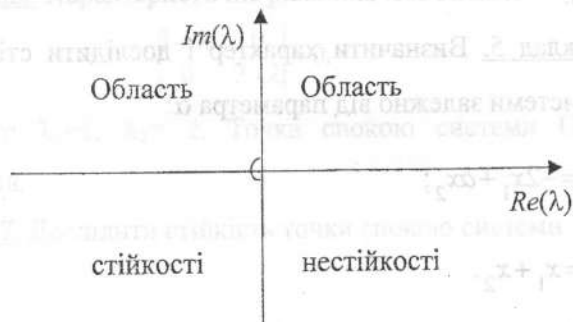


Рис. 27

Справедливим є правило: якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння (13) належить правій напівплощині або обидва корені дорівнюють нулю, то положення рівноваги - нестійке, у протилежному випадку - стійке.

Приклад 4. Дослідити стійкість точок спокою систем:

$$1. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Розв'язки його $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ належать правій напівплощині, таким чином, точка $(0,0)$ - нестійкий вузол.

2. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + \lambda = 0$, його розв'язки $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ належать лівій напівплощині та один з коренів $\lambda_2 < 0$. Таким чином, точка $(0,0)$ - стійке положення рівноваги.

Приклад 5. Визначити характер і дослідити стійкість точки спокою системи залежно від параметра α :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + \alpha x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - (\alpha + 2) = 0.$$

Розв'язки його $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{9+4\alpha}$. Залежно від значень α маємо такі випадки:

1. Якщо $\alpha < -9/4$, то корені комплексні і $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Точка спокою системи – стійкий фокус.
2. Якщо $\alpha = -9/4$, то корені дійсні, від'ємні та рівні. Точка спокою системи – стійкий вузол.
3. Якщо $-9/4 < \alpha < -2$, то корені дійсні, від'ємні. Точка спокою системи – стійкий вузол.
4. Якщо $-2 < \alpha$, то корені дійсні та мають різні знаки. Точка спокою системи – нестійка і має назву “сідро”.

Приклад 6. Дослідити стійкість точки спокою $x=0, y=0$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язки його $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. Точка спокою системи $O(0,0)$ – нестійкий вузол.

Приклад 7. Дослідити стійкість точки спокою системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

його розв'язки - $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$. Точка спокою системи $O(0,0)$ - нестійке сідло.

Приклад 8. Дослідити стійкість точки спокою системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

його розв'язки - $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Дійсна частина $\alpha = -1 < 0$, тобто точка спокою системи $O(0,0)$ - стійкий фокус.

Приклад 9. Визначити характер і дослідити стійкість точки спокою системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

його розв'язки - $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Дійсна частина $\alpha = 1 > 0$, тобто точка спокою системи $O(0,0)$ - нестійкий фокус.

Вправи для самостійної роботи

$$1. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -4 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 12 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -8 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -3 \cdot x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2 \cdot x_1 - 1/3 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 1/2 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -6 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Визначити, при яких значеннях параметра α точка спокою системи - стійка.

$$11. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha \cdot x_1 - x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + \alpha x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_1 + x_2. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Карташов А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970.

Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища шк., 1994.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

431

Людмила Валентинівна Желдакова

Петро Тихонович Кошавець

Олена Григорівна Ушакова

I my

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2001

Підписано до друку 20.07.2001

Формат 60×84¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Офс. печ.

Умовн.-друк. арк. 2,3. Облік.-вид. арк. 2,56. Т. 100 прим. Замовлення 322.

Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського

“Харківський авіаційний інститут”

61070, Харків – 70, вул. Чкалова, 17

Друкарня “ХАІ”

61070, Харків – 70, вул. Чкалова, 17