МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

В.М. Гербін, В.Т. Фесенко

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Харків "ХАІ" 2002

УДК -517.91 (075.8)

Звичайні диференціальні рівняння / В.М. Гербін, В.Т. Фесенко. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2002. – 59 с.

Розглянуто основні теоретичні питання з курсу звичайних диференціальних рівнянь як першого, так і вищих порядків, передбачені програмою курсу "Вища математика" для технічних вузів з розширеною математичною підготовкою. Перший розділ присвячено звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, другий – загальним питанням диференціальних рівнянь другого і вищих порядків, у третьому розділі розглянуто системи звичайних диференціальних рівнянь.

У кожному розділі наведено достатню кількість розв'язаних задач з теми, а також вправи для самостійної роботи.

Для студентів I та II курсів вищих технічних навчальних закладів. Може також бути корисним для аспірантів.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Я.П. Бузько, Л.В Олійник

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що встановлює зв'язок між незалежною змінною x, шуканою функцією $y=f(x)$ та її похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0.$$

Якщо функція y залежить від однієї змінної, диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо від кількох – рівнянням *в частинних похідних*. (У даному посібнику розглядаються лише звичайні рівняння та їх системи).

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної шуканої функції, що належить цьому рівнянню.

Розв'язком, або інтегралом, диференціального рівняння називається будь-яка функція $y=f(x)$, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його в тотожність.

Диференціальне рівняння *першого* порядку має вигляд

$$F(x, y, y')=0.$$

Якщо це рівняння може бути розв'язане (алгебрично) відносно похідної y', то його можна записати в формі

$$y'=f(x, y).$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку $y'=f(x, y)$ в області D називається функція $y=\varphi(x, C)$, яка має такі властивості:

1) вона є розв'язком даного рівняння при будь-яких значеннях довільної сталої C, що належать деякій множині;
2) для будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$ такої, що $(x_0, y_0)\in D$, існує єдине значення $C=C_0$, для якого розв'язок $y=\varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$.

Будь-який розв'язок $y=\varphi(x, C_0)$, одержаний із загального розв'язку $y=\varphi(x, C)$ для певного значення $C=C_0$, називається *частинним розв'язком.*

Задача знаходження розв'язку рівняння $y'=f(x, y)$, що задовольняє умову $y_0=y(x_0)$, називається *задачею Коші.*

Графік будь-якого розв'язку $y=\varphi(x)$ даного диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння. Таким чином, загальному розв'язку $y=\varphi(x, C)$ в площині xOy відповідає сім'я інтегральних кривих, які є функціями одного параметра – довільної сталої C; частинному розв'язкові, що задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$, відповідає крива цієї сім'ї, яка проходить через фіксовану точку $M_0(x_0,y_0)$.

Проте зустрічаються диференціальні рівняння, які допускають розв'язки, що не одержуються із загального розв'язку ні при яких значеннях довільної сталої C (включаючи $C=\pm\infty$). Такі розв'язки називаються *особливими*. Легко переконатись, що, наприклад, рівняння $y'=\sqrt{1-y^2}$ має загальний розв'язок $y=\sin(x+C)$, а втім функція $y=1$, яка не може бути одержана із загального розв'язку при жодному значенні C, є усе ж таки розв'язком цього рівняння. Отже, мова йде про особливий розв'язок.

Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка в кожній своїй точці має спільну дотичну з однією з інтегральних кривих, що відповідають загальному розв'язкові. Така крива називається *обгорткою (обвідною)* однопараметричної сім'ї інтегральних кривих.

Знаходження розв'язків диференціального рівняння називається *інтегруванням* цього диференціального рівняння.

1.2. Рівняння з подільними змінними

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0$$

належить до *рівнянь з подільними змінними*. Якщо жодна з функцій $f_1(x), f_2(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ не є тотожним нулем, то рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$$

після його ділення на добуток $f_2(x)\varphi_1(y)$. Почленне інтегрування останнього приводить до результату

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C,$$

який є (в неявному вигляді) загальним розв'язком початкового рівняння. (*Інтегралом* диференціального рівняння називається розв'язок цього рівняння, поданий в неявній формі).

1. Знайти частинний інтеграл рівняння $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язання. Покладаючи $y'=\dfrac{dy}{dx}$, перепишемо рівняння у вигляді

$$\cos x\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\ln y}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{\ln y}{y}dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{\ln y}{y}dy = \int\frac{dx}{\cos x} + C, \text{ або } \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Використовуючи початкову умову $(x=0,\ y=1)$, знаходимо $C=0$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2. Знайти загальний інтеграл рівняння $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

Розв'язання. Поділимо праву й ліву частини рівняння на множник $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2} \neq 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0, \text{ або } \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = C.$$

Отже, загальним інтегралом буде $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(1+x^2)dy + ydx = 0$, який задовольняє початкову умову $y(1)=1$.

Розв'язання. Зведемо дане рівняння до вигляду $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Інтегруючи його, одержимо

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{1+x^2}, \text{ або } \ln|y| = -arctgx + \ln|C|$$

(тут більш зручним є позначення довільної сталої через $\ln|C|$). Звідси знаходимо $y = Ce^{-arctg\, x}$ – загальний розв'язок запропонованого рівняння. Використаємо тепер початкову умову, щоб знайти значення C. Маємо $1 = Ce^{-arctg\, 1}$, тобто $C = e^{\frac{\pi}{4}}$.

Таким чином, шуканим частинним розв'язком є $y = e^{\frac{\pi}{4} - arctg\, x}$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
4. $\ln\cos y dx + xtgydy = 0$.	$y = \arccos e^{Cx}$.
5. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0;\ y(1) = 0$.	$2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.
6. $3e^x tg\, ydx + (1+e^x)\sec^2 ydy = 0;\ y(0) = \frac{\pi}{4}$.	$(1+e^x)^3 tg\ y = 8$.

7. $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy=e^x dx;\ y(0)=0.$ $\qquad$ $y^3/3+\pi/4=arctg\,e^x.$

8. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y);\ y(0)=\frac{\pi}{4}.$ $\qquad$ $\ln|tg\,y|=4(1-\cos x).$

9. $y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0;\ y\left(-\frac{15}{16}\right)=e.$ $\qquad$ $y=e^{\pm1/\left(2\sqrt[4]{x+1}\right)}.$

10. $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}}=0.$ $\qquad$ $\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)=Cxy.$

11. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y).$ $\qquad$ $2\sin x+\ln\left|tg\frac{y}{2}\right|=C.$

12. $y'=e^{x+y}+e^{x-y};\ y(0)=0.$ $\qquad$ $y=\ln tg\left(e^x+\frac{\pi}{4}-1\right).$

13. $x\left(y^6+1\right)dx+y^2\left(x^4+1\right)dy=0;\ y(0)=1.$ $\qquad$ $3arctg\,x^2+2arctg\,y^3=\frac{\pi}{2}.$

14. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dx+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)dy=0.$ $\qquad$ $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln\left|\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}-1\right)\right|=C.$

15. $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}y'.$ $\qquad$ $\frac{3}{2}\ln\left(y^2+4\right)+arctg\frac{y}{2}=\sqrt{x^2+4x+13}-\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right)+C.$

1.3. Однорідні рівняння

Диференціальне рівняння вигляду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ називається *однорідним*, якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного порядку відносно змінних x і y. Функція $f(x,y)$ є однорідною функцією порядку n відносно змінних x і y, якщо для будь-якого λ виконується співвідношення

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y).$$

Наприклад, функція $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ є однорідною першого порядку, оскільки

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y),$$

а функція $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ – однорідною нульового порядку, оскільки

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\lambda^0 f(x,y).$$

Рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ можна звести до вигляду $y'=f(x,y)$ $\left(f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)$. Останнє, очевидно, буде однорідним диференціальним рівнянням, якщо його права частина $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового порядку.

Диференціальне однорідне рівняння може бути зведене до вигляду $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Заміна $\dfrac{y}{x}=u$ (тобто $y=xu$) приводить це рівняння до диференціального рівняння з подільними змінними відносно нової невідомої функції u.

16. Зайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0.$$

Розв'язання. У даному рівнянні $P(x,y)=x^2+2xy, Q(x,y)=xy$. Обидві функції є однорідними функціями другого порядку відносно x і y. Здійснивши заміну $y=ux$, маємо $dy=xdu+udx$. Рівняння набуває вигляду $\left(x^2+2x^2u\right)dx+ux^2(xdu+udx)=0$, або $\left(x^2+2x^2u+u^2x^2\right)dx+ux^3du=0$. Відокремлюючи змінні й інтегруючи, одержуємо послідовно:

$$\frac{dx}{x}+\frac{udu}{(u+1)^2}=0;\ \int\frac{dx}{x}+\int\frac{udu}{(u+1)^2}=C.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du=C, \text{ або } \ln|x|+\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=C.$$

Повертаючись до функції y $(u=\dfrac{y}{x})$, знаходимо остаточну відповідь:

$$\ln|x+y|+\frac{y}{x+y}=C.$$

17. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'=\dfrac{y-2\sqrt{xy}}{x}$, який задовольняє початкову умову $y(1)=4$.

Розв'язання. Права частина рівняння є однорідною функцією нульового порядку відносно x і y. Отже, це рівняння є однорідним диференціальним. Здійснивши заміну $y=ux$, маємо $y'=u+u'x$. Підставимо в рівняння вирази для y та y': $u+u'x=\dfrac{ux-2\sqrt{ux^2}}{x}$. Після скорочення правої частини на x одержимо $\dfrac{du}{dx}x=-2\sqrt{u}$. Відокремимо змінні: $\dfrac{du}{2\sqrt{u}}=-\dfrac{dx}{x}$. Після інтегрування маємо $\sqrt{u}+\ln|u|=C$. Здійснивши обернену заміну $u=\frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$. Використаємо початкову умову $\sqrt{4}=C$, тобто $C=2$.

Шуканим частинним розв'язком є $y=x(2-\ln|x|)^2$.

Розв'язати рівняння: Відповіді:

18.	$xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$.	$Cx=e^{\cos\left(y/x\right)}$.
19.	$xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$.	$y^2=Cxe^{-y/x}$.
20.	$xy'\ln\frac{y}{x}+x=x+y\ln\frac{y}{x}$.	$\ln x=\left(y/x\right)\left[\ln\left(y/x\right)-1\right]+C$.
21.	$xy'-y=xtg\frac{y}{x};\ y(1)=\frac{\pi}{2}$.	$y=x\arcsin x$.
22.	$y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$.	$1+\sin\frac{y}{x}=Cx\cos\frac{y}{x}$.
23.	$\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$.	$y^2=x^2\ln Cx^2$.
24.	$xy'=xe^{y/x}+y;\ y(1)=0$.	$y=-x\ln\|1-\ln x\|$.
25.	$xy'-y=\dfrac{x}{arctg\left(y/x\right)}$.	$\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$.
26.	$3y\sin\frac{3x}{y}dx+\left(y-3x\sin\frac{3x}{y}\right)dy=0$.	$\ln\|y\|-\cos\frac{3x}{y}=C$.

1.4. Рівняння, що зводяться до однорідних

Рівняння типу

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

можна звести, якщо $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, до однорідного рівняння заміною $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, де $(\alpha;\beta)$ є точкою перетину прямих $a_1x+b_1y+c_1=0$ та $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Якщо ж $a_1b_2-a_2b_1=0$, то заміна $u=a_1x+b_1y$ зводить дане рівняння до рівняння з подільними змінними відносно змінних u і x.

27. Знайти загальний інтеграл рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$.

Розв'язання. Оскільки визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, здійснимо заміну $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$:

$$\frac{du}{dv}=\frac{u+v+\alpha+\beta-3}{u-v+\alpha-\beta-1}.$$

Щоб знайти α і β, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \alpha+\beta-3=0, \\ \alpha-\beta-1=0. \end{cases}$$

Її розв'язком є $\alpha=2$; $\beta=1$. Підставивши ці числа в попереднє рівняння, дістанемо однорідне рівняння $\frac{du}{dv}=\frac{u+v}{u-v}$, яке розв'яжемо за допомогою заміни $\frac{u}{v}=z$. Маємо $u=zv$; $\frac{du}{dv}=z+v\frac{dz}{dv}$; $z+v\frac{dz}{dv}=\frac{1+z}{1-z}$ і одержуємо рівняння з подільними змінними

$$v\frac{dz}{dv}=\frac{1+z^2}{1-z}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{dv}{v}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$arctg\, z-\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)=\ln|v|+\ln|C|,$$

$$arctg\, z=\ln\left(Cv\sqrt{1+z^2}\right),\ \text{або}\ Cv\sqrt{1+z^2}=e^{arctg\, z}.$$

Підставивши в останню рівність $z=\frac{u}{v}$, одержимо

$$C\sqrt{u^2+v^2}=e^{arctg\frac{u}{v}}.$$

Нарешті, повертаючись до змінних x і y, дістанемо остаточно

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}.$$

28. Знайти загальний інтеграл рівняння $y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.

Розв'язання. Оскільки визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то дане рівняння можна звести до рівняння з подільними змінними, здійснивши заміну $z = 2x + y$.

Маємо $y = z - 2x$; $y' = z' - 2$. Підставимо вирази для y та y' у рівняння: $z' - 2 = \dfrac{z-1}{2z-5}$, або $z' = \dfrac{5z+9}{2z+5}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо:

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C.$$

Оскільки $z = 2x + y$, знаходимо остаточно загальний інтеграл даного рівняння

$$10y - 5x + 7\ln|10x + 5y + 9| = C_1.$$

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
29. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.	$x^2 + y^2 + xy + x - y = C$.
30. $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.	$x + 2y + 5\ln\|x + y - 3\| = C$.
31. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0;\ y(0) = 2$.	$3x + 2y - 4 + 2\ln\|x + y - 1\| = 0$.
32. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.	$x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$.
33. $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$.	$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.
34. $y' = \dfrac{x + y - 2}{x - y - 4};\ y(1) = 1$.	$x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$.
35. $(3x - 7y - 3)dy = (3y - 7x + 7)dx$.	$(x + y - 1)^5(y - x + 1)^2 = C$.

1.5. Рівняння в повних диференціалах

Якщо ліва частина рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

то воно називається *рівнянням у повних диференціалах*. Для того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Якщо записати рівняння в повних диференціалах у формі $dU = 0$, то його загальний інтеграл матиме вигляд $U = C$. Функція $U(x, y)$ може бути знайдена за формулою

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy.$$

У цій формулі нижні межі інтегрування x_0 та y_0 – довільні числа (але такі, щоб обидва інтеграли існували).

Якщо умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не виконується, то в деяких випадках дане рівняння можна звести до рівняння в повних диференціалах шляхом його множення на деяку функцію $\mu(x, y)$, яка називається *інтегрувальним множником*. Якщо для рівняння існує інтегрувальний множник, який залежить тільки від x, то його можна знайти за формулою

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx},$$

де відношення $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ повинно залежати тільки від x. Аналогічно знаходиться інтегрувальний множник, який залежить тільки від y,

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy},$$

де відношення $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ повинно залежати тільки від y (відсутність у цих відношеннях y в першому випадку та x - в другому вказує на те, що інтегрувальний множник розглянутого типу існує).

36. Знайти загальний інтеграл рівняння $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

Розв'язання. $P(x, y) = x + y - 1$, $Q(x, y) = e^y + x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Отже, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, тобто дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Визначимо загальний інтеграл за формулою $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$:

$$\int\limits_{x_0}^{x}(x+y-1)dx + \int\limits_{y_0}^{y}\left(e^y + x_0\right)dy = C_1, \text{ або } \left[\frac{1}{2}x^2 + yx - x\right]_{x_0}^{x} + \left[e^y + x_0 y\right]_{y_0}^{y} = C_1.$$

Підставляючи межі, одержуємо:

$$\frac{1}{2}x^2 + xy - x - \frac{1}{2}x_0^2 - yx_0 + x_0 + e^y + x_0 y - e^{y_0} - x_0 y_0 = C_1, \text{ або}$$

$$e^y + \frac{1}{2}x^2 + xy - x = C,$$

де $C = C_1 + \frac{1}{2}x_0^2 - x_0 + e^{y_0} + x_0 y_0$.

37. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0.$$

Розв'язання. $P(x,y) = e^x + y + \sin y$, $Q(x,y) = e^y + x + x\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$. Отже, дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x\cos y.$$

Використаємо інший спосіб знаходження функції $U(x,y)$ за її повним диференціалом.

Інтегруванням $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y$ за змінною x знаходимо

$$U = \int\left(e^x + y + \sin y\right)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y).$$

Визначимо тепер довільну функцію $C(y)$. З цією метою знайдемо частинну похідну $\frac{\partial U}{\partial y}$, використовуючи останній вираз (для функції U):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y).$$

Порівнюючи два вирази для $\frac{\partial U}{\partial y}$, одержуємо рівняння

$$x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos y + e^y,$$

звідки маємо $C'(y) = e^y$, $C(y) = e^y$.

Таким чином, загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = C.$$

38. Розв'язати рівняння $\left(y + xy^2\right)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. $P(x,y) = y + xy^2$, $Q(x,y) = -x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Звідси випливає, що ліва частина даного рівняння не є повним диференціалом. Перевіримо, чи це рівняння допускає існування інтегрувального множника, який залежить тільки від y. Для цього обчислимо відношення

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{1 + 2xy + 1}{y + xy^2} = \frac{2(1 + xy)}{y(1 + xy)} = \frac{2}{y}.$$

Оскільки це відношення не залежить від x, то інтегрувальний множник, який залежить тільки від y, існує. Знайдемо його:

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy} = e^{-\int \frac{2dy}{y}} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}.$$

Помножимо дане рівняння на $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$:

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

Останнє рівняння – це рівняння в повних диференціалах:
$\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y} + x\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{1}{y^2}\right)$. Розв'яжемо його:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \int_{y_0}^{y}\frac{x_0}{y^2}dy = \left[\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x} + \frac{x_0}{y}\bigg|_{y_0}^{y} = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} - \frac{x_0}{y} - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0}{y} - \frac{x_0}{y_0} =$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Відповідь: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = C$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
39. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.	$\dfrac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C$.

40. $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^y\cos y)dy=0$. $\quad xy+e^x\sin y=C$.

41. $(xy+\sin y)dx+(0{,}5x^2+x\cos y)dy=0$. $\quad \frac{1}{2}x^2y+x\sin y=C$.

42. $\left(2xye^{x^2}+\ln y\right)dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy=0;\ y(0)=1$. $\quad ye^{x^2}+x\ln y=1$.

43. $(y+x\ln y)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$. $\quad x^2\ln y+2y(x+1)=C$.

44. $(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy=0$. $\quad x^3+3y+3x\sin y=C$.

45. $ye^xdx+(y+e^x)dy=0$. $\quad ye^x+\frac{1}{2}y^2=C$.

46. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$. $\quad x^3y-\cos x-\sin y=C$.

47. $(e^{x+y}+3x^2)dx+(e^{x+y}+4y^3)dy=0;\ y(0)=0$. $\quad e^{x+y}+x^3+y^4=1$.

Розв'язати рівняння, які допускають існування інтегрувального множника $\mu(x)$ або $\mu(y)$:

48. $ydx-xdy+\ln x dx=0\ (\mu=\mu(x))$. $\quad y=Cx-\ln x-1;\ \mu=\frac{1}{x^2}$.

49. $(x^2\cos x-y)dx+xdy=0\ (\mu=\mu(x))$. $\quad y=x(C-\sin x);\ \mu=\frac{1}{x^2}$.

50. $ydx-(x+y^2)dy=0\ (\mu=\mu(y))$. $\quad x=y(C+y);\ \mu=\frac{1}{y^2}$.

51. $y\sqrt{1-y^2}dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)dy=0\ (\mu=\mu(y))$. $\quad xy-\sqrt{1-y^2}=C;\ \mu=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

1.6. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння, лінійне відносно шуканої функції та її похідної. Записується воно в такому вигляді:

$$y'+P(x)y=Q(x).$$

Якщо $Q(x)\neq 0$, рівняння називається лінійним *неоднорідним*; якщо ж $Q(x)=0$, то воно має назву лінійного *однорідного*.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'+P(x)y=0$ знаходиться відокремленням змінних:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx;\ \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx;\ \ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|,$$

звідки

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

де C – довільна стала.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння можна знайти виходячи із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа), тобто будемо шукати загальний розв'язок рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ у вигляді $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Щоб знайти функцію $C(x)$, підставимо y та $y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int P(x)dx}$ в неоднорідне рівняння. Одержимо рівняння

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

звідки знаходимо $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$, де C – довільна стала. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right].$$

Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

де $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, називається рівнянням Бернуллі.

Заміною змінної $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного неоднорідного рівняння відносно функції z:

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x).$$

Інтегруючи конкретне рівняння Бернуллі, не обов'язково попередньо його зводити до лінійного, оскільки достатньо прямо до нього застосувати метод варіації довільної сталої.

52. Розв'язати рівняння $y' - y\,th\,x = ch^2 x$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' - y\,th\,x = 0.$$

Відокремлюючи змінні, визначаємо

$\frac{dy}{y} = th\,x dx$, $\int\frac{dy}{y} = \int th\,x dx$, $\ln|y| = \ln ch\,x + \ln|C|$, або, остаточно, $y = C\,ch\,x$.

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації:

$$y = C(x)ch\,x,\ y' = C'(x)ch\,x + C(x)sh\,x.$$

Підставимо вирази для y та y' в початкове рівняння:

$$C'(x)ch\,x + C(x)sh\,x - C(x)ch\,x\,th\,x = ch^2 x,$$

$$C'(x) = ch\,x,\ C(x) = sh\,x + C.$$

Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння є $y = (sh\,x + C)ch\,x$.

53. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

Розв'язання. Це рівняння Бернуллі ($\alpha = 2$). Розв'яжемо його безпосередньо методом варіації довільної сталої (без заміни $z = y^{-1}$, яка звела б дане рівняння до лінійного відносно функції z). Для цього спочатку розв'яжемо рівняння $y' - \dfrac{y}{x-1} = 0$.

Загальним розв'язком останнього є $y = C(x-1)$.

Будемо шукати загальний розв'язок даного рівняння Бернуллі у вигляді $y = C(x)(x-1)$. Знаходимо $y' = C'(x)(x-1) + C(x)$ і підставляємо вирази для y та y' в дане рівняння:

$$C'(x)(x-1) + C(x) - \frac{C(x)(x-1)}{x-1} = \frac{C^2(x)(x-1)^2}{x-1},\ \text{або}\ C'(x)(x-1) = C^2(x)(x-1).$$

Інтегруємо рівняння $C'(x) = C^2(x)$:

$$\frac{dC(x)}{C^2(x)} = dx,\ \int\frac{dC(x)}{C^2(x)} = dx,\ \frac{1}{C(x)} = -x + C,\ C(x) = \frac{1}{C-x}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{x-1}{C-x}$.

54. Розв'язати рівняння $y'(x + y^2) = y$.

Розв'язання. Це рівняння легко інтегрувати, якщо вважати y незалежною змінною, а x - функцією від y. Використаємо формулу для похідної оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Дане рівняння зводиться до такого:

$$\frac{1}{x'}(x + y^2) = y\ \text{або}\ yx' - x = y^2.$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $x(y)$. Інтегруємо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$yx' - x = 0,\ \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,\ \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y},\ \ln|x| = \ln|y| + \ln|C|.$$

Таким чином, загальним розв'язком однорідного рівняння є $x = Cy$. Шукаємо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої, тобто у вигляді $x = C(y)y$, звідки $x' = C'(y)y + C(y)$. Підставляючи в неоднорідне лінійне (відносно x) рівняння для x та x', дістанемо

$$C'(y)y^2 + yC(y) - C(y)y = y^2, \text{ звідки } C'(y) = 1,\ C(y) = y + C.$$

Відповідь: $x = (y + C)y$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
55. $xy' - y = x^2 \cos x$.	$y = x(\sin x + C)$.
56. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.	$y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$.
57. $(1 + x^2)y' + y = arctg\, x$.	$y = arctg\, x - 1 + Ce^{-arctg\, x}$.
58. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x;\ y(0) = 0$.	$y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$.
59. $y'\sin x - y\cos x = 1;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.	$y = -\cos x$.
60.* $y'(x + \ln y) = y$.	$x = Cy - 1 - \ln y$.
61. $y' + 3y\, tg\, 3x = \sin 6x;\ y(0) = \dfrac{1}{3}$.	$y = \cos 3x\left(1 - \dfrac{2}{3}\cos 3x\right)$.
62.* $(2xy + 3)dy - y^2 dx = 0$.	$x = Cy^2 - \dfrac{1}{y}$.
63.* $(y^4 + 2x)y' = y$.	$x = Cy^2 + \dfrac{y^4}{2}$.
64. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{3}{4}}$.	$y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \dfrac{3}{7}x^3$.
65. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.	$y^{-\frac{1}{2}} - tg\, x = \dfrac{\ln\cos x + C}{x}$.
66. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.	$y^{-4} = x^3(e^x + C)$.
67. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y};\ y(0) = \dfrac{9}{4}$.	$y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.
68.* $ydx + (x + x^2 y^2)dy = 0$.	$x = \dfrac{1}{y(y + C)}$.
69. $y' - 2y\, tg\, x + y^2 \sin^2 x = 0$.	$y = \dfrac{\sec^2 x}{tg\, x - x + C}$.
70.* $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0;\ y(1) = 0$.	$x^2 + y^2 = e^{-y}$.

Вказівка. В рівняннях, позначених зіркою, взяти x за функцію.

1.7. Рівняння, що не розв'язані відносно похідної

Розв'язок цих рівнянь легко одержати в параметричній формі, якщо покласти $y' = p$ та розглядати p як параметр, через який слід виразити x та y. Дійсно, покладаючи $y' = p$ в рівнянні $x = \varphi(y')$, дістанемо відразу вираз для x через параметр p: $x = \varphi(p)$. Звідси диференціюванням знаходимо $dx = \varphi'(p)dp$, а із того, що $\dfrac{dy}{dx} = p, dy = pdx = p\varphi'(p)dp$, інтегруванням одержимо y: $y = \int p\varphi'(p)dp + C$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння $x = \varphi(y')$, поданий в параметричній формі, має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(p); \\ y = \int p\varphi'(p)dp + C. \end{cases}$$

Аналогічно, покладаючи $y' = p$ в рівнянні $y = \varphi(y')$, одержуємо $y = \varphi(\rho)$. Диференціювання дає $dy = \varphi'(p)dp$, а оскільки, як і в попередньому випадку, $dy = pdx$, маємо $pdx = \varphi'(p)dp$. Звідси випливає, що $dx = \dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$, а x знаходиться інтегруванням:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C.$$

Загальний розв'язок рівняння $y = \varphi(y')$ подається в формі

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(p)dp}{p} + C; \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

В обох випадках можна виключити (якщо це вдається) параметр p й знайти зв'язок між x, y та C, тобто дістати загальний інтеграл рівняння.

71. Розв'язати рівняння $x = 2(\ln y' - y')$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Тоді $x = 2(\ln p - p)$. Диференціюємо цю рівність: $dx = 2\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)dp$. Одержаний вираз для dx підставляємо в рівність $dy = pdx$:

$$dy = 2(1 - p)dp, \text{ тобто } y = \int 2(1 - p)dp = -(1 - p)^2 + C.$$

Загальний розв'язок даного рівняння записується в параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2(\ln p - p); \\ y = C - (1 - p)^2. \end{cases}$$

72. Розв'язати рівняння $y = e^{y'}(y' - 1)$.

Розв'язання. Покладемо $y'=p$, тоді $y=e^p(p-1)$. Диференціюємо останню рівність: $dy=pe^p dp$; підставляємо в ліву частину $dy=pdx$: $pdx=pe^p dp$. Звідси після скорочення на p та інтегрування одержуємо

$$x=\int e^p dp=e^p+C.$$

Відповідь: $\begin{cases} x=e^p+C, \\ y=e^p(p-1). \end{cases}$

Зауважимо, що тут легко виключити параметр p. Дійсно, з першої рівності маємо $p=\ln(x-C)$. Підставимо вираз для p у другу рівність. Дістанемо загальний розв'язок даного рівняння: $y=(x-c)[\ln(x-c)-1]$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
73. $x=y'\sin y'+\cos y'$.	$\begin{cases} x=p\sin p+\cos p, \\ y=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C. \end{cases}$
74. $\arcsin\dfrac{x}{y'}=y'$.	$\begin{cases} x=p\sin p, \\ y=(p^2-1)\sin p+p\cos p+C. \end{cases}$
75. $x=2y'+3y'^2$.	$\begin{cases} x=2p+3p^2, \\ y=2p^3+p^2+C. \end{cases}$
76. $x=e^{2y'}(2y'^2-2y'+1)$.	$\begin{cases} x=e^{2p}(2p^2-2p+1), \\ y=e^{2p}(2p^3-3p^2+3p-1{,}5)+C. \end{cases}$
77. $y'=arctg\dfrac{y}{y'^2}$.	$\begin{cases} y=p^2 tg\, p, \\ x=p\,tg\, p-\ln\cos p+C. \end{cases}$
78. $y=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}=y'$.	$\begin{cases} x=\ln\left|\left(\sqrt{1+p^2}-1\right)/p\right|+p/\sqrt{1+p^2}+C, \\ y=p/\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$
79. $x=y'(1+e^{y'})$.	$\begin{cases} x=p(1+e^p), \\ y=0{,}5p^2+(p^2-p+1)e^p+C. \end{cases}$
80. $y=y'\ln y'$.	$\begin{cases} x=0{,}5\ln^2 p+\ln p+C, \\ y=p\ln p. \end{cases}$

1.8. Рівняння Клеро

Рівнянням Клеро називається рівняння вигляду

$$y=xy'+\varphi(y').$$

Щоб його розв'язати, покладемо $y' = p$, тоді

$$y = xp + \varphi(p).$$

Візьмемо похідну за x від обох частин одержаної рівності:

$$y' = xp' + p + \varphi'(p)p', \text{ або } p = xp' + p + \varphi'(p)p'.$$

Таким чином, маємо $p'(x + \varphi'(p)) = 0$. Це рівняння має два розв'язки:

а) $p' = 0$ або $p = C$. Підставимо $p = C$ у вираз для y й дістанемо загальний розв'язок рівняння Клеро $y = Cx + \varphi(C)$;

б) $x + \varphi'(p) = 0$. Разом з $y = xp + \varphi(p)$ ця рівність є розв'язком рівняння Клеро в параметричній формі, який не може бути одержаний із загального розв'язку $y = Cx + \varphi(C)$ ні при якому значенні C.

Отже, розв'язок $\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = xp + \varphi(p) \end{cases}$ – це особливий розв'язок рівняння Клеро.

Відомо, що рівняння обвідної однопараметричної сім'ї кривих $\Phi(x, y, C) = 0$ може бути одержане виключенням параметра C із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Якщо розглядати загальний розв'язок рівняння Клеро як однопараметричну сім'ю прямих, тобто $\Phi(x, y, C) = y - Cx - \varphi(C) = 0$, то (згідно з вищезазначеним) її обвідна визначається системою $\begin{cases} y - Cx - \varphi(C) = 0; \\ -x - \varphi'(C) = 0. \end{cases}$

Але це та ж сама система, що й $\begin{cases} y = xp + \varphi(p); \\ x = -\varphi'(p) \end{cases}$, в якій $p = C$.

Таким чином, особливий розв'язок рівняння Клеро є обвідною однопараметричної сім'ї прямих, яку визначає загальний розв'язок (іншими словами, загальний розв'язок рівняння Клеро – це сім'я дотичних до кривої, яка є графіком особливого розв'язку).

Рівнянням Лагранжа називається рівняння, що має вигляд

$$y = xf(y') + \varphi(y').$$

Для розв'язання рівняння Лагранжа покладемо $y' = p$, тоді $y = xf(p) + \varphi(p)$. Диференціюємо останню рівність:

$$y' = f(p) + \lfloor xf'(p) + \varphi'(p) \rfloor p', \text{ або } p - f(p) = \lfloor xf'(p) + \varphi'(p) \rfloor p'.$$

Деякі розв'язки останнього рівняння знаходяться одразу, оскільки воно перетворюється в тотожність для кожного числа $p = p_0$, яке задовольняє рівнянню $p - f(p) = 0$.

Щоб знайти розв'язок рівняння Лагранжа, який відповідає зазначеному $p = p_0$, достатньо у виразі для y замінити p на p_0, тобто $y = xf(p_0) + \varphi(p_0)$.

Якщо цей розв'язок не може бути одержаний із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої, то він є особливим розв'язком.

Знайдемо тепер загальний розв'язок. З цією метою запишемо рівняння $p - f(p) = [xf'(p) + \varphi'(p)]p'$ у вигляді $\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{xf(p)}{p - f(p)} = \dfrac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$. Це лінійне рівняння відносно функції $x(p)$.

Розв'язуючи його, знаходимо $x = F(p,C)$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння Лагранжа одержуємо у формі

$$\begin{cases} x = F(p,C); \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p,C)f(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

Зауважимо, що рівняння Клеро є окремим випадком рівняння Лагранжа (коли $f(y') = y'$).

81. Розв'язати рівняння $y = xy' - e^{y'}$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Покладемо $y' = p$ та перепишемо його в формі $y = xp - e^p$. Диференціювання останнього дає $y' = p + xp' - e^p \cdot p'$ або $p = p + (x - e^p)p'$, тобто $(x - e^p)p' = 0$. Це рівняння має два розв'язки:

а) $p' = 0$, $p = C$. Загальним розв'язком рівняння є $y = Cx - e^C$;

б) $x - e^p = 0$, $x = e^p$. Одержуємо особливий розв'язок даного рівняння в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = e^p; \\ y = xp - e^p = e^p p - e^p. \end{cases}$$

Виключаємо параметр p $(p = \ln x)$ й знаходимо особливий розв'язок в явному вигляді: $y = x(\ln x - 1)$.

82. Розв'язати рівняння $y = xy'^2 + y'^2$.

Розв'язання. Маємо рівняння Лагранжа. Покладемо $y' = p$, дістанемо

$$y = xp^2 + p^2.$$

Візьмемо похідну за x:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx},\ p - p^2 = [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}\ (*).$$

Знайдемо особливі розв'язки. Оскільки $p - p^2 = 0$ при $p = 0$ та $p = 1$, то такими розв'язками будуть $y = x \cdot 0^2 + 0^2$, тобто $y = 0$ та $y = x + 1$.

Остаточно дізнаємося, чи справді ці розв'язки є особливими (вони можуть виявитися й частинними), коли знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Щоб знайти загальний розв'язок рівняння (*), запишемо його у вигляді

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{2p}{p-p^2}=\frac{2}{1-p}.$$

Це лінійне рівняння відносно функції $x(p)$. Розв'язуючи його, визначаємо:

$$x=-1+\frac{C^2}{(p-1)^2}.$$

Виключаючи p із системи $\begin{cases} x=-1+\dfrac{C^2}{(p-1)^2}; \\ y=xp^2+p^2, \end{cases}$

знаходимо загальний розв'язок: $y=\left(C+\sqrt{x+1}\right)^2$.

Дане рівняння має особливий розв'язок $y=0$, оскільки цей розв'язок не одержується із загального при жодному значенні C.

Що стосується функції $y=x+1$, то вона не є особливим розв'язком, оскільки одержується із загального розв'язку при $C=0$, тобто є частинним розв'язком.

Розв'язати рівняння:		Відповіді:
83.	$y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$.	$y=Cx+\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=1$.
84.	$x=\dfrac{y}{y'}+\dfrac{1}{y'^2}$.	$y=Cx-\dfrac{1}{C}$; $y^2=-4x$.
85.	$y=x\left(\dfrac{1}{x}+y'\right)+y'^2$.	$y=Cx+C^2+1$; $y=1-\dfrac{x^2}{4}$.
86.	$y=xy'+y'-y'^2$.	$y=Cx+C(1-C)$; $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$.
87.	$y=xy'-y'^2$.	$y=Cx-C^2$; $y=\dfrac{x^2}{4}$.
88.	$y=xy'+\dfrac{1}{2y'^2}$.	$y=Cx+\dfrac{1}{2C^2}$; $y=1{,}5x^{\frac{2}{3}}$.
89.	$2y(y'+1)=xy'^2$.	$y=\dfrac{(x-C)^2}{2C}$; $y=0$, $y=-2x$.
90.	$y=x(1+y')+y'^2$.	$x=Ce^{-p}-2p+2$; $y=C(p+1)e^{-p}-p^2+2$.
91.	$y=xy'^2+2xy'$.	$(y-C)^2=4Cx$.
92.	$y=2xy'+y'^2$.	$x=\dfrac{C}{3p^2}-\dfrac{2}{3}p$; $y=\dfrac{2C-p^3}{3p}$.
93.	$y=\dfrac{1}{2}x\left(y'+\dfrac{4}{y'}\right)$.	$y=Cx^2+\dfrac{1}{C}$; $y^2=4x^2$.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Загальні поняття

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Якщо це рівняння може бути розв'язане відносно старшої похідної, то воно набуває форми

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Розв'язком рівняння n-го порядку називається будь-яка n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність, тобто

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0.$$

Задача Коші для рівняння n-го порядку полягає в пошуці розв'язку цього рівняння, який задовольняє умову при $x = x_0$: $y = y_0$, $y' = y_0'$, …, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, де $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, що називаються *початковими умовами*.

Загальним розв'язком рівняння n-го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, і має такі властивості:

а) вона задовольняє рівнянню при будь-яких значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (із деякої множини);

б) якщо задано початкові умови

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_0',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}_{(x_0)} = y_0^{(n-1)},$$

можна знайти такі значення довільних сталих $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, …, $C_n = C_n^0$, що функція $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$ задовольняє ці умови.

Загальний розв'язок рівняння n-го порядку, поданий в неявній формі $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Будь-яка функція, одержана із загального розв'язку конкретизуванням довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (зокрема, всякий розв'язок задачі Коші), називається частинним розв'язком рівняння. Графік частинного розв'язку називається *інтегральною кривою* даного диференціального рівняння.

Розв'язання (інтегрування) диференціального рівняння n-го порядку полягає в знаходженні:

а) загального розв'язку, якщо початкові умови не задано;

б) частинного розв'язку, який задовольняє початкові умови, якщо їх задано.

2.2. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння вигляду $y^{(n)}=f(x)$. Загальний розв'язок такого рівняння одержується його інтегруванням *n* разів, а саме:

$$y^{(n)}=f(x),\ y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2,$$

....

$$y=\underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{\text{n разів}}f(x)dx^n+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

94. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=\sin 2x$, який задовольняє початкові умови $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y'=\int\sin 2x dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C_1,$$

$$y=\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}+C_1\right)dx=-\frac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2.$$

Отже, $y=-\dfrac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2$ – це загальний розв'язок.

Щоб знайти частинний розв'язок, який задовольняє умови $y(0)=0,\ y'(0)=1$, достатньо визначити відповідні значення C_1 та C_2. Із умови $y(0)=0$ знаходимо $C_2=0$, а із умови $y'(0)=1$ визначаємо $C_1=\dfrac{3}{2}$.

Таким чином, шуканим частинним розв'язком є

$$y=-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3}{2}x.$$

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
95. $y^{IV}=\cos^2 x;\ y(0)=\frac{1}{32};\ y'(0)=0;$ $y''(0)=\frac{1}{8};\ y'''(0)=0.$	$y=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{32}\cos 2x.$
96. $y'''=x\sin x;\ y(0)=0;\ y'(0)=0;\ y''(0)=2.$	$y=x\cos x-3\sin x+x^2+2x.$
97. $y'''\sin^4 x=\sin 2x.$	$y=\ln\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3.$

98. $y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$. $\qquad y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C_1 x + C_2$.

99. $y''' = xe^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 2; y''(0) = 2$. $\qquad y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$.

Рівняння вигляду *$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)})=0$*, що не містять шуканої функції. В такому рівнянні можна знизити порядок, якщо взяти за нову невідому функцію найнижчу похідну, яка входить в це рівняння, тобто $z = y^{(k)}$. Тоді $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$, а рівняння перетворюється в рівняння $(n-k)$-го порядку відносно функції $z(x)$:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

100. Розв'язати рівняння $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

Розв'язання. Покладемо $y' = z$, тоді $y'' = z'$. Рівняння набуває форми $(1+x^2)z' + z^2 + 1 = 0$. Це рівняння першого порядку з подільними змінними. Відокремимо їх: $(1+x^2)\frac{dz}{dx} + z^2 + 1 = 0$, $\frac{dz}{1+z^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$. Далі маємо $\int\frac{dz}{1+z^2} + \int\frac{dx}{1+x^2} = arctgC_1$ (тут зручно сталу інтегрування записати саме в такому вигляді). Інтегруючи, знаходимо

$$arctg\, z + arctg\, x = arctgC_1, \text{ або } arctg\, z = arctgC_1 - arctg\, x.$$

Перетворимо останній вираз:

$$z = tg(arctgC_1 - arctg\, x), \text{ або } z = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

Повертаючись до шуканої функції y, одержуємо рівняння

$$y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x},$$

звідки

$$y = \int\frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}dx + C_2 = -\frac{1}{C_1}\int dx + \frac{C_1^2 + 1}{C_1}\int\frac{dx}{1 + C_1 x} + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{C_1}x + \frac{C_1^2 + 1}{C_1^2}\ln|1 + C_1 x| + C_2.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{C_1}x + \frac{C_1^2 + 1}{C_1^2}\ln|1 + C_1 x| + C_2$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
101. $y' + \frac{1}{4}y''^2 = xy''$.	$y = C_1x(x - C_1) + C_2;\ y = \frac{x^3}{3} + C$ (особливий розв'язок).
102. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.	$y = \left(C_1x - C_1^2\right)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2;\ y = \frac{e}{2}x^2 + C$ (особливий розв'язок).
103. $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$.	$y = (\arcsin x)^2 + C_1\arcsin x + C_2$.
104. $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.	$y = x^3 + 3x$.
105. $x^2y'' + xy' = 1$.	$y = \frac{1}{2}\ln^2\lvert x\rvert + C_1\ln\lvert x\rvert + C_2$.
106. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$.	$y = \left(C_1e^x + 1\right)x + C_2$.
107. $xy'' + y' = 0$.	$y = C_1 + C_2\ln\lvert x\rvert$.
108. $xy'' = y';\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0$.	$y = x^2$.
109. $xy''' + y'' = 1 + x$.	$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\ln\lvert x\rvert + C_2x + C_3$.

Рівняння вигляду $F(y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$, що не містять незалежної змінної. Таке рівняння допускає зниження порядку, якщо покласти $y' = z(y)$, де нова функція z є функцією змінної y. В цьому випадку $y'', y''', \ldots$ будуть знайдені за формулами (де використовується правило диференціювання складеної функції)

$$y'' = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},\ y''' = \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{dy}{dx} + z\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx} = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right], \ldots$$

як функції від z та її похідних за змінною y. Порядок рівняння у такий спосіб буде знижений на одиницю.

110. Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 - 4yy' = 0$.

Розв'язання. Покладемо $y' = z$, де z - функція від y. Тоді $y'' = \frac{dz}{dy}z$, а рівняння набуває форми

$$y\frac{dz}{dy}z - z^2 - 4yz = 0,\ \text{або}\ z\left(y\frac{dz}{dy} - z - 4y\right) = 0.$$

Рівняння $y\frac{dz}{dy}-z-4y=0$, або $\frac{dz}{dy}=4+\frac{z}{y}$,–однорідне. Здійснивши заміну $z=uy$, знаходимо $\frac{dz}{dy}=u+\frac{du}{dy}y$, звідки маємо:

$u+\frac{du}{dy}y=4+u$, $\frac{du}{dy}y=4$, $\frac{du}{dy}=\frac{4}{y}$, $u=\int\frac{4}{y}dy=4\ln|y|+4\ln|C_1|$, $\frac{z}{y}=4\ln|C_1y|$, $z=4y\ln|C_1y|$.

Таким чином, прийшли до рівняння першого порядку відносно функції y: $y'=4y\ln|C_1y|$, що є рівнянням з подільними змінними. Інтегруємо його й одержуємо загальний розв'язок $\ln|\ln|C_1y||=4x+C_2$. Сюди треба додати розв'язок, одержаний інтегруванням рівняння $z=0$, тобто $y'=0$, що дає $y=C$.

Відповідь: загальним розв'язком є $\ln|\ln|C_1y||=4x+C_2$, особливим - $y=C$.

Розв'язати рівняння:		Відповіді:
111.	$1+y'^2=yy''$.	$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right)=\pm(x+C_2)$.
112.	$yy''=y'^2$.	$y=C_1e^{C_2x}$.
113.	$yy''+y'^2=0$.	$y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$.
114.	$y'\left(1+y'^2\right)=y''$.	$(x-C_1)=\ln|\sin(y-C_2)|$.
115.	$yy''=y^2y'+y'^2$.	$x=\frac{1}{C_1}\ln\left\|\frac{y}{y+C_1}\right\|+C_2; y=C$ (особливий розв'язок).
116.	$yy''-y'(1+y')=0$.	$y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$.
117.	$yy''+y'^2=y'^3; y(0)=1; y'(0)=1$.	$y=x+1$.
118.	$1+y'^2=2yy''; y(1)=1; y'(1)=1$.	$y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$.

Рівняння вигляду $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$, однородні відносно y, y', y'', ..., $y^{(n)}$. Якщо функція $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ така, що $F\left(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'',\ldots,\lambda y^{(n)}\right)\equiv\lambda^k F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(k)}\right)$, то порядок рівняння можна знизити на одиницю за допомогою заміни $\frac{y'}{y}=z$, де z є новою невідомою функцією від x.

119. Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.

Розв'язання. Ліва частина рівняння є однорідною функцією відносно змінних y, y' та y''. Зробимо заміну $\frac{y'}{y} = z$, $y' = zy$, $y'' = z'y + zy'$, $\frac{y''}{y} = z' + z\frac{y'}{y} = z' + z^2$. Поділимо обидві частини даного рівняння на y^2:

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 0.$$

Перейдемо до нової функції z:

$$z' + z^2 - z^2 = 0, z' = 0, z = C_1.$$

Повернемося до функції y:

$$\frac{y'}{y} = C_1, \frac{dy}{y} = C_1 dx, \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|.$$

Відповідь: $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
120. $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.	$y = C_2 \cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$.
121. $y'^2 + yy'' = yy'$.	$\frac{1}{2}y^2 = C_1 e^x + C_2$.
122. $(y + y')y'' + y'^2 = 0$.	$y\sqrt{y^2 + C_1^2} + C_1^2 \ln\left(y + \sqrt{y^2 + C_1^2}\right) = \pm\left(-y^2 + 2C_1^2 x + 3C_2\right)$
123. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.	$y^2 = C_1 x^4 + C_2$.

Інтегральні комбінації. Нехай, наприклад, задано рівняння другого порядку $y'^2 + yy'' = 0$. Зазначимо, що для його інтегрування ліву частину можна переписати у вигляді $y'^2 + yy'' = (yy')'$, звідки $(yy')' = 0$, $yy' = C_1$, $ydy = C_1 dx$, $\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$.

Інше рівняння $y'^2 - yy'' = 0$ легко проінтегрувати в аналогічний спосіб, якщо попередньо поділити обидві його частини на y^2:

$$\frac{y'^2 - yy''}{y^2} = 0,\ -\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0,\ \frac{y'}{y} = C_1,\ \frac{dy}{y} = C_1 dx,\ \ln|y| = C_1 x + \ln C_2,\ y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Вирази типу $y'^2 + yy''$, $\frac{y'^2 - yy''}{y^2}$ називають *інтегральними комбінаціями*. Їх наявність в диференціальному рівнянні дозволяє певною заміною знизити порядок цього рівняння (у двох попередніх прикладах можна було зробити відповідно заміни $z = yy'$ та $z = \frac{y'}{y}$).

124. Розв'язати рівняння $xy'' = (e^y - 1)y'$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $xy'' + y' - e^y y' = 0$. Зробимо заміну $xy' - e^y = z$. Візьмемо похідну $z' = xy'' + y' - e^y y'$. Рівняння перетворюється в таке (відносно нової функції z):

$$z' = 0,\ z = C_1,\ xy' - e^y = C_1,\ \frac{dy}{e^y + C_1} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{dy}{e^y + C_1} = \int\frac{dx}{x}.$$

Інтегруванням ($\int\frac{dy}{e^y + C_1}$ знаходиться заміною $e^y + C_1 = t$) одержуємо загальний інтеграл $\frac{e^y}{e^y + C_1} = (C_2 x)^{C_1}$.

Зауваження. У цьому пункті не йде мова про метод розв'язування певного типу рівнянь. Він є тільки ілюстрацією того, як можна використати особливість конкретного рівняння.

Розв'язати рівняння за допомогою відповідної заміни $yy' = z$, $y'^2 = z$, $xy' = z$, $\frac{y'}{y} = z$ тощо:	Відповіді:
125. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.	$y^2 = C_1 x^4 + C_2$.
126. $yy'' + (y')^2 = x$.	$y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2}$.
127. $x^2 yy'' - (xy' - y)^2 = 0$.	$y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}$.
128. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 0$.	$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$.
129. $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$.	$\ln\lvert y + C_1\rvert + \frac{C_1}{y + C_1} = x + C_2$.

2.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Функції $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ та $f(x)$ задані і неперервні на деякому інтервалі $]a,b[$.

Якщо $f(x) \neq 0$, рівняння називається лінійним *неоднорідним*, або рівнянням з правою частиною. Якщо ж $f(x) \equiv 0$, то рівняння має назву лінійного *однорідного*.

Лінійні однорідні рівняння. Одна із найважливіших властивостей лінійного однорідного рівняння полягає в тому, що його загальний розв'язок може бути знайдений виходячи з певного числа частинних розв'язків цього рівняння. Наведемо теорему щодо структури загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.

Теорема. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є лінійно незалежними частинними розв'язками рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

то $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ (де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі) є загальним розв'язком цього рівняння.

Необхідна та достатня умова лінійної незалежності n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійного однорідного рівняння полягає в тому, що визначник Вронського $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу $]a,b[$, тобто

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Множина n частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку, які визначені та лінійно незалежні на інтервалі $]a,b[$, називається *фундаментальною системою* розв'язків цього рівняння.

Для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

фундаментальна система складається з двох лінійно незалежних його частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$, а загальний розв'язок подається формулою

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$ лінійного однорідного рівняння другого порядку, то другий частинний розв'язок, лінійно незалежний від першого, може бути знайдений за формулою

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

130. Функції $y_1=1$, $y_2=e^x$, $y_3=e^{-x}$ задовольняють рівнянню $y'''-y'=0$ (в цьому легко переконатись). Чи утворюють вони фундаментальну систему розв'язків даного рівняння?

Розв'язання. Щоб перевірити лінійну незалежність вказаних функцій, обчислимо визначник Вронського:

$$W[y_1,y_2,y_3]=\begin{vmatrix}1 & e^x & e^{-x}\\ 0 & e^x & -e^{-x}\\ 0 & e^x & e^{-x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x & -e^{-x}\\ e^x & e^{-x}\end{vmatrix}=2\neq 0,\ x\in\left]-\infty,+\infty\right[.$$

Отже, розв'язки $y_1=1$, $y_2=e^x$, $y_3=e^{-x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння, а загальний розв'язок має вигляд

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}.$$

131. Розв'язати рівняння $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ за умови, що відомий його частинний розв'язок $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Знайдемо другий частинний розв'язок:

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння є функція

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}.$$

132. Показати, що $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ є загальним розв'язком рівняння $y''-9y=0$.

133. Функції $y_1=sh x$, $y_2=ch x$ задовольняють рівнянню $y''-y=0$. Чи утворюють вони фундаментальну систему розв'язків цього рівняння?

Відповідь: утворюють.

134. Рівняння $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=0$ має частинний розв'язок $y_1=x$. Знайти його загальний розв'язок.

Відповідь: $y = C_1 x + C_2 x \ln x$.

135. Рівняння $y'' + (tg\,x - 2ctg\,x)y' + 2ctg^2 x \cdot y = 0$ має частинний розв'язок $y_1 = \sin x$. Знайти його загальний розв'язок.

Відповідь: $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$.

Зауваження. Слід зазначити, що окрім випадку, коли всі функції $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ є сталими, не існує загального методу знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$, навіть для рівняння другого порядку.

2.4. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - довільні дійсні числа.

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків такого рівняння, записують його *характеристичне рівняння*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

яке одержується шляхом заміни похідних шуканої функції в диференціальному рівнянні відповідними степенями k (зазначимо, що саму функцію y вважають при цьому похідною нульового порядку від самої себе). Останнє рівняння є алгебричним рівнянням n-го степеня, яке має n коренів (дійсних чи комплексних, серед яких можуть бути рівні між собою).

Загальний розв'язок диференціального рівняння в цьому випадку буде залежати від характеру коренів його характеристичного рівняння, а саме:

1) кожному дійсному простому кореневі k в загальному розв'язку відповідає доданок типу Ce^{kx};

2) кожному дійсному кореневі k кратності m відповідає в загальному розв'язку вираз типу $(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1})e^{kx}$ із m доданків;

3) кожній парі комплексних спряжених простих коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ в загальному розв'язку відповідає вираз типу $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

4) кожній парі комплексних спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратності m відповідає в загальному розв'язку вираз типу $e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1})\cos \beta x + (\overline{C}_1 + \overline{C}_2 x + \ldots + \overline{C}_m x^{m-1})\sin \beta x\right]$ із $2m$ доданків.

136. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 7k + 6 = 0$, його коренями є $k_1 = 1$ та $k_2 = 6$. Отже, фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння є $y_1 = e^x$ та $y_2 = e^{6x}$, а загальним розв'язком - $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

137. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$, його коренями є $k_1 = -3$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$, а загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}$.

138. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння: $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$, або $(k+1)^3 = 0$, тобто $k = -1$ є коренем кратності 3 характеристичного рівняння. Фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння складають функції $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = x^2 e^{-x}$, а загальним розв'язком є функція

$$y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right).$$

139. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ має два прості комплексні спряжені корені $k_{1,2} = 2 \pm 3i$, фундаментальна система складається із функцій $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ та $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

140. Розв'язати рівняння $y^{IV} + y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 + 1 = 0$ має чотири корені: $k_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Фундаментальна система розв'язків складається із функцій $y_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $y_2 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $y_3 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$y_4 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$, а загальним розв'язком є

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

141. Розв'язати рівняння $y^{IV} + 4y''' + 14y'' + 20y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4+4k^3+14k^2+20k+25=0$, або $\left(k^2+2k+5\right)^2=0$, має пару спряжених коренів $-1\pm 2i$, кожний з яких – кратності два, тобто $k_{1,2,3,4}=-1\pm 2i$. Фундаментальна система розв'язків формується із функцій $y_1=e^{-x}\cos 2x$, $y_2=e^{-x}\sin 2x$, $y_3=xe^{-x}\cos 2x$, $y_4=xe^{-x}\sin 2x$, тоді

$$y=e^{-x}\left[\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x\right]-$$

загальний розв'язок.

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
142. $y''+y'-2y=0$.	$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$.
143. $y''-3y'=0$.	$y=C_1+C_2e^{3x}$.
144. $3y''-2y'-8y=0$.	$y=C_1e^{-\frac{4}{3}x}+C_2e^{2x}$.
145. $y''+4y=0$.	$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
146. $y''+6y'+13y=0$.	$y=e^{-3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 3x\right)$.
147. $y''+2y'+y=0$.	$y=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$.
148. $y''-4y'+3y=0;\ y(0)=6,\ y'(0)=10$.	$y=4e^{x}+2e^{3x}$.
149. $y''+4y'+29y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=15$.	$y=3e^{-2x}\sin 5x$.
150. $4y''+4y'+y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=0$.	$y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.
151. $y^{IV}-16y=0$.	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+$ $+C_2\sin 2x$.
152. $y'''-3y''+3y'-y=0$.	$y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3x^2e^{x}$.

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, тобто рівняння з правою частиною

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$$

визначається такою теоремою.

Теорема. Якщо $u=u(x)$ є частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння, а $y_1,y_2,\ldots,y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+U(x)$; іншими словами, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою будь-якого частинного розв'язку цього рівняння та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Отже, щоб записати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, потрібно знайти один із його частинних розв'язків (припускаючи, що загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння уже відомий).

Розглянемо два методи знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

Метод варіації довільних сталих. Цей метод використовується для знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку як зі сталими коефіцієнтами, так і зі змінними за умови, що відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Метод варіації полягає в такому. Нехай відома фундаментальна система розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ відповідного однорідного рівняння. Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$U(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

де $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ визначаються із системи

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

($f(x)$ - права частина даного рівняння).

Ця система є лінійною неоднорідною алгебричною системою n рівнянь із n невідомими $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

є визначником Вронського функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тобто $\Delta = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, і він відмінний від нуля. Останнє означає, що система має єдиний розв'язок, який може бути знайдений, наприклад, за формулами Крамера. Знайшовши цей розв'язок $C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$, інтегруванням визначаємо функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$: $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1$, $C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2, \ldots, C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + \overline{C}_n$, де $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ – сталі інтегрування, які можна покласти, наприклад, рівними нулю (оскільки нам потрібний який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння). Таким чином буде знайдений частинний розв'язок

$$U(x)=y_1\int\varphi_1(x)dx+y_2\int\varphi_2(x)dx+\ldots+y_n\int\varphi_n(x)dx.$$

153. Розв'язати рівняння $y''+y=tg\,x$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тобто $y''+y=0$. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має два корені $k_{1,2}=\pm i$, тому загальним розв'язком останнього рівняння є функція $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Будемо шукати частинний розв'язок початкового рівняння $U(x)$ у вигляді $U(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, де функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ визначаються із системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0; \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x), \end{cases} \text{ в нашому випадку } \begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0; \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=tg\,x. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо $C_1'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2'(x)=\sin x$, звідки

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+\overline{C}_1=\sin x-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\overline{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int\sin x\,dx+\overline{C}_2=-\cos x+\overline{C}_2.$$

Отже, $U(x)=\left(\sin x-\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x+(-\cos x)\sin x \quad (\overline{C}_1=\overline{C}_2=0)$,

або, після спрощення, $U(x)=-\cos x\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

Таким чином, загальним розв'язком даного рівняння є $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

Метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод застосовується тільки для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і виключно у випадку, коли права частина має спеціальну форму:

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$$

(або є сумою функцій цього типу), де α і β - сталі, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - багаточлени степенів n і m відповідно.

Частинний розв'язок рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

(де $f(x)$ має вказану форму, а $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - сталі дійсні коефіцієнти) будемо шукати у вигляді

$$U(x)=x^re^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x),$$

де r дорівнює кратності кореня $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (якщо характеристичне рівняння не має такого кореня, то треба покласти $r = 0$); $P_l(x)$ і $Q_l(x)$ - багаточлени l-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, де l дорівнює більшому із чисел n та m ($l = n \geq m$ або $l = m \geq n$):

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + Al;\ Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + Bl.$$

Підкреслимо, що багаточлени $P_l(x)$ та $Q_l(x)$ мають бути *повними* (тобто вони повинні містити усі степені x, від нуля до l), з різними невизначеними коефіцієнтами при однакових степенях в обох багаточленах, а також, якщо принаймні одна із функцій $\cos\beta x$ чи $\sin\beta x$ входить у вираз функції $f(x)$, то в $U(x)$ потрібно завжди вводити обидві ці функції.

Невизначені коефіцієнти можна знайти розв'язуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка одержується ототожненням подібних членів лівої та правої частин початкового рівняння після підстановки в нього виразу $U(x)$.

Примітка. Окремі випадки спеціальної правої частини $f(x)$:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$ (A – стала) $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$;
2) $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ (A і B – сталі) $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$;
3) $f(x) = P_n(x)$ (багаточлен n-го степеня) $\{\alpha + \beta i \equiv 0\}$;
4) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$;
5) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$ $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$;
6) $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (A і B – сталі).

Зазначимо, що у випадку, коли права частина рівняння $f(x)$ є сумою декількох різних функцій, кожна з яких має вказану спеціальну форму, для знаходження частинного розв'язку такого рівняння використовують теорему про суперпозицію розв'язків: потрібно знайти частинні розв'язки, які відповідають кожній окремій функції правої частини, і сума цих розв'язків буде частинним розв'язком початкового рівняння.

154. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' - 3y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$ має корені $k_1 = -1, k_2 = 3$. Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Будемо шукати частинний розв'язок початкового рівняння у вигляді $U(x) = Ae^{4x}$ (виходячи з того, що ні синус, ні косинус не входять до правої частини, коефіцієнт при e^{4x} - багаточлен нульового степеня, тобто $l = n = 0$, а $r = 0$, оскільки $\alpha = 4$ не є коренем характеристичного рівняння).

Отже, маємо

$$\begin{array}{r|c|l} & -3 & U = Ae^{4x} \\ + & -2 & U' = 4Ae^{4x} \\ & 1 & U'' = 16Ae^{4x} \\ \hline \end{array}.$$

$$u'' - 2u' - 3u = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x},$$

звідки $5A = 1$, тобто $A = \frac{1}{5}$.

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

155. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k - 2 = 0$ має корені $k_{1,2} = 1 \pm i$, звідки загальний розв'язок однорідного рівняння - $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Шукаємо частинний розв'язок початкового рівняння у вигляді $U = Ax^2 + Bx + C$ (в даному випадку $\alpha = 0, \beta = 0, \alpha + \beta i = 0$; із того, що 0 не є коренем характеристичного рівняння, $r = 0; n = l = 2$). Отже,

$$\begin{array}{r|c|c} & 2 & U = Ax^2 + Bx + C \\ + & -2 & U' = 2Ax + B \\ & 1 & U'' = 2A \\ \hline \end{array}$$

$$U'' - 2U' + 2U = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2.$$

Звідси $2A = 1$, $2B - 4A = 0$, $2C - 2B + 2A = 0$, тобто $A = \frac{1}{2}, B = 1, C = \frac{1}{2}$.

Таким чином, загальним розв'язком початкового рівняння є

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

156. Розв'язати рівняння $y''' + y'' - y' = x - e^x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 + k^2 - 2k = 0$ має корені $k_1 = -2, k_2 = 0, k_3 = 1$, отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є $y = C_1e^{-2x} + C_2 + C_3e^x$. Будемо шукати частинний розв'язок даного рівняння, застосовуючи принцип суперпозиції, у вигляді $U = U_1 + U_2 = x(Ax + B) + Cxe^x$.

Далі маємо

$$
+\left|\begin{array}{c|c}
0 & U=(Ax+B)x+Cxe^{x} \\
-2 & U'=2Ax+B+Ce^{x}+Cxe^{x} \\
1 & U''=2A+2Ce^{x}+Cxe^{x} \\
1 & U'=3Ce^{x}+Cxe^{x}
\end{array}\right.
$$

$$
U'''+U''-2U'=-4Ax+(2A-3B)+3Ce^{x}\equiv x-e^{x},
$$

звідки $-4A=1, 2A-2B=0, 3C=-1$, тобто $A=-\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{3}$.

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$
y=C_1e^{-2x}+C_2+C_3e^{x}-\frac{1}{4}x(x+1)-\frac{1}{3}xe^{x}.
$$

157. Розв'язати рівняння $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+k-2=0$ має корені $k_1=-2, k_2=1$, а загальним розв'язком однорідного рівняння є $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$. Частинний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді $U=A\cos x+B\sin x$ (в нашому випадку $\alpha=0, \beta=1, \alpha+\beta i=i$; оскільки рівняння $k^2+k-2=0$ не має кореня $k=i$, то $r=0; m=n=0$, тому $l=0$ також).

Отже,

$$
+\left|\begin{array}{c|c}
-2 & U=A\cos x+B\sin x \\
1 & U'=-A\sin x+B\cos x \\
1 & U''=-A\cos x-B\sin x
\end{array}\right.
$$

$$
U''+U'-2U=(B-3A)\cos x+(-3B-A)\sin x\equiv\cos x-3\sin x.
$$

Таким чином, одержуємо систему $\begin{cases} B-3A=1; \\ 3B+A=3, \end{cases}$ звідки $A=0, B=1$.

Маємо загальний розв'язок даного рівняння

$$
y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\sin x.
$$

158. Розв'язати рівняння $y''+y=3\sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, звідки випливає, що загальним розв'язком однорідного рівняння є $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Будемо шукати частинний розв'язок даного рівняння у вигляді $U = x(A\cos x + B\sin x)$ (в даному випадку $\alpha = 0, \beta = i, \alpha + \beta i = i$; оскільки i є простим коренем характеристичного рівняння, то $r = 1; m = n = l = 0$).

Отже, маємо

$$\begin{array}{c|c|l} & 1 & U = (A\cos x + B\sin x)x \\ + & 0 & U' = (-A\sin x + B\cos x)x + (A\cos x + B\sin x) \\ & 1 & U'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + (-A\cos x - B\sin x)x \\ \hline \end{array}$$

$$U'' + U = -2A\sin x + 2B\cos x \equiv 3\sin x,$$

звідки $-2A = 3$, $2B = 0$, тобто $A = -\dfrac{3}{2}, B = 0$.

Таким чином, загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x.$$

Розв'язати рівняння:	Відповіді:
159. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.	$y = e^x\left(C_1 + C_2x - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,arctg\,x\right)$.
160. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.	$y = C_1e^x + C_2 - \cos e^x$.
161. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.	$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}\ln\left(1+e^{2x}\right) - e^{-2x} + e^{-3x}arctg\,e^x$.
162. $y'' + 4y = ctg\,2x$.	$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x\ln tg\,2x$.
163. $y'' + y = ctg\,x$.	$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\cdot\ln\left\lvert tg\dfrac{x}{2}\right\rvert$.
164. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.	$y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x\ln\lvert x\rvert$.
165. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.	$y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^3 + 3x^2$.

166. $y'' - y = e^x$. $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.

167. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$. $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3\sin 2x + \cos 2x)$.

168. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$. $\quad y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{x}{4} e^x \sin 2x$.

169. $y'' + y' = 5x + 2e^x$. $\quad y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x + \frac{5}{2} x^2 - 5x$.

170. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$. $\quad y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^x +$

$+ \frac{1}{37}(\sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{e^x}{9}$.

171. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$. $\quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$.

172. $y'' + 4y = 2\sin 2x -$
$- 3\cos 2x + 1$. $\quad y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4}(3\sin 2x +$

$+ 2\cos 2x) + \frac{1}{4}$.

173. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$. $\quad y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x)$.

174. $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$. $\quad y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}\right) e^{2x}$.

175. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$. $\quad y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + 12x^2 + 3x^3 +$

$+ \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{20} x^5$.

176. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x e^x$. $\quad y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 +$

$+ e^x \left(\frac{3}{2} x - \frac{15}{4}\right)$.

177. $y^{IV} - y = x e^x + \cos x$. $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x +$

$+ \frac{x^2 - 3x}{8} e^x - \frac{1}{4} x \sin x$.

3. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Нормальна система диференціальних рівнянь

Система вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – невідомі функції незалежної змінної x, називається *нормальною* системою диференціальних рівнянь. Якщо праві частини нормальної системи диференціальних рівнянь є лінійними функціями відносно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то система диференціальних рівнянь називається *лінійною*.

У деяких випадках вдається звести нормальну систему диференціальних рівнянь до одного рівняння n-го порядку, яке містить тільки одну невідому функцію. Зведення нормальної системи до одного рівняння здійснюється n-разовим диференціюванням одного із рівнянь системи та виключенням усіх функцій, окрім однієї з них (так званий метод виключення).

Іноді комбінуванням рівнянь системи можна одержати рівняння, які легко інтегруються (метод інтегральних комбінацій), що дозволяє знайти розв'язок системи. Зазначимо, що загальний розв'язок нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку має вигляд

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Для того, щоб знайти частинний розв'язок такої системи, потрібно задати початкові умови:

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

178. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо похідну за x від обох частин першого рівняння: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}$; виключаючи $\frac{dz}{dx}$ та z (з використанням рівнянь системи), маємо $\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0$. Коренями характеристичного рівняння $k^2-2=0$ є числа $k_1=-\sqrt{2}, k_2=\sqrt{2}$. Отже, загальний розв'язок для y має вигляд

$$y=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}.$$

З першого рівняння знаходимо загальний розв'язок для z:

$$z=\frac{dy}{dx}-y=-C_1\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-x\sqrt{2}}+C_2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{x\sqrt{2}}.$$

Таким чином, маємо загальний розв'язок системи:

$$y=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}},$$
$$z=-C_1\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-x\sqrt{2}}+C_2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{x\sqrt{2}}.$$

179. Розв'язати систему

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2y+3z};\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{2y+3z}\end{cases}$$

з початковими умовами $y(0)=1$, $z(0)=2$.

Розв'язання. Перша інтегральна комбінація – поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{dy}{dz}=\frac{y}{z}\ ;\ \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z};\ \ln|y|=\ln|z|+\ln|C_1|,\text{ тобто } y=C_1z.$$

Друга інтегральна комбінація – додамо подвоєне перше рівняння до потроєного другого:

$$2\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}=1;\ 2dy+3dz=dx,\text{ тобто } 2y+3z=x+C_2.$$

Розв'язуючи алгебричну систему

$$\begin{cases}y=C_1z;\\ 2y+3z=x+C_2,\end{cases}$$

знаходимо загальний розв'язок початкової системи:

$$y=\frac{C_1(x+C_2)}{2C_1+3},\ z=\frac{x+C_2}{2C_1+3}.$$

Використовуючи початкові умови, знаходимо

$$\begin{cases} \dfrac{C_1C_2}{2C_1+3}=1; \\ \dfrac{C_2}{2C_1+3}=2, \end{cases} \text{ тобто } C_1=\frac{1}{2},\ C_2=8.$$

Після підстановки в загальний розв'язок значень $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=8$ одержуємо частинний розв'язок даної системи, який задовольняє початкові умови:

$$y=\frac{1}{8}x+1,\ z=\frac{1}{4}x+2.$$

180. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y; \\ \dfrac{dy}{dt}=2z; \\ \dfrac{dz}{dt}=2x. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння за t: $\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dy}{dt}$. Виключаючи $\frac{dy}{dt}$ з одержаного рівняння, маємо $\frac{d^2x}{dt^2}=4z$. Диференціюємо ще раз за t останнє рівняння: $\frac{d^3x}{dt^3}=4\frac{dz}{dt}$; після виключення $\frac{dz}{dt}$ дістанемо $\frac{d^3x}{dt^3}-8x=0$, тобто рівняння, яке містить одну невідому функцію $x(t)$.

Розв'язуючи це лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами, знаходимо

$$x=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(C_2\cos\sqrt{3}t+C_3\sin\sqrt{3}t\right).$$

Загальний розв'язок для y одержуємо із першого рівняння системи:

$$y=\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2t}-e^{-t}\left(C_2\cos\sqrt{3}t+C_3\sin\sqrt{3}t\right)+e^{-t}\sqrt{3}\left(C_3\cos\sqrt{3}t-C_2\sin\sqrt{3}t\right)\right].$$

Нарешті, з другого рівняння системи маємо

$$z=\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}=C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(C_3\sqrt{3}+C_2\right)\cos\sqrt{3}t-\left(C_2\sqrt{3}t-C_3\right)\sin\sqrt{3}t\right].$$

Розв'язати системи: **Відповіді:**

181. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z, \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 3.$ $y = 2e^{3x} - e^{x},$ $z = 2e^{3x} + e^{x}.$

182. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{3x} - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2e^{3x} - y. \end{cases}$ $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{8}e^{3x},$ $z = -C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \dfrac{5}{8}e^{3x}.$

183. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z + \cos x, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + 2\sin x. \end{cases}$ $y = (C_1 + C_2x)e^{x} + \dfrac{1}{2}\cos x,$ $z = [C_2(1-x) - C_1]e^{x} - 2\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x.$

184. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 + yz, \\ \dfrac{dz}{dx} = yz + z^2. \end{cases}$ $y = -[(1 + C_1)x + C_2]^{-1},$ $z = -C_1[(1 + C_1)x + C_2]^{-1}.$

185. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2\dfrac{dz}{dx} - 2(y - z) = 3e^{x}, \\ \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} + 2y + z = 4e^{2x}. \end{cases}$ $y = C_1e^{-6x} + e^{2x} - \dfrac{3}{7}e^{x},$ $z = C_2e^{-x} - \dfrac{4}{5}C_1e^{-6x} + \dfrac{9}{14}e^{x}.$

186. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$ $x^2 = C_1^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2),$ $y^2 = C_2^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2),$ $z^2 = C_3^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2).$

187. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y + 6z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + 3z + x. \end{cases}$ $y = C_1 + C_2e^{7x} - \dfrac{3}{49}x(7x + 2),$ $z = -\dfrac{2}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2e^{7x} + \dfrac{1}{49}(14x^2 - 3x - 1).$

3.2. Розв'язування систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай задано систему n рівнянь із n невідомими функціями зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Ця система може бути подана в матричній формі:

$$\frac{dY}{dx} = AY,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}.$$

Будемо шукати ненульові розв'язки системи у вигляді:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, \ldots, \; y_n = \alpha_n e^{\lambda x}.$$

Підставляючи вирази для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ у систему, дістанемо систему однорідних лінійних алгебричних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Оскільки нульовий розв'язок останньої системи (тобто розв'язок $\alpha_1 = \alpha = \ldots = \alpha_n = 0$) виключається, то для знаходження λ одержимо рівняння n-го степеня:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє рівняння є характеристичним рівнянням матриці A і разом з тим – характеристичним рівнянням системи.

Припустимо, що характеристичне рівняння має n дійсних різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, які є власними числами матриці A. Для кожного власного числа знаходимо відповідний йому власний вектор, використовуючи алгебричну систему.

Нехай λ_k - власне число, якому відповідає власний вектор $(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{nk})$, $k = 1,2,\ldots,n$. Тоді система диференціальних рівнянь має n розв'язків:

перший розв'язок відповідає кореневі $\lambda = \lambda_1$:

$y_{11} = \alpha_{11}e^{\lambda_1 x}$, $y_{21} = \alpha_{21}e^{\lambda_1 x}$, ... , $y_{n1} = \alpha_{n1}e^{\lambda_1 x}$;

другий розв'язок відповідає кореневі $\lambda = \lambda_2$:

$y_{12} = \alpha_{12}e^{\lambda_2 x}$, $y_{22} = \alpha_{22}e^{\lambda_2 x}$, ... , $y_{n2} = \alpha_{n2}e^{\lambda_2 x}$;

....

n-й розв'язок відповідає кореневі $\lambda = \lambda_n$:

$y_{1n} = \alpha_{1n}e^{\lambda_n x}$, $y_{2n} = \alpha_{2n}e^{\lambda_n x}$, ... , $y_{nn} = \alpha_{nn}e^{\lambda_n x}$.

Отже, одержано фундаментальну систему розв'язків. Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь є

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \ldots + C_n y_{1n},$$
$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \ldots + C_n y_{nn}.$$

Випадки дійсних кратних коренів та комплексних коренів характеристичного рівняння розглядатимуться на прикладах.

188. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = xx - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Розв'язання. Напишемо характеристичне рівняння матриці системи:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислення визначника знаходимо $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Це рівняння має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Визначимо власні вектори матриці A. Для $\lambda_1 = 1$ одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 - 12\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 4\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 12\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

з яких одне є наслідком двох інших.

Візьмемо, наприклад, перші два рівняння:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 - 12\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 4\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Одне з чисел можна взяти довільним (відмінним від нуля). Нехай, наприклад, $\alpha_2 = 1$. Тоді з останньої системи маємо $\alpha_1 = 2$, $\alpha_3 = -2$. Отже, власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, знайдено: $(2;1;-2)$.

Для $\lambda_2 = 2$ маємо

$$\begin{cases} 4\alpha_1 - 12\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 12\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Візьмемо, наприклад, два перші рівняння:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 - 12\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $\alpha_1 = 7k$, $\alpha_2 = 3k$, $\alpha_3 = -8k$ (k – довільне число, відмінне від нуля). Покладемо, наприклад, $k = 1$. Власним вектором, який відповідає числу $\lambda_2 = 2$, є $(7;3;-8)$.

Для $\lambda_3 = 3$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 12\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Запишемо два останні рівняння:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha_2 = 1$, тоді легко визначаємо: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_3 = -3$. Отже, власний вектор для $\lambda_3 = 3$ знайдено: $(3;1;-3)$.

Таким чином, фундаментальною системою розв'язків є:

$$\text{для } \lambda_1 = 1: \; x_1 = 2e^t, \; y_1 = e^t, \; z_1 = -2e^t;$$

$$\text{для } \lambda_2 = 2: \; x_2 = 7e^{2t}, \; y_2 = 3e^{2t}, \; z_2 = -8e^{2t};$$

$$\text{для } \lambda_3 = 3: \; x_3 = 3e^{3t}, \; y_3 = e^{3t}, \; z_3 = -3e^{3t}.$$

Загальний розв'язок в матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 7e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ -8e^{2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^{3t} \\ -3e^{3t} \end{pmatrix}$$, а в звичайній -

$$x = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$z = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}.$$

189. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має подвійний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

У загальному випадку, якщо λ_1 - корінь характеристичного рівняння кратності m, то цьому кореневі відповідає розв'язок $x_1 = p_1(t)e^{\lambda_1 t}, x_2 = p_2(t)e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_n = p_n(t)e^{\lambda_1 t}$, де $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ – багаточлени степеня, який не перевищує $m-1$. Невизначені коефіцієнти цих багаточленів знаходять, підставляючи вирази для розв'язку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему диференціальних рівнянь.

Отже, в нашому випадку кореневі $\lambda = 4$ кратності 2 відповідає розв'язок $x_1 = e^{4t}(a_1t + a_2)$, $x_2 = e^{4t}(b_1t + b_2)$.

Знаходимо похідні від x_1 та x_2:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1e^{4t} + 4(a_1t + a_2)e^{4t}, \ \frac{dx_2}{dt} = b_1e^{4t} + 4(b_1t + b_2)e^{4t}.$$

Підставимо вирази для x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ в систему рівнянь. Після скорочення на e^{4t} дістанемо:

$$a_1 + 4(a_1t + a_2) = 5(a_1t + a_2) - (b_1t + b_2);$$
$$b_1 + 4(b_1t + b_2) = a_1t + a_2 + 3(b_1t + b_2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, одержуємо системи алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1; \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2; \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$. Покладаючи $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ (C_1 та C_2 - довільні сталі), знаходимо $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Таким чином,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2),\ x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).$$

190. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має два комплексні спряжені корені $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Знайдемо власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_1 = 4 + 3i$. Для визначення цього вектора одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3i\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0; \\ 3\alpha_1 + 3i\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

звідки маємо $\alpha_2 = i\alpha_1$. Покладемо $\alpha_1 = 1$, тоді $\alpha_2 = i$. Таким чином, власним вектором є $(1; i)$.

Оскільки загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь має бути дійсною (не комплексною) функцією змінної t та дійсних довільних сталих C_1 і C_2, скористаємося відомою властивістю лінійних однорідних диференціальних рівнянь (та систем таких рівнянь): якщо комплексна функція $\varphi(t) + i\psi(t)$ є розв'язком такого рівняння, то дійсна $\varphi(t)$ та уявна $\psi(t)$ частини також є лінійно незалежними розв'язками цього рівняння.

Зважаючи на вказану властивість, спряжений корінь $\lambda_2 = 4 - 3i$ можна не використовувати.

Отже, для $\lambda_1 = 4 + 3i$ комплексним розв'язком системи є:

$$\overline{x}_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}\left(\cos 3t + i \sin 3t\right),$$

$$\overline{x}_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}\left(-\sin 3t + i \cos 3t\right).$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини цього розв'язку, одержимо фундаментальну систему розв'язків (дійсних):

$$\begin{cases} x_{11} = e^{4t}\cos 3t; \\ x_{21} = -e^{4t}\sin 3t \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_{12} = e^{4t}\sin 3t; \\ x_{22} = e^{4t}\cos 3t. \end{cases}$$

Загальним розв'язком даної системи є

$$x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12},\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22},$$

тобто

$$x_1 = e^{4t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right),\ x_2 = e^{4t}\left(-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t\right).$$

Зазначимо, що кожна з розглянутих трьох систем могла б бути розв'язана методом виключення, який розглянуто в підрозд. 3.1. Радимо читачеві зробити це як корисні вправи, а також для порівняння відповідей.

Розв'язати системи:	Відповіді:
191. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$	$x_1 = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$, $x_2 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$.
192. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$	$x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$, $x_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}$, $x_3 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$.
193. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$	$x_1 = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$, $x_2 = C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t}$, $x_3 = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}$.
194. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$	$x_1 = e^{12t}\left(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t\right)$, $x_2 = e^{12t}\left(-C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t\right)$.
195. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$	$x_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t$, $x_2 = \left(C_1 - C_2\right)\cos t + \left(C_1 + C_2\right)\sin t$.
196. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{cases}$	$x_1 = 2C_1 e^{-t} + 2\left(4C_3 + C_2\right)\cos t -$ $- 2\left(4C_2 - C_3\right)\sin t$, $x_2 = -2C_1 e^{-t} + 3\left(5C_2 + 3C_3\right)\cos t +$ $+ 3\left(5C_3 - 3C_2\right)\sin t$,

$$x_3 = C_1 e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t.$$

197. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 4z; \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$ $\quad y = -2e^x(C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x),\ z = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

198. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y + z; \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - z. \end{cases}$ $\quad y = e^x(C_1 x + C_2),\ z = e^x(C_1 - 2C_2 - 2C_1 x).$

199. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - z; \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$ $\quad y = e^{2x}(C_1 x + C_2),\ z = e^{2x}(C_1 x + C_2 - C_1).$

3.3. Розв'язування систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами називається система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t); \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{dY}{dt} = AY + F(t),$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь є сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи та будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи, тобто має вигляд

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(t) + Y_0(t),$$

де C_i - довільні сталі, $Y_i(t)\,(i = 1,2,\ldots,n)$ - фундаментальна система розв'язків однорідної системи, $Y_0(t)$ - частинний розв'язок неоднорідної системи.

Отже, щоб мати загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь, потрібно знайти один із її частинних розв'язків (знаходження загального розв'язку відповідної однорідної системи здійснюється за методами, описаними в підрозд. 3.2).

Розглянемо два методи знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Цей метод є універсальним, тобто він може бути використаний для знаходження частинного розв'язку неоднорідної системи як зі сталими коефіцієнтами, так і зі змінними за умови, що відомий загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

Нехай $Y(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_kY_k(t)$ - загальний розв'язок відповідної однорідної системи, де $Y_k=\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \dots \\ y_{nk} \end{pmatrix}(k=1,2,\dots,n)$ - фундаментальна система розв'язків цієї системи.

Будемо шукати частинний розв'язок неоднорідної системи у вигляді

$$Y_0(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k(t)Y_k(t).$$

Щоб функція $Y_0(t)$ була частинним розв'язком неоднорідної системи, невідомі функції $Y_k(t)(k=1,2,\dots,n)$ повинні задовольняти системі алгебричних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n}C_k'(t)Y_k(t)=F(t).$$

Ця система є лінійною алгебричною системою відносно невідомих $C_k'(t)$, визначником якої є визначник Вронського фундаментальної системи функцій $Y_1(t),Y_2(t),\dots,Y_n(t)$. Оскільки він відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок. Розв'язуючи її, знаходимо

$$C_k'(t)=\varphi_k(t)(k=1,2,\dots,n).$$

Інтегруванням одержуємо

$$C_k(t)=\int\varphi_k(t)dt\ (k=1,2,\dots,n).$$

Після підстановки виразів для $C_k(t)$ (сталі інтегрування покладаємо рівними нулю) у вираз для $Y_0(t)$ дістанемо шуканий частинний розв'язок неоднорідної системи.

200. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2 + e^t; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідної системи $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2 \end{cases}$ є

$y_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y_2 = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$.

Покладаючи $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$, диференціюванням одержуємо

$$\frac{dy_1}{dt} = 3C_1(t)e^{3t} - C_2(t)e^{-t} + C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{-t},$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-t} + C_1'(t)e^{3t} - C_2'(t)e^{-t}.$$

Підставляємо ці вирази для $\dfrac{dy_1}{dt}$ та $\dfrac{dy_2}{dt}$, а також вирази $y_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$ та $y_2 = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$ в початкову систему:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{-t} = e^t; \\ C_1'(t)e^{3t} - C_2'(t)e^{-t} = 0. \end{cases}$$

(Зазначимо, що останню систему можна було записати відразу, користуючись загальною її формою $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(t)Y_k(t) = F(t)$, яка в нашому випадку має вигляд $C_1'(t)Y_1(t) + C_2'(t)Y_2(t) = F(t)$, де $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$).

Розв'язком цієї системи є

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}, \; C_2'(t) = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Після інтегрування маємо

$$C_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}, \; C_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Підставляючи ці вирази у праві частини функцій

$$y_1 = C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-t}, \; y_2 = C_1(t)e^{3t} - C_2(t)e^{-t},$$

одержуємо частинний розв'язок

$$y_{10}(t) = 0, \; y_{20}(t) = -\frac{1}{2}e^t.$$

Таким чином, загальний розв'язок початкової системи -

$$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},\ y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^t,$$

або в матричній (векторній) формі,

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} e^t \end{pmatrix}.$$

3.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Цей метод використовується виключно у випадку неоднорідної лінійної системи зі *сталими* коефіцієнтами, а також за умови, що функції $f_i(t)$ (тобто праві частини рівнянь системи) мають форму e^{kt} або $t^m e^{kt}$.

Частинний розв'язок такої неоднорідної системи шукають у такий же спосіб, як і для одного неоднорідного диференціального рівняння.

Проілюструємо це на прикладі.

201. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + e^t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + e^{3t}. \end{cases}$$

Розв'язання. Коренями характеристичного рівняння для однорідної системи $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ є $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок однорідної системи має вигляд

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Правим частинам $f_1(t) = e^t$ та $f_2(t) = e^{3t}$ відповідають числа 1 та 3. Число 1 не є коренем характеристичного рівняння, а число 3 є його коренем.

Будемо шукати частинний розв'язок неоднорідної системи у вигляді

$$x_0 = a_1 e^t + (a_2 + a_3 t) e^{3t},$$
$$y_0 = b_1 e^t + (b_2 + b_3 t) e^{3t}.$$

Підставляючи вирази для $x_0(t)$, $y_0(t)$ та для їх похідних $\dfrac{dx_0(t)}{dt}$, $\dfrac{dy_0(t)}{dt}$ у рівняння системи, одержуємо:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{1}{2};$$
$$b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{4},\ b_3 = \frac{1}{2}.$$

Загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2} e^{3t},$$
$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t} - \frac{1}{2} e^{t}.$$

Розв'язати системи: Відповіді:

202. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + t. \end{cases}$ $\quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{t}{3}, \quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{t}{3}.$

203. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + e^{t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + e^{3t}. \end{cases}$ $\quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \dfrac{1-4t}{16} e^{3t}, \quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} + e^{t} + \dfrac{1}{8}(1+4t)e^{3t}.$

204. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$ $\quad x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \dfrac{7}{40} e^{t} + \dfrac{1}{5} e^{-2t}, \quad y = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \dfrac{1}{40} e^{t} + \dfrac{3}{10} e^{-2t}.$

205. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$ $\quad x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + t\,sh t, \quad y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + sh t + t\,ch t.$

206. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y - 4z + 1 + 4x; \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + z + \dfrac{3}{2} x^2. \end{cases}$ $\quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x, \quad z = -C_1 e^{2x} + \dfrac{C_2}{4} e^{-3x} - \dfrac{1}{2} x^2.$

207. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - 4z + 2x; \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + x, \end{cases}$ $\quad y = 14\left(1 - e^{-x}\right) - 2x\left(3 + 4e^{-x}\right), \quad z = -9\left(1 - e^{-x}\right) + x\left(5 + 4e^{-x}\right).$

$y(0) = 0,\ z(0) = 0.$

208. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - 36t; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y - 2e^{t}, \end{cases}$ $\quad x = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^{t} + 6t - 1, \quad y = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^{t} + 12t + 10.$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1962.

Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа. М., 1963.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.

Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1973.

Зміст

Гербін Володимир Михайлович
Фесенко Валентин Тимофійович

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Редактор Т.О. Іващенко

Зв. план, 2002
Підписано до друку 08.04.2002
Формат 60×84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 3,3. Обл.-вид. арк. 3,69. Т. 300 прим.
Замовлення 178. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр "ХАІ"
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@ khai.edu