

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О.М. Андрусенко, В.А. Ванін, О.В. Головченко, А.Г. Кошовий

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

Харків ХАІ 2007

УДК 517.977.5

Теорія керування / О.М. Андрусенко, В.А. Ванін, О.В. Головченко, А.Г. Кошовий. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2007. - 68 с.

Запропоновано матеріал з теорії керування, рекомендований освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів напряму 0802 «Прикладна математика». Наведено теоретичні відомості та методи розв'язання задач з такої тематики: методи класичного варіаційного числення в теорії керування, програмне керування та синтез, принцип максимуму, задачі на швидкодію, динамічне програмування.

Для студентів механічних спеціальностей і студентів напряму підготовки «Прикладна математика». Може бути корисним інженерним працівникам та аспірантам.

Іл. 15. Табл. 2. Бібліогр.: 13 назв

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. О.В. Макарічев,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В.О. Афанасьєв

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Основні поняття та постановка задач оптимального керування	6
1.1. Математична модель об'єкта керування	6
1.2. Допустимі керування і додаткові умови	9
1.3. Критерій оптимальності. Постановка задач оптимального керування	11
Розділ 2. Методи класичного варіаційного числення в задачах оптимального керування	14
2.1. Варіація функціонала для задачі Майєра. Функція Гамільтона	14
2.2. Побудова розв'язку задачі Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії	18
2.3. Задачі Больца і Лагранжа з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії	21
2.4. Задача Майєра з довільним часом і без обмежень на правий кінець траєкторії	22
2.5. Задача Майєра з обмеженнями загального вигляду	24
2.6. Приклади застосування варіаційних методів у задачах оптимального керування	26
Розділ 3. Принцип максимуму Понтрягіна.....	36
3.1. Обговорення принципу максимуму. Задача Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії	36
3.2. Приклади застосування принципу максимуму. Задача на швидкодію	40
3.3. Задача синтезу. Проблема синтезу оптимальних керувань	47
Розділ 4. Динамічне програмування	52
4.1. Метод динамічного програмування	52
4.2. Алгоритм методу динамічного програмування для задач з вільним правим кінцем траєкторії	53
4.3. Задачі з обмеженнями на правий кінець траєкторії	56
4.4. Зв'язок методу динамічного програмування з принципом максимуму Понтрягіна	58
4.5. Приклади застосування методу динамічного програмування	59
Бібліографічний список	67

ВСТУП

Бажання найкращим чином розпоряджатися своїми можливостями природне як для окремих людей, так і для організацій. Можна навести багато прикладів, які ілюструють наведене твердження, а саме: розподіл зусиль спортсменом під час змагань для отримання найкращого результату; побудова навчального процесу таким чином, щоб за обмежений час дати учню найбільше корисної інформації; організація перевезень зі складу товарів до місць продажу з мінімальною сумарною вартістю перевезень; розподіл за часом обмежених ресурсів (сировина, робоча сила) і отримання при цьому максимального прибутку; розрахунки польоту літального апарата з мінімальними витратами пального і мінімальним відхиленням траєкторії польоту від бажаної та ін.

Спільним для всіх розглянутих прикладів є бажання отримати найкращі результати за даних умов. Для цього потрібно (де це можливо) вибрати з кількох можливостей впливу на процес оптимальну, тобто побудувати (синтезувати) оптимальне керування об'єктом.

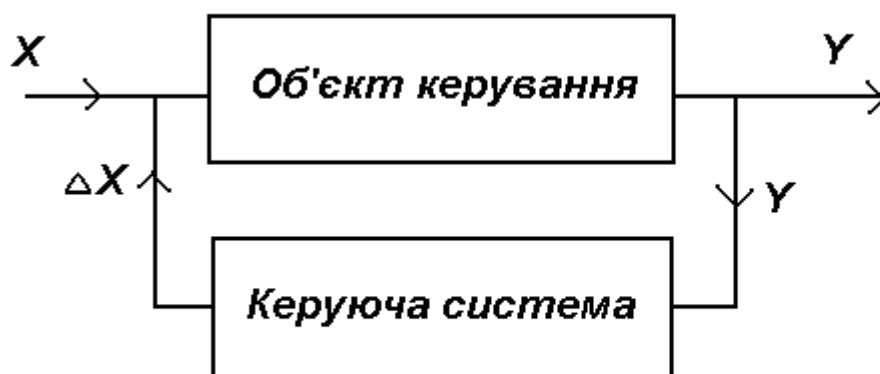


Рис. В.1

Розглянемо загальну схему систем керування. Будь-яке керування передбачає наявність об'єкта керування і апарата, який безпосередньо реалізує процеси керування і зовнішнього середовища.

Об'єкт керування виконує деякі дії для досягнення мети керування. Під час роботи об'єкт керування підпадає під вплив зовнішнього середовища, яке сприяє або заважає досягненню поставлених цілей. Керуюча система підтримує нормальний режим роботи системи.

На рис. В.1 X – це вплив зовнішнього середовища, Y – реакція системи на вплив X . Зв'язок, за допомогою якого керуюча система впливає на об'єкт керування, називається оберненим. Вхідним сигналом для оберненого зв'язку є вихідний сигнал системи Y . Якщо цей сигнал не відповідає меті керування, то керуюча система відпрацьовує вплив оберненого зв'язку ΔX , який разом з X подається

на вхід об'єкта керування. Таке керування називають керуванням з повним оберненим зв'язком.

У випадку, коли відсутній вплив оберненого зв'язку (ΔX), а використовується інформація тільки про поточний час, система керування є не замкненою за станом. У цьому випадку керування називається програмним.

У техніці вплив керуючих систем на об'єкт керування реалізується за допомогою деяких механізмів, а саме підсилювачів, приводів керма та ін. В економіці це можуть бути додаткові фонди на сировину, матеріальні ресурси, зміни планових показників і т.п.

У навчальному посібнику розглядатиметься клас задач на умовну оптимізацію функціоналів. Це задачі математичної теорії оптимального керування, де найбільш поширеними є дві концепції: принцип максимуму Понтрягіна (некласичне варіаційне числення) і динамічне програмування Беллмана. Принцип максимуму Понтрягіна дає розв'язок задачі в програмній формі, тобто керування \vec{u} є деякою функцією від t, t_0, x_0 , а саме $\vec{u} = \vec{u}(t, t_0, x_0)$.

Метод динамічного програмування дає розв'язок у формі оберненого зв'язку, де керування залежить від часу t , і вектор функції $\vec{x}(t)$: $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{x}(t))$.

Оптимальні керування, записані в тій чи іншій формі, дають однаковий результат як за величиною функціонала, так і за значеннями траєкторій руху $\vec{x}(t)$. Але, виходячи з потреб, краще отримувати розв'язок у формі оберненого зв'язку.

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Математична модель об'єкта керування

Математична постановка задач оптимального керування починається з побудови математичної моделі реального об'єкта.

Розглянемо деякі приклади, які приводять до основних положень теорії оптимального керування.

Приклад 1.1. Літальний апарат змінною масою $m(t)$ у момент часу $t=0$ знаходиться в точці $A(x_A^1, x_A^2, x_A^3)$ і має швидкість $\vec{V}_A = (\dot{x}_A^1, \dot{x}_A^2, \dot{x}_A^3)^T$. Визначити таке керування роботою двигуна, для якого літальний апарат у момент часу $t=T$ буде знаходитися в точці $B(x_B^1, x_B^2, x_B^3)$ зі швидкістю $\vec{V}_B = (\dot{x}_B^1, \dot{x}_B^2, \dot{x}_B^3)^T$ і при цьому буде використано мінімальну кількість палива. Сила тяги двигуна \vec{F} задається співвідношеннями

$$|\vec{F}| = -c\dot{m}(t), \quad |\vec{F}|/m(t) \leq a, \quad (1.1)$$

де a та c - додатні сталі.

Радіус-вектор поточної точки позначимо як $\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))^T$. Тоді за другим законом Ньютона

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} - m\vec{g} \quad (\vec{g} - \text{прискорення вільного падіння}), \quad (1.2)$$

а крайові умови мають вигляд

$$\vec{x}(0) = (x_A^1, x_A^2, x_A^3)^T, \quad \dot{\vec{x}}(0) = (\dot{x}_A^1, \dot{x}_A^2, \dot{x}_A^3)^T, \quad (1.3)$$

$$\vec{x}(T) = (x_B^1, x_B^2, x_B^3)^T, \quad \dot{\vec{x}}(T) = (\dot{x}_B^1, \dot{x}_B^2, \dot{x}_B^3)^T. \quad (1.4)$$

Покладемо $\vec{x}_1(t) = \vec{x}(t)$, $\vec{x}_2(t) = \dot{\vec{x}}(t)$, $\vec{F}/m(t) = \vec{u}(t)$, тоді рівняння (1.2) і умови (1.1) можна записати таким чином:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_1 = \vec{x}_2 \\ \dot{\vec{x}}_2 = \vec{u} - \vec{g}, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{|\vec{u}|}{c}, \quad |\vec{u}| \leq a.$$

Витрати палива мають бути мінімальними, тому величина $m(t)$ є максимальною, а інтеграл $\frac{1}{c} \int_0^T |\vec{u}(t)| dt$ набуває мінімального значення.

Таким чином, необхідно знайти функцію $\vec{u}(t)$, $|\vec{u}(t)| \leq a$ таку, щоб розв'язок системи (1.5) задовольняв умови (1.3), а інтеграл $\frac{1}{c} \int_0^T |\vec{u}(t)| dt$ набув мінімального значення. (Задача з закріпленими кінцями).

Приклад 1.2. Припустимо, що в задачі прикладу 1 в момент часу $t = T$ положення літального апарата і його швидкість невідомі. Потрібно знайти таке керування $\vec{u}^*(t)$, $|\vec{u}^*(t)| \leq a$, щоб розв'язок $\vec{x}^*(t)$ системи (1.5) з початковими умовами $\vec{x}(0) = \vec{x}_A$ задовольняв умову $x^{(3)}(T) = \max_{|\vec{u}| \leq a} x^{(3)}(T)$. (Задача з одним рухомих кінцем).

Приклад 1.3. Знайти таке керування роботою двигуна літального апарата, щоб він з точки x_A перелетів до точки x_B за найменший час. (Задача на швидкодію).

Наведені приклади роблять природним наступний математичний опис керованого об'єкта. Його стан визначається набором з n величин x^1, x^2, \dots, x^n , які називаються **фазовими координатами** об'єкта. Рух об'єкта полягає з математичної точки зору в тому, що його стан з плином часу змінюється, тобто величини x^k є функціями часу: $x^k = x^k(t)$. Цей рух об'єкта не довільний, а керований: він має «кермо», стан якого визначається r величинами u^1, u^2, \dots, u^r , що називаються **параметрами керування**. Кермом можна маніпулювати, тобто за бажанням змінювати параметри керування з плином часу, а саме вибирати функції $u^k(t)$, що визначають зміну параметрів керування у часі. Що ж до фазових координат, то будемо припускати (як це й буває на практиці), що за відомим початковим станом (у момент часу t_0) і відомим набором $u^k(t)$, $k = \overline{1, r}$ можна математично точно розрахувати поведінку об'єкта для $t > t_0$, тобто знайти функції $x^k(t)$, $k = \overline{1, n}$, $t > t_0$. Таким чином, на зміну фазових координат можна впливати за допомогою функцій керування $u^k(t)$. В цьому випадку говорять, що задано програму керування $u^k(t)$, $k = \overline{1, r}$.

Величини u^1, u^2, \dots, u^r зручно вважати компонентами вектора \vec{u} - векторного параметра керування. Подібно до цього величини x^1, x^2, \dots, x^n розглядають як координати деякої точки n -вимірного простору. Цей простір, де у вигляді точок зображується стан об'єкта, називають фазовим простором даного об'єкта.

Якщо об'єкт такий, що його фазовий стан характеризується тільки двома фазовими координатами x^1, x^2 , то вживають поняття фазової площини, і тоді фазовий стан об'єкта зображується особливо наочно. В зв'язку з цим для більшої наочності викладання матеріалу будемо виконувати всі рисунки і деякі доведення проводити у фазовій площині, а постановки задач і формулювання теорем здійснювати для довільного n -числа фазових координат.

Таким чином, щоб повністю задати рух об'єкта, потрібно вказати його фазовий стан у початковий момент часу t_0 і вибрати функції керування $u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t)$ для $t > t_0$, тобто векторну функцію $\vec{u}(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))^T$. Цю векторну функцію називають **керуванням**.

Якщо вказано початковий стан x_0 і визначено керування $\vec{u}(t)$, то подальший рух об'єкта визначається однозначно. Цей рух полягає у тому, що фазова точка $\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))^T$ зображує стан об'єкта зі зміною часу і описує у фазовому просторі деяку лінію, яка називається **фазовою траєкторією** руху даного об'єкта. Пару векторних функцій $\{\vec{x}(t), \vec{u}(t)\}$, тобто керування $\vec{u}(t)$ та відповідну фазову траєкторію $\vec{x}(t)$, називатимемо далі **процесом керування**, або просто **процесом**.

Підведемо підсумок. Стан керованого об'єкта у кожний момент часу характеризується фазовою точкою $\vec{x}(t) = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$. Рух об'єкта можна спрямувати за допомогою параметра керування $\vec{u}(t) = (u^1, u^2, \dots, u^r)^T$. Зміну цих величин $\vec{u}(t)$, $\vec{x}(t)$ з плином часу називають процесом: він складається з керування $\vec{u}(t)$ при $t > t_0$ і початкового фазового стану $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$.

Для неперервних систем моделі процесів задаються системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x}^i = f_i(t, x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^r), i = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

або

$$\dot{x}^i = f_i(t, \vec{x}, \vec{u}), \quad i = \overline{1, n}; \quad t \in [t_0, t_1].$$

Припустимо, що $t_0 = 0$, а $t_1 = T$, тоді $t \in [0, T]$ і початковий стан системи (1.6) визначається вектором

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \text{де } \vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T. \quad (1.7)$$

За умови існування і єдиності розв'язків задачі Коші (1.6) – (1.7) задання керування (програми) $\vec{u}(t)$ забезпечує знаходження різних траєкторій системи.

Змінна t може змінюватися не тільки неперервно. Вона може пробігати деякий відрізок натурального ряду $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, T$. Систему в цьому випадку називають дискретною. Модель дискретної керованої системи має вигляд системи рекурентних рівнянь

$$x^i(t+1) = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.8)$$

Час t набуває значення $t = 0, 1, \dots, T-1$, а початкове значення $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ вважається відомим. Праві частини рівнянь (1.8) не потрібно обмежувати (як у попередньому випадку (1.6)) додатковими умовами. Підставляємо значення початкового стану $\bar{x}(0)$ і $t = 0$ в (1.8) і знаходимо $x^i(1) = f_i(0, \bar{x}(0), \bar{u}(0))$, $i = \overline{1, n}$. Далі підставляємо $\bar{x}(1)$ і $t = 1$ в (1.8) і визначаємо $\bar{x}(2)$. За T кроків отримуємо останнє значення і $\bar{x}(T)$. Задачі такого типу і обґрунтування методів розв'язання цих задач розглянуто в праці [2]. У прикладах 1.1 - 1.3 математична модель задається системою (1.5) і умовами (1.3) – (1.4).

1.2. Допустимі керування і додаткові умови

На можливі стани системи $\bar{x}(t)$ та керування $\bar{u}(t)$ можуть бути накладені обмеження. Якщо припустити, що стан системи $\bar{x}(t)$ належить деякій множині $X \in R^n$, керування $\bar{u}(t) \in U^r \in R^r$, то множина трійок (t, \bar{x}, \bar{u}) буде утворювати сукупність $(n+r+1)$ -вимірних векторів з простору R^{n+r+1} .

У найзагальнішому вигляді обмеження на стан системи і керування можуть бути записані як $(t, \bar{x}, \bar{u}) \in \Omega$, де $\Omega \in R^{n+r+1}$. Обмеження на величини $\bar{x}(t)$ і $\bar{u}(t)$ у будь-який фіксований момент часу t можна задати у вигляді $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \Omega_t$, де Ω_t - переріз множини Ω для заданого значення t .

Таким чином, процес $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ повинен задовольняти такі умови:

- а) $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \Omega_t, \forall t \in [0; T]$;
- б) $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ задовольняє систему рівнянь процесу, а саме (1.6), у неперервному випадку $\forall t \in [0; T]$ і (1.8) у дискретному випадку для $t = 0, 1, \dots, T-1$;
- в) стан процесу $\bar{x}(t)$ задовольняє початкові умови (1.7) (або умови крайової задачі);
- г) у неперервному випадку на стан процесу $\bar{x}(t)$ і керування $\bar{u}(t)$ накладаються додаткові умови, пов'язані з математичними вимогами.

Вектор-функцію $\bar{x}(t)$ будемо вважати неперервною і кусково-диференційовною, а $\bar{u}(t)$ - кусково-неперервною (рис. 1.1).

Значення кусково-неперервних керувань $\vec{u}(t)$ у точці розриву не відіграє суттєвої ролі, але для визначеності будемо вважати, що у

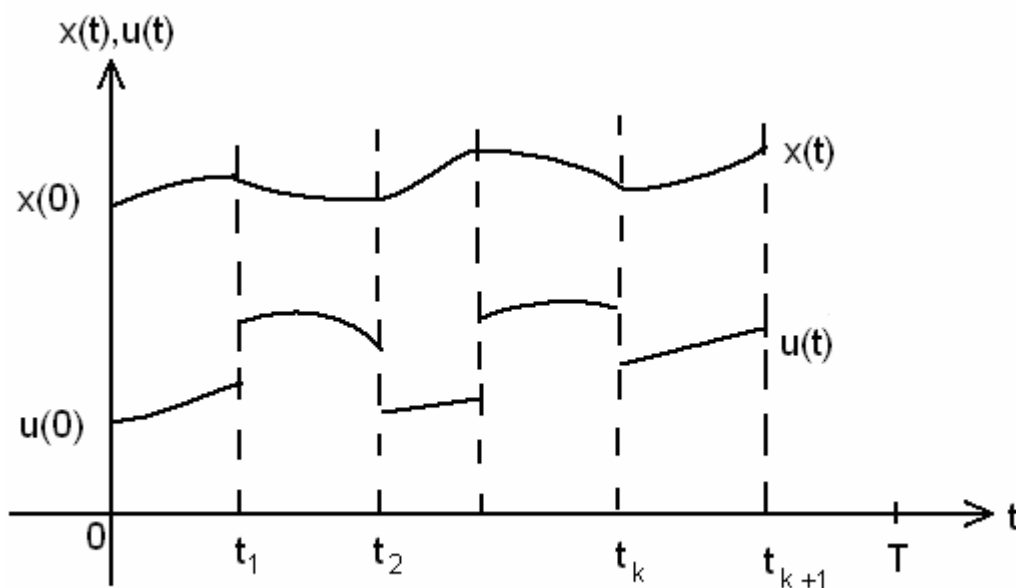


Рис. 1.1

кожній точці розриву μ значення керування $\vec{u}(t)$ дорівнює правій границі, тобто

$$\vec{u}(\mu) = \vec{u}(\mu + 0).$$

Введення кусково-неперервних керувань пов'язано з тим, що «керма», положення яких характеризуються вектором $\vec{u}(t)$, вважаються безінерційними [4].

Процеси $(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, які задовольняють умови «а» – «г», називаються допустимими.

У задачах оптимального керування можливі випадки, коли у кожний момент часу t на значення $\vec{u}(t)$ накладено деякі обмеження, а саме

$$\left| \vec{u}(t) \right| \leq u_0, \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.9)$$

Обмеження (1.9) виключають можливість застосування для розв'язання задач оптимального керування класичного варіаційного числення [12], тому що значення $\left| \vec{u}(t) \right|$ можуть належати межі області (рис. 1.2). В проміжку $[t_1, t_2]$ керування належить межі допустимої області. Можливі задачі, де в скінченний момент часу $t_1 = T$ вектор $\vec{x}(t)$ набуває певного значення (приклад 1.2). При цьому сам момент часу t_1 може бути невідомим і визначатися з умови досягнення $\vec{x}(t_1)$ заданого значення (приклад 1.3). У загальному випадку можна вимагати, щоб скінченний стан $\vec{x}(t_1)$ задовольняв деяку систему рівнянь

$$g_i(t_1, \vec{x}(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad 0 \leq l \leq n+1. \quad (1.10)$$

Крім того, для визначення скінченного моменту часу t_1 застосовуються так звані умови трансверсальності [1, 2, 13], про які мова піде у наступних розділах.

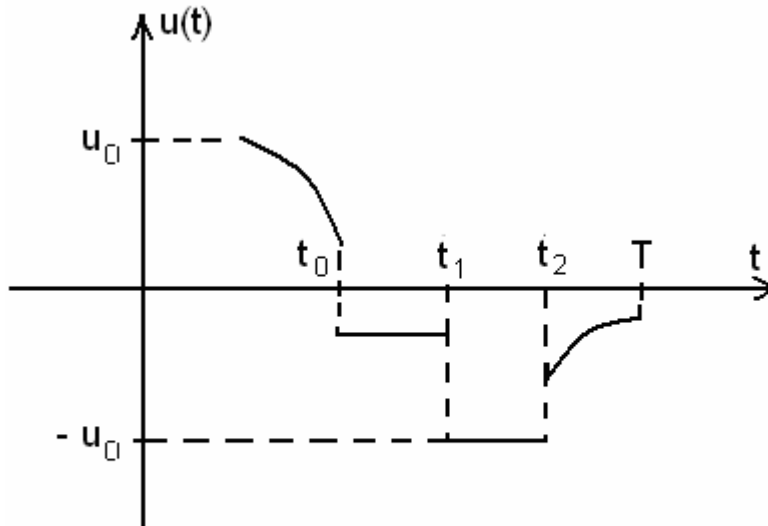


Рис. 1.2

1.3. Критерій оптимальності. Постановка задач оптимального керування

Як зазначалося у вступі, в задачах оптимального керування визначається таке керування $\vec{u}(t)$, для якого об'єкт керування працює оптимально відносно деякого критерію. Цей критерій введено у вигляді функціоналів

$$J[\vec{u}, \vec{x}] = \int_{t_2}^{t_1} f_0(t, \vec{x}, \vec{u}) dt + F(t_1, \vec{x}(t_1)) \quad (1.11)$$

- випадок неперервних систем;

$$J[\vec{u}, \vec{x}] = \sum_{t=0}^{t_1-1} f_0(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) + F(t_1, \vec{x}(t_1)) \quad (1.12)$$

- випадок багатокрокових процесів у дискретних системах.

Ставиться задача мінімізації функціоналів (1.11) – (1.12) у неперервному і дискретному випадках на множині допустимих процесів $(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, які задовольняють умови «а» – «г» з підрозд. 1.2.

Функціонали (1.11) – (1.12) складаються з двох частин. Перша з цих складових $\int_{t_2}^{t_1} f_0(t, \vec{x}, \vec{u}) dt$, $\sum_{t=0}^{t_1-1} f_0(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t))$ відповідає за якість процесу на проміжку $[t_0, t_1]$, а другий доданок, так звана термінальна

складова, характеризує скінченний стан системи. Якщо скінченний стан системи відомий ($t_1 = T$) і сталий $\vec{x}(T) = \vec{x}_1$, то величина $F(\vec{x}(T))$ стала і не впливає на мінімізацію функціоналів (1.11) – (1.12).

Якщо позначити множину допустимих процесів $\vec{U} = (\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, то сформульовані вище задачі можна записати у двох варіантах, а саме:

1. Визначити оптимальний процес \vec{U} таким чином, щоб функціонал (1.11) досягав мінімального значення на множині \vec{U} .

2. Визначити мінімізуючу послідовність $\{\vec{x}_k(t), \vec{u}_k(t)\} \in \vec{U}$, щоб для функціонала (1.12) виконувалося співвідношення $J[\vec{x}_k, \vec{u}_k] = \inf_{\{\vec{x}, \vec{u}\} \in \vec{U}} J[\vec{x}, \vec{u}]$.

Задачі оптимального керування ставляться, як правило, для функціоналів (1.11). Але задача не завжди має розв'язок. Для функціоналів (1.12) задача оптимального керування завжди має розв'язок, якщо функціонал обмежений на множині \vec{U} . Для більшості задач, наприклад економічних, де функції $f_0(t, \vec{x}, \vec{u})$ і $F(t, \vec{x})$ є невід'ємними, функціонал (1.12) не може набувати від'ємних значень і тому обмежений знизу.

Задачі оптимального керування, записані у формі (1.11) – (1.12), називаються задачами Больца. В окремих випадках перший або другий доданок може бути відсутнім.

Якщо відповідні функціонали задані у формі

$$J[\vec{u}, \vec{x}] = \int_{t_2}^{t_1} f_0(t, \vec{x}, \vec{u}) dt, \quad (F(t_1, \vec{x}(t_1)) = 0), \quad (1.13)$$

то задача є задачею Лагранжа, а якщо - у формі

$$J[\vec{u}, \vec{x}] = F(t_1, \vec{x}(t_1)), \quad (f_0(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) = 0), \quad (1.14)$$

то задача буде задачею Майєра.

Від будь-якої із задач (1.11), (1.13) – (1.14), записаних в одній формі, можна перейти до другої форми запису, тому жодна з них не є узагальнюючою.

Приклади переходів.

1. Перехід від задачі Лагранжа (1.13) до задачі Майєра (1.14).

Введемо нову змінну $x^0(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \vec{x}, \vec{u}) dt$, тоді $\dot{x}^0(t) = f_0(t, \vec{x}, \vec{u})$,

$x^0(t_0) = 0$. Побудувавши вектор $\tilde{\vec{x}}(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t))^T$, отримаємо задачу Майєра з критерієм оптимальності

$$J[\tilde{\vec{x}}(t), \vec{u}(t)] = \tilde{F}[t_1, \tilde{\vec{x}}(t_1)] = x^0(t_1).$$

2. Перехід від задачі Майєра (1.14) до задачі Лагранжа (1.13).

Запишемо тотожність $\int_{t_0}^{t_1} dF(t, \bar{x}) = F(t_1, \bar{x}(t_1)) - F(t_0, \bar{x}(t_0))$, де

$F(t_0, \bar{x}(t_0))$ є числом, яке не впливає на мінімум функціонала. В результаті отримаємо задачу Лагранжа, де

$$f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) = \frac{d}{dt} F(t, \bar{x}(t)) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot f_i(t, \bar{x}, \bar{u}).$$

3. Перехід від задачі Больца (1.11) до задачі Майєра (1.14).

Покладемо

$$x^0(t) = \int_{t_0}^t f(t, \bar{x}, \bar{u}) dt, \quad \tilde{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t))^T. \quad (1.15)$$

Маємо: $\dot{x}^i(t) = f_i(t, \tilde{x}, \bar{u})$, $i = \overline{0, n}$, $x^i(t_0) = x^{i_0}$, $i = \overline{1, n}$, $x^0(t_0) = 0$,

$$J[\tilde{x}(t), \bar{u}(t)] = x^0(t_1) + F(t_1, \tilde{x}(t_1)) \rightarrow \min. \quad (1.16)$$

У наступних розділах більше уваги буде приділено саме задачі Майєра. Наприкінці розділу сформулюємо задачу оптимального керування у загальному вигляді.

Знайти керування $\bar{u}(t)$ з класу допустимих процесів \bar{U} , яке переводить систему (1.6) із початкового стану $(t_0, \bar{x}(t_0))$ в скінченний стан, який задається рівняннями (1.10) і умовами трансверсальності. При цьому функціонал (1.11) набуває мінімального значення.

Формально задачу можна записати у такому вигляді:

1) $\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}, \bar{u})$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$;

2) $J[\bar{u}, \bar{x}] = \int_0^{t_1} f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) dt + F(t_1, \bar{x}(t_1)) \rightarrow \min$;

3) $|\bar{u}(t)| = u_0$;

4) $(t_1, \bar{x}(t_1))$: $g_i(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0$, $i = \overline{1, l}$;

5) перевіряються умови трансверсальності.

Якщо розглядається задача з фіксованим часом, то будемо писати: $t_1 = T = const$. У разі відсутності обмежень на правий край траєкторії умови 4 не записуються.

Розділ 2. МЕТОДИ КЛАСИЧНОГО ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

2.1. Варіація функціонала для задачі Майєра. Функція Гамільтона

Розглянемо задачу Майєра:

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}, \bar{u}); \quad (2.1)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad (2.2)$$

$$J[\bar{u}] = F(\bar{x}(T)). \quad (2.3)$$

У цій задачі обмеження на величину керування відсутні, час є фіксованою величиною, а правий кінець траєкторії є вільним.

Нехай функція $\bar{u}^*(t)$ реалізує мінімум функціонала, а $\bar{x}^*(t)$ - відповідний розв'язок задачі Коші (2.1) – (2.2). Процес $(\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t))$ належить множині допустимих процесів Ω .

Візьмемо будь-який інший процес $\{\bar{u}_1(t), \bar{x}_1(t)\} \in \Omega$. Тоді повинна виконуватися нерівність:

$$J[\bar{u}_1] - J[\bar{u}^*] = \Delta J[\bar{u}_1] \geq 0. \quad (2.4)$$

Множину $\bar{u}_1(t)$ можна будувати по-різному. Це питання несуттєве, оскільки мова йде лише про необхідні умови оптимальності. Тому будемо записувати $\bar{u}_1(t)$ у вигляді

$$\bar{u}_1(t) = \bar{u}^*(t) + \varepsilon \Delta \bar{u}(t), \quad (2.5)$$

де вектор-функція $\Delta \bar{u}(t)$ належить класу допустимих функцій.

Розв'язок задачі Коші (2.1) – (2.2), який відповідає керуванню (2.5), знаходимо із системи:

$$\dot{x}_1^i = f_i(t, \bar{x}_1, \bar{u} + \varepsilon \Delta \bar{u}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

$$\bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_0.$$

Для значення $\varepsilon = 0$ $\bar{x}_1(t) = \bar{x}^*(t)$, де $\bar{x}^*(t)$ - розв'язок системи (2.1). Тому розв'язок системи (2.6) можна розшукувати у вигляді

$$\bar{x}_1(t) = \bar{x}^*(t) + \bar{\omega}_1(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\bar{\omega}_2(t)\varepsilon^2 + \dots, \quad (2.7)$$

де $\bar{\omega}_i(t) = (\omega_i^1(t), \omega_i^2(t), \dots, \omega_i^n(t))^T$, $i = 1, 2$, $\omega_1(t_0) = 0, \omega_2(t_0) = 0$.

Підставляючи (2.7) у (2.4), маємо

$$\begin{aligned} \Delta J[\bar{u}_1] &= \varepsilon \delta J + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J + \dots = \\ &= F(\bar{x}^*(T) + \varepsilon \bar{\omega}_1(T) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \bar{\omega}_2(T) + \dots) - F(\bar{x}^*(T)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^{*j}} (\varepsilon \omega_1^j(T) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega_2^j(T) + \dots) + \\
&+ \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^{*j} \partial x^{*k}} (\varepsilon \omega_1^j(T) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega_2^j(T) + \dots) (\varepsilon \omega_1^k(T) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega_2^k(T) + \dots) = \\
&= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=T}^T \bar{\omega}_1(T) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=T}^T \bar{\omega}_2(T) + \bar{\omega}_1^T(T) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{t=T} \bar{\omega}_1(T) \right) + \dots
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\delta J = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=T}^T \cdot \bar{\omega}_1(T), \quad (2.8)$$

$$\delta^2 J = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=T}^T \cdot \bar{\omega}_2(T) + \bar{\omega}_1^T(T) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{t=T} \bar{\omega}_1(T), \quad (2.9)$$

де

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^T, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Вирази (2.8) і (2.9) називають першою та другою варіаціями функціонала (2.3).

Введемо допоміжну n -вимірну вектор-функцію $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^T$ і побудуємо скалярний добуток:

$$H(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), \vec{u}(t)) = \vec{\psi}^T(t) \cdot \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \quad (2.10)$$

де $\vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) = (f_1, f_2, \dots, f)^T$.

Функція H , введена за допомогою формули (2.10), називається функцією Гамільтона. За допомогою цієї функції задачу Коші (1.6) –

(1.7) можна записати у вигляді

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

Вектор-функцію $\vec{\psi}(t)$ визначимо як розв'язок системи рівнянь

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.12)$$

$$\text{або } \dot{\vec{\psi}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \cdot \vec{\psi}(t).$$

Систему рівнянь (2.11) – (2.12), а саме

$$\begin{cases} \frac{dx^s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.13)$$

називають системою канонічних рівнянь Гамільтона.

Запишемо вирази (2.8) – (2.9) для варіацій функціонала (2.3) за допомогою функції Гамільтона (2.10). Для цього проведемо ряд перетворень. Спочатку підставимо ряд (2.7) у систему (2.6). Маємо

$$\begin{aligned} & \dot{x}^{*i}(t) + \dot{\omega}_1^i(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\dot{\omega}_2^i(t)\varepsilon^2 + \dots = \\ & = f_i(t, \vec{x}^*(t) + \vec{\omega}_1(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\vec{\omega}_2(t)\varepsilon^2 + \dots, \vec{u}^*(t) + \varepsilon \Delta \vec{u}(t)) = \\ & = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^{*j}} \Big|_{x^j=x^{*j}} (\omega_1^j(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_2^j(t)\varepsilon^2) + \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u^m} \Big|_{u^m=u^{*m}} \varepsilon \Delta u^m + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,m=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^m} \Big|_{\substack{x^j=x^{*j} \\ x^m=x^{*m}}} (\omega_1^j(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_2^j(t)\varepsilon^2 + \dots) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\omega_1^m(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_2^m(t)\varepsilon^2 + \dots) + \right. \\ & + 2 \sum_{\substack{j=1, n \\ m=1, r}} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial u^m} (\omega_1^j(t)\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_2^j(t)\varepsilon^2 + \dots) \varepsilon \Delta u_m + \\ & \quad \left. + \sum_{j,m=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^j \partial u^m} \Big|_{\substack{u^j=u^{*j} \\ u^m=u^{*m}}} \varepsilon^2 \Delta u^j \Delta u^m \right\} + \dots = \end{aligned}$$

$$= \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^T \bar{\omega}_1(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u} \right)^T \Delta \bar{u} \right) \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}^* \\ \bar{u}=\bar{u}^*}} \cdot \varepsilon + \\ + \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^T \bar{\omega}_2(t) + \beta_i(\bar{\omega}_1(t), \bar{\omega}_2(t)) \right) \Big|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}^* \\ \bar{u}=\bar{u}^*}} \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \dots,$$

де $\beta_i = \bar{\omega}_1^T(t) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \bar{\omega}_1(t) + 2\bar{\omega}_1^T(t) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial u} \Delta \bar{u} + \Delta \bar{u}^T \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} \Delta \bar{u}$, $\bar{x} = x^*$,

$\bar{u} = u^*$, а $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial u}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2}$ - матриці других похідних функції f_i , $i = \overline{1, n}$.

Таким чином,

$$\dot{\bar{\omega}}_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_1(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \Delta \bar{u}(t), \quad \bar{\omega}_1(t_0) = 0; \quad (2.14)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_2(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_2(t) + \beta(\bar{\omega}_1(t), \Delta \bar{u}(t)), \quad \bar{\omega}_2(t_0) = 0, \quad (2.15)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x}$ - квадратні матриці з рядками $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ - квадратні

матриці з рядками $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $i, j = \overline{1, r}$, а вектор $\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}^T$.

Далі випишемо такі перетворення:

$$\int_{t_0}^T d(\vec{\psi}^T(t) \bar{\omega}_i(t)) = \vec{\psi}^T(T) \bar{\omega}_i(T), \quad \bar{\omega}_i(t_0) = 0, i = 1, 2; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} d(\vec{\psi}^T(t) \bar{\omega}_1(t)) &= (\dot{\vec{\psi}}^T \cdot \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \cdot \dot{\bar{\omega}}_1) dt = \\ &= (\dot{\vec{\psi}}^T \cdot \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial u} \Delta \bar{u}) dt = \\ &= \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{\psi} \right)^T \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial u} \Delta \bar{u} \right) dt = \\ &= \left(- \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\omega}_1 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial u} \Delta \bar{u} \right) dt = \\ &= \vec{\psi}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \Delta \bar{u} dt = \frac{\partial H^T}{\partial u} \Delta \bar{u} dt; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
d(\vec{\psi}^T \vec{\omega}_2) &= (\dot{\vec{\psi}}^T \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \dot{\vec{\omega}}_2) dt = (\dot{\vec{\psi}}^T \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \vec{\beta}) dt = \\
&= \left(- \left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \quad \vec{\psi} \right)^T \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \vec{\beta} \right) dt = \\
&= \left(- \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\omega}_2 + \vec{\psi}^T \vec{\beta} \right) dt = \vec{\psi}^T \vec{\beta} dt = \\
&= (\vec{\omega}_1^T H_{xx} \vec{\omega}_1 + 2\vec{\omega}_1^T H_{xu} \Delta \vec{u} + \Delta \vec{u}^T H_{uu} \Delta \vec{u}) dt = K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u}) dt. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Якщо порівняти (2.16) з (2.17) – (2.18), то можна записати

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}^T(T) \vec{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial u} \Delta \vec{u}(t) dt &= 0; \\
\vec{\psi}^T(T) \vec{\omega}_2(T) - \int_{t_0}^T K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u}) dt &= 0. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Додамо вирази (2.19) до значень (2.8) – (2.9) варіацій функціонала (2.3). Маємо:

$$\delta J = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{t=T} + \psi(T) \right)^T \vec{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial u} \Delta \vec{u}(t) dt; \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 J &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{t=T} + \psi(T) \right)^T \vec{\omega}_2(T) + \\
&+ \vec{\omega}_1^T(T) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{t=T} \vec{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u}) dt. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

2.2. Побудова розв'язку задачі Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії

Розглянемо теореми, які є фундаментальними для подальших перетворень.

Теорема 2.1. Якщо керування $\vec{u}(t)$ надає мінімальне значення функціоналу $J[\vec{u}]$ (див. 2.3), то виконуються умови

$$\delta J = 0, \quad (2.22)$$

$$\delta^2 J \geq 0 \quad (2.23)$$

для будь-якої вектор-функції $\Delta \vec{u}(t)$.

Доведення. Згідно з означенням мінімуму функціонала повинна виконуватись нерівність (2.4) для будь-яких значень ε . Візьмемо ε

досить малим, зі знаком, протилежним δJ , але таким чином, щоб перший доданок у рівності

$$\Delta J[\bar{u}_1] = \varepsilon \delta J + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J + \dots \quad (2.24)$$

за абсолютною величиною перевищував всі інші. В результаті права частина рівності (2.24) може стати від'ємною. Цей факт суперечить умові (2.4) і одночасно підкреслює необхідність умови (2.22). Якщо

$$\delta J = 0, \text{ то } \Delta J[\bar{u}_1] = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J + \dots \geq 0, \text{ звідки маємо умову (2.23).}$$

Зауваження 2.1. Умови (2.22) – (2.23) не можна вважати достатніми тому, що не розглянуто вплив членів вищого порядку мализни розкладання (2.24) на значення приросту функціонала (2.3).

Теорема 2.2. Для того щоб варіація δJ дорівнювала нулю, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$\psi(T) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{t=T} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (2.26)$$

Достатність умов (2.25) – (2.26) доводиться безпосередньо підстановкою цих умов у вираз для першої варіації функціонала (2.20).

Для доведення необхідності прирівнюємо праву частину рівності (2.20) до нуля:

$$\left(\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{t=T} + \psi(T) \right)^T \Delta \bar{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \Delta \bar{u}(t) dt = 0.$$

Умова (2.26) за основною лемою варіаційного числення [3] необхідна для рівності нулю другого доданка вищенаведеної рівності. Якщо б не виконувалася умова (2.25), то в силу довільності вектор-функції $\Delta \bar{\omega}_1(T)$ її можна вибрати таким чином, щоб $\delta J \neq 0$, що суперечить умові теореми.

Зауваження 2.2. Умову (2.25) досить часто називають умовою трансверсальності. Надалі умови трансверсальності будуть виписані в загальному вигляді.

Зауваження 2.3. Рівняння (2.26) задають систему з r -алгебричних рівнянь. Якщо цю систему можна розв'язати відносно вектор-функції $\bar{u}(t)$, а саме

$$\bar{u}(t) = \varphi(t, \bar{x}(t), \psi(t)), \quad (2.27)$$

то функцію Гамільтона (2.10) доречно переписати у вигляді

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t)) = H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \varphi(t, \bar{x}(t), \psi(t))), \quad (2.28)$$

для якої також виконуються рівняння системи (2.13).

Таким чином, схему розв'язання задачі (2.1) – (2.3) можна скласти так:

- 1) за формулою (2.10) будуємо функцію Гамільтона;
- 2) із системи рівнянь (2.26) знаходимо керування (2.27);
- 3) із системи (2.13) для функції Гамільтона (2.28) визначаємо вектор-функції $\vec{x}(t, \vec{c})$ та $\vec{\psi}(t, \vec{c})$, які задовольняють умову $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$;
- 4) з умови трансверсальності (2.25) знаходимо невідомі \vec{c} і підставляємо їх у функції $\vec{x}(t, \vec{c})$, $\vec{\psi}(t, \vec{c})$ та $\vec{u}(t)$ (2.27).

Для з'ясування питання, чи дійсно на визначених екстремалях функціонал (2.3) досягає мінімального значення, потрібно провести додаткові дослідження, пов'язані, наприклад, з перевіркою умови (2.23).

У випадку виконання умови (2.22) друга варіація функціонала (2.21) набуває вигляду

$$\delta^2 J = \vec{\omega}_1^T(T) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{t=T} \vec{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u}) dt, \quad (2.29)$$

де

$$K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u}) = \vec{\omega}_1^T(t) H_{xx} \vec{\omega}_1(t) + 2 \vec{\omega}_1^T(t) H_{xu} \Delta \vec{u} + \Delta \vec{u}^T H_{uu} \Delta \vec{u}. \quad (2.30)$$

Зрозуміло, що функціонал (2.29) додатно визначений, коли квадратичні форми $\vec{\omega}_1^T(T) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=T} \vec{\omega}_1(T)$ і $-K(\vec{\omega}_1, \Delta \vec{u})$ додатно визначені. Перевірка додатної визначеності вказаних квадратичних форм є досить громіздкою. Тому доцільно вживати слабкіші достатні умови додатної визначеності функціонала (2.29). Такою найбільш поширеною достатньою умовою додатної визначеності другої варіації функціонала (2.3) є умова Лежандра – Клебша.

Теорема 2.3 (умова Лежандра – Клебша). Якщо $\delta^2 J > 0$, то

$$H_{uu}'' < 0 \quad (2.31)$$

для будь-яких значень вектор-функції $\Delta \vec{u}(t)$ і $\forall t \in [t_0, T]$.

Умова (2.31) теореми 2.3 називається умовою Лежандра – Клебша. Якщо $\vec{u}(t)$ - оптимальне керування задачі (2.1) – (2.3), то умова (2.31) разом з умовою (2.26) вказують на те, що функція Гамільтона (2.10) на цьому керуванні набуває локального максимуму.

Теорема 2.3 дається без доведення. Вона є наслідком принципу максимуму Понтрягіна, який буде розглянутий у наступному розділі.

Умова Лежандра – Клебша (2.31) дає можливість спростити запис виразів (2.29) – (2.30). Якщо $H_{uu} < 0$, то існує обернена матриця H_{uu}^{-1} . Далі покладемо

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \Delta \bar{u} + H_{uu}^{-1} H_{ux} \bar{\omega}_1; \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u} H_{uu}^{-1} H_{ux}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}; \\ C &= -H_{xx} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}; \quad D = -H_{uu}; \quad E = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\delta^2 J = \bar{\omega}_1^T(T) E \bar{\omega}_1(T) - \int_{t_0}^T (\bar{\omega}_1^T C \bar{\omega}_1 + \bar{u}^T D \bar{u}) dt. \quad (2.32)$$

При цьому вираз (2.14) записується у вигляді

$$\dot{\bar{\omega}}_1(t) = A \bar{\omega}_1(t) + B \bar{u}(t), \quad \bar{\omega}_1(t_0) = 0. \quad (2.33)$$

До речі, у виразі (2.33) можна розглядати початкові умови, відмінні від нуля.

Тепер можна записати достатні умови додатної визначеності квадратичної форми (2.29) або (2.32).

Теорема 2.4. Якщо виконуються умови

$$C > 0, \quad D > 0, \quad E > 0, \quad (2.34)$$

то функціонал (2.29) додатно визначений.

Зауваження 2.4. Слід нагадати, що теореми 2.3 та 2.4 дають лише необхідні умови того, що функціонал (2.3) досягає мінімуму. Для досвідченого дослідника знання екстремальних керувань, як правило, достатньо. В деяких випадках допомагають фізичні міркування.

2.3. Задачі Больца і Лагранжа з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії

Розглянемо задачу Больца:

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}, \bar{u}); \quad (2.35)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.36)$$

$$J[\bar{u}] = \int_{t_0}^T f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) dt + F(x(T)). \quad (2.37)$$

За формулою (1.15) введемо нову змінну $x^0(t) = \int_{t_0}^t f(t, \bar{x}, \bar{u}) dt$ і побудуємо функціонал (1.16). Задача (2.35) – (2.37) набуває вигляду :

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}, \bar{u}); \quad (2.38)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad (2.39)$$

$$\dot{x}^0 = f_0(t, \bar{x}, \bar{u}); \quad (2.40)$$

$$J[\bar{u}] = x^0(T) + F(\bar{x}(T)). \quad (2.41)$$

Введемо скалярну змінну $\psi_0(t)$ і побудуємо модифіковану функцію Гамільтона:

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t), \psi_0(t), f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) = \\ = \psi^T(t) \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \psi_0(t) f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Система канонічних рівнянь Гамільтона (2.13) така:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, i = \overline{0, n}, \quad \frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^0} = 0, \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi(t) - \psi_0(t) \frac{\partial f_0}{\partial x}, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Умова трансверсальності (2.25) набуває вигляду

$$\bar{\psi}(T) + \frac{\partial F(T)}{\partial x} = 0, \quad \psi_0(T) + 1 = 0. \quad (2.44)$$

Аналіз третього рівняння системи (2.43) і другого рівняння системи (2.44) дозволяє зробити висновок, що $\psi_0(t) = -1$. Тому функцію Гамільтона (2.42) запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t)) = \psi^T(t) f(t, \bar{x}, \bar{u}) - f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) = \\ = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \bar{x}, \bar{u}) - f_0(t, \bar{x}, \bar{u}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для розв'язання задачі Лагранжа потрібно в задачі (2.38) – (2.41) взяти $F(\bar{x}(T)) = 0$. В цьому випадку умови трансверсальності (2.44) набувають вигляду

$$\bar{\psi}(T) = 0. \quad (2.46)$$

2.4. Задача Майєра з довільним часом і без обмежень на правий кінець траєкторії

Розглянемо задачу Майєра (2.1) – (2.3), коли момент припинення дії процесу $t = t_1$ невідомий. Тому окрім вибору оптимального керування потрібно знайти скінченний момент часу t_1 . Маємо:

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \quad (2.47)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad (2.48)$$

$$J[u] = F(t_1, \bar{x}(t_1)) \rightarrow \min. \quad (2.49)$$

Якщо в (2.49) зафіксувати значення t_1 , то на проміжку $[t_0, t_1]$ розв'язанням задачі (2.47) – (2.48) буде деякий процес $(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t))$, який задовольняє систему канонічних рівнянь Гамільтона (2.13) і умови трансверсальності (2.25) з функцією Гамільтона (2.28).

За момент припинення дії процесу, згідно з (2.49), вибирається таке значення t_1 , для якого функція $F(t_1, \bar{x}(t_1))$ набуває мінімального значення. Тому повинні виконуватись умови

$$\frac{dF}{dt_1} = 0, \quad \frac{d^2 F}{dt_1^2} > 0. \quad (2.50)$$

Перше з рівнянь (2.50) записуємо у вигляді

$$\frac{dF}{dt_1} = \frac{\partial F}{\partial t_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T f(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\psi}(t_1))) = 0, \quad (2.51)$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} - \bar{\psi}^T(t_1) f(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\psi}(t_1))) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} - H(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\psi}(t_1), \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\psi}(t_1))) = 0. \quad (2.52)$$

Останні перетворення зроблені з урахуванням того, що процес $(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t))$ є екстремальним і задовольняє умови трансверсальності (2.25).

Таким чином, розв'язок задачі (2.47) – (2.49), якщо він існує, може бути отримано з розв'язання задачі (2.1) – (2.3), де замість умов трансверсальності (2.25) потрібно розглянути умови трансверсальності (2.25), (2.52).

Зауваження 2.5. В схемі розв'язання задачі (2.1) – (2.3) наведений в підрозд. (2.2) пункт 4 потрібно записати так:

$$\begin{cases} \bar{\psi}(t_1, \bar{c}) + \frac{\partial F(t_1, \bar{x}(t_1, \bar{c}))}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_1} - H(t_1, \bar{x}(t_1, \bar{c}), \bar{\psi}(t_1, \bar{c}), \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}(t_1, \bar{c}), \bar{\psi}(t_1, \bar{c}))) = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

2.5. Задача Майєра з обмеженнями загального вигляду

У загальній постановці задачі Майєра скінченний час невідомий і визначається моментом досягнення точкою $(t_1, \bar{x}(t_1))$ деякої заданої поверхні. Маємо:

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \quad (2.54)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.55)$$

$$J[\bar{u}] = F(t_1, \bar{x}(t_1)) \rightarrow \min; \quad (2.56)$$

$$(t_1, \bar{x}(t_1)) \in \Gamma \left\{ t, \bar{x} : g_j(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0, j = \overline{1, l} \right\}. \quad (2.57)$$

Для розв'язання задачі (2.54) – (2.57) побудуємо допоміжну задачу:

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \quad (2.58)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.59)$$

$$J[\bar{u}] = \tilde{F}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu}) \rightarrow \min, \quad (2.60)$$

де

$$\tilde{F}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu}) = F(t_1, \bar{x}(t_1)) + \bar{\mu}^T \bar{g}(t_1, \bar{x}(t_1)), \quad (2.61)$$

$\bar{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}^T$ - деякий сталий l -вимірний вектор, $\bar{g}(t_1, \bar{x}(t_1)) = \{g_1(t_1, \bar{x}(t_1)), g_2(t_1, \bar{x}(t_1)), \dots, g_l(t_1, \bar{x}(t_1))\}$ - l -вимірна вектор-функція. Задача (2.58) – (2.60) збігається з задачею (2.47) – (2.49). Екстремалі цієї задачі задовольняють умови трансверсальності (2.53), які набувають вигляду

$$\begin{cases} \bar{\psi}(t_1, \bar{c}) + \frac{\partial F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_1} - H(t_1, \bar{x}(t_1, \bar{c}), \bar{\psi}(t_1, \bar{c}), \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}(t_1, \bar{c}), \bar{\psi}(t_1, \bar{c}))) = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Колишній l -вимірний вектор $\bar{\mu}$ можна підібрати таким чином, щоб виконувалася умова

$$\bar{g}(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0,$$

або

$$g_j(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0, j = \overline{1, l}. \quad (2.63)$$

Таким чином, розв'язок задачі (2.54) – (2.56) можна отримати з розв'язання задачі (2.47) – (2.49), якщо в останній умови (2.53) замінити на умови (2.62) – (2.63).

Система (2.62) – (2.63) складається з $(n+l+1)$ -рівняння відносно $(n+l+1)$ -невідомого. Розв'язавши її відносно $t_1, \bar{c}, \bar{\mu}$, знайдемо оптимальний момент часу t_1 і екстремальні траєкторії, якщо, зрозуміло, вони існують.

У задачах підрозд. 2.2 – 2.5 були отримані умови трансверсальності (2.25), (2.44), (2.46), (2.53), (2.62). Для кожної задачі вони мають свій окремий вигляд, і це вносить незручності для користування ними. Вказані умови трансверсальності можна записати за допомогою одного рівняння, яке має вигляд

$$\delta F(t_1) - H(t_1)\delta t_1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t_1)\delta x_i = 0. \quad (2.64)$$

У випадку, коли час закінчення процесу відомий, тобто $t_1 = T$, значення δt_1 дорівнює нулю. Аналогічно, коли скінченний стан процесу відомий, значення $\delta x_i, i = \overline{1, n}$ також обертаються в нуль.

Надалі функцію Гамільтона вибираємо у формі (2.45), тобто

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

Ця формула є узагальненням формули (2.10) і може бути застосована для задач Больца, Майєра ($f_0 \equiv 0$) і Лагранжа.

У задачі (2.54) – (2.56) можна відмовитися від застосування вектора $\bar{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}^T$, записавши умови трансверсальності у вигляді (2.64), а умови (2.63) замінити на такі:

$$\begin{cases} g_i(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0; \\ \delta g_j(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0, j = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (2.65)$$

де

$$\delta g_j(t_1, \bar{x}(t_1)) = \frac{\partial g_j}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i. \quad (2.66)$$

Аналогічно в рівнянні (2.64) варіація термінального члена $F(t_1, \bar{x}(t_1))$ знаходиться за формулою

$$\delta F(t_1) = \frac{\partial F}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i. \quad (2.67)$$

Наприкінці наведемо загальну схему розв'язання задач оптимального керування методами класичного варіаційного числення.

Алгоритм застосування методів класичного варіаційного числення до розв'язання задач оптимального керування

1. Складаємо гамільтоніан:

$$H(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\psi}(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) - f_0(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)).$$

2. Знаходимо оптимальне керування $\vec{u}^*(t) = \vec{u}^*(t, \vec{\psi}(t), \vec{x}(t))$ з умов максимуму гамільтоніана за керуванням. Це умови $H'_u = 0$ (2.26) і $H''_{uu} < 0$ (умова Лагранжа – Клебша (2.31)).

3. Складаємо систему канонічних рівнянь Гамільтона (2.13) із заданими в задачі умовами.

4. З умов трансверсальності (2.64) із застосуванням умов (2.65), якщо це необхідно, знаходимо для системи (2.13) граничні умови, яких не вистачає.

5. Розв'язуємо крайову задачу (2.13) з урахуванням пунктів 2 і 4. В результаті отримуємо трійку $(t_1, \vec{x}^*(t_1), \vec{u}^*(t_1))$, на якій може досягати екстремуму функціонал задачі оптимального керування.

Зауваження 2.6. У випадку, коли початковий стан і момент початку процесу t_0 не задані, а визначаються разом зі скінченням станом рівняннями

$$g_i(t_0, \vec{x}(t_0), t_1, \vec{x}(t_1)) = 0; \quad i = \overline{1, l},$$

термінальний член задається у вигляді $F(t_0, \vec{x}(t_0), t_1, \vec{x}(t_1))$, функціонал задачі записується у формі

$$J[\vec{u}] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt + F(t_0, \vec{x}(t_0), t_1, \vec{x}(t_1)) \rightarrow \min,$$

а умови трансверсальності, за умови, що

$$g_i(t_0, \vec{x}(t_0), t_1, \vec{x}(t_1)) = 0, \quad \delta g_i(t_0, \vec{x}(t_0), t_1, \vec{x}(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, l},$$

мають вигляд

$$\left(\delta F(t_1) - H(t_1) \delta t_1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t_1) \delta x_i(t_1) \right) - \left(\delta F(t_0) - H(t_0) \delta t_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t_0) \delta x_i(t_0) \right) = 0.$$

2.6. Приклади застосування варіаційних методів у задачах оптимального керування

У наступних прикладах потрібно знайти множину оптимальних процесів. Залежно від постановки задачі це або оптимальна пара

$(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t))$, або оптимальна трійка $(t^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t))$. Всі змінні у наведених прикладах скалярні.

Приклад 2.1. Задано модель об'єкта керування

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad \text{де } x \in R, \quad u \in R, \quad t \in [0;1],$$

і функціонал

$$J[u] = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Знайти оптимальний процес $\{u^*(t), x^*(t)\}$.

Розв'язання. В цій задачі $f(t, x, u) = u$, $f_0(t, x, u) = u^2 + x^2$, $t_1 = 1$, $F(x) = 0$. Розв'язується задача Лагранжа.

За схемою підрозд. 2.5 виконуємо такі дії:

1. Складаємо гамільтоніан $H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi u - u^2 - x^2$.

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням: $H'_u = \psi - 2u = 0$, $u^* = \psi(t)/2$. Визначене керування забезпечує максимум гамільтоніана за керуванням тому, що виконується достатня умова екстремуму $H''_{uu} = -2 < 0$.

3. Записуємо систему канонічних рівнянь Гамільтона із заданою початковою умовою

$$\dot{x}(t) = \psi(t)/2, \quad \dot{\psi}(t) = 2x(t), \quad x(0) = 0,5. \quad (2.68)$$

4. Знаходимо з умов трансверсальності (2.64) граничні умови, яких не вистачає: $t_1 = 1, F(x) = 0$; значення $x(1)$ не задано, тому $\delta t_1 = 0$, $\delta F = 0$, $\delta x \neq 0$ при $t = t_1$. Враховуючи вищенаведене, отримуємо додаткову граничну умову

$$\psi(1) = 0. \quad (2.69)$$

5. Розв'язуємо початково-крайову задачу (2.68) - (2.69). Диференціюючи перше рівняння (2.68) за t з урахуванням другого рівняння (2.68), отримуємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами для визначення функції $x(t)$, а саме $\ddot{x} - x = 0$.

Розв'язок цього рівняння має вигляд $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Функцію $\psi(t)$ знаходимо з першого рівняння (2.68): $\psi(t) = 2c_1 e^t - 2c_2 e^{-t}$. З початкових і граничних умов визначаємо невідомі сталі $c_1 = 0.5/(1 + e^2)$, $c_2 = 0.5e^2/(1 + e^2)$. Таким чином, оптимальний процес $\{u^*(t), x^*(t)\}$ має вигляд

$$x^*(t) = \frac{e^2}{1+e^2} ch(t-1), \quad u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{e^2}{1+e^2} sh(t-1).$$

Приклад 2.2. Задано модель об'єкта керування

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 0, \quad \text{де } x \in R, \quad u \in R, \quad t \in [0;1],$$

і функціонал

$$J[u] = \int_0^1 u^2(t) dt - x(1) \rightarrow \min.$$

Знайти оптимальний процес $\{x^*(t), u^*(t)\}$.

Розв'язання. В цій задачі $f(t, x, u) = x + u$, $f_0(t, x, u) = u^2$, $t_1 = 1$, $F(x) = -x$. Розв'язується задача Больца.

1. Складаємо гамільтоніан $H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi(x + u) - u^2$.

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням: $H'_u = \psi - 2u = 0$, $u^* = \psi(t)/2$. Визначене керування забезпечує максимум гамільтоніана за керуванням тому, що виконується достатня умова екстремуму $H''_{uu} = -2 < 0$.

3. Записуємо систему канонічних рівнянь Гамільтона із заданою початковою умовою

$$\dot{x}(t) = x(t) + \psi(t)/2, \quad \dot{\psi}(t) = -\psi(t), \quad x(0) = 0. \quad (2.70)$$

4. Знаходимо з умов трансверсальності (2.64) граничні умови, яких не вистачає: $t_1 = 1$, $\delta t_1 = 0$, $F(x) = -x$, $\delta F = \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x = -\delta x$ при $t = t_1$. Враховуючи вищенаведене, отримуємо $(-1 + \psi(1))\delta x = 0$. Оскільки $\delta x \neq 0$, то додаткова гранична умова має вигляд

$$\psi(1) = 1. \quad (2.71)$$

5. Розв'язуємо початково-крайову задачу (2.70) – (2.71). Друге диференціальне рівняння системи (2.70) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $\psi(t) = c_1 e^{-t}$. З граничної умови (2.71) знаходимо $c_1 = e$, $\psi(t) = e^{1-t}$. Підставляючи $\psi(t)$ в перше рівняння (2.70), отримуємо $\dot{x} - x = e^{1-t}$. Розв'язок цього рівняння з урахуванням початкової умови (2.70): $x(t) = 0,25(e^{1+t} - e^{1-t})$. Таким чином, оптимальний процес $\{u^*(t), x^*(t)\}$ має вигляд

$$x^*(t) = (e^{1+t} - e^{1-t})/4, \quad u^*(t) = \psi(t)/2 = e^{1-t}/2.$$

Приклад 2.3. Задано модель об'єкта керування

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad \text{де } x \in R, \quad u \in R, \quad t \in [0; t_1],$$

і функціонал

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2(t) dt + 4x(1) \rightarrow \min.$$

Задано також скінченну умову $t_1 - x(t_1) - 1 = 0$.

Знайти оптимальний процес $\{t_1^*, x^*(t), u^*(t)\}$.

Розв'язання. В цій задачі $f(t, x, u) = u$, $f_0(t, x, u) = u^2 / 2$, $F(x) = 4x$.

Розв'язується задача Больца.

1. Складаємо гамільтоніан $H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi u - u^2 / 2$.

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням: $H'_u = \psi - u = 0$, $u^* = \psi(t)$. Визначене керування забезпечує максимум гамільтоніана за керуванням тому, що виконується достатня умова екстремуму $H''_{uu} = -1 < 0$.

3. Записуємо систему канонічних рівнянь Гамільтона із заданою початковою умовою

$$\dot{x}(t) = x(t) + \psi(t), \quad \dot{\psi}(t) = 0, \quad x(0) = 1. \quad (2.72)$$

4. Знаходимо з умов трансверсальності (2.64) з використанням додаткової умови (2.65) $t_1 - x(t_1) - 1 = 0$ граничні умови, яких не

вистачає: $\delta t_1 \neq 0$, $F(x) = 4x$, $\delta F = \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x = 4\delta x$ при $t = t_1$,

$H(t_1) = \psi^2(t_1) / 2$, $\delta(t_1 - x(t_1) - 1) = \delta t_1 - \delta x = 0$. Враховуючи вищевикладене, отримуємо

$$4\delta x - \frac{1}{2} \psi^2(t_1) \delta t_1 + \psi(t_1) \delta x = 0, \quad t_1 - x(t_1) - 1 = 0, \quad \delta t_1 - \delta x = 0. \quad (2.73)$$

5. Розв'язуємо початково-крайову задачу (2.72) – (2.73). Маємо:

$$\psi(t) = c_1, \quad x(t) = c_1 t + c_2, \quad 4 - \psi^2(t_1) / 2 + \psi(t_1) = 0, \quad t_1 - x(t_1) - 1 = 0, \quad x(0) = 1.$$

Звідси знаходимо:

а) $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $t_1 = 2/3$, $x^*(t) = -2t + 1$, $u^* = -2$;

б) $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $t_1 = -2/3 < 0$, $x^*(t) = 4t + 1$, $u^* = 4$.

Випадок «б» не має фізичної реалізації тому, що час закінчення процесу від'ємний. Таким чином, оптимальний процес $\{t_1^*, u^*(t), x^*(t)\}$ має вигляд

$$t_1^* = 2/3, \quad x^*(t) = -2t + 1, \quad u^* = -2.$$

Приклад 2.4. Оптимальне планування поставок продукції. Неперервний варіант ([9]).

Розв'язання. Розглянемо деякий процес виробництва і поставок продукції на проміжку часу $t \in [0; T]$, де T – плановий період. Попит на продукцію за цей час визначається заданою функцією $r(t)$. Забороняється довгий час зберігати продукцію, тобто не можна створювати запаси за допомогою перевищення в деякі моменти часу t обсягів поставок $x(t)$ над попитом.

Будемо вважати, що розбіжність між поставками $x(t)$ і попитом $r(t)$ призводить до втрат для господарської організації. У випадку дефіциту, тобто коли $q(t) = x(t) - r(t) < 0$, втрати відбуваються в результаті незадовільного попиту. У випадку, коли поставки перевищують попит ($q(t) > 0$), втрати виникають в результаті пошуку нових споживачів або інших умов реалізації продукції.

Якщо припустити, що втрати від перевищення обсягів поставок продукції над попитом ($q > 0$) менші, ніж втрати від дефіциту ($q < 0$), за умови, що в обох випадках різниці $|q|$ однакові, то графік функції $m_1(q)$ буде мати вигляд, наведений на рис. 2.1.

Функціональна залежність, зображена на рис. 2.1, може бути записана так:

$$m_1(q) = \begin{cases} a_1 q^2, & q \geq 0; \\ b_1 q^2, & q < 0, b_1 > a_1 > 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Для виробників найзручнішим є сталий рівень інтенсивності виробництва, тобто $x(t) = const$, або $u(t) = 0$, де $u(t) = x(t + \tau) - x(t)$, $\tau > 0$. У випадку зростання виробництва ($u(t) > 0$) або зменшення виробництва ($u(t) < 0$) виробники зазнають втрат. Функція втрат виробника $m_2(u)$, за аналогією з функцією $m_1(q)$, має вигляд, зображений на рис. 2.2.

Аналітична форма запису функції $m_2(u)$ така:

$$m_2(u) = \begin{cases} a_2 u^2, & u \geq 0; \\ b_2 u^2, & u < 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

На відміну від формули (2.74) у (2.75) не можна заздалегідь сказати, яка з гілок (див. рис. 2.2) крутіша.

Задача планування поставок продукції формулюється таким чином: знайти функцію обсягів поставок продукції $x(t)$, $t \in [0, T]$ і динаміку необхідного змінювання цих обсягів, яка описується функцією $u(t)$. При цьому сумарні втрати споживачів від можливої розбіжності між попитом і поставками, а також виробників – від можливої перебудови виробництва протягом планового періоду T мають бути мінімальними.

Математичний запис поставленої задачі такий:
рівняння процесу

$$\dot{x}(t) = u(t); \quad (2.76)$$

початкова умова

$$x(0) = x_0; \quad (2.77)$$

функціонал

$$J[u] = \int_0^T [m_1(x(t) - r(t)) + m_2(u(t))] dt + m_1(x(T) - r(T)) \rightarrow \min. \quad (2.78)$$

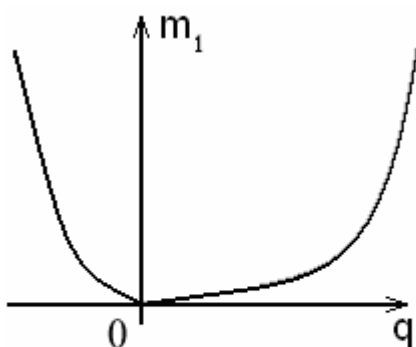


Рис. 2.1

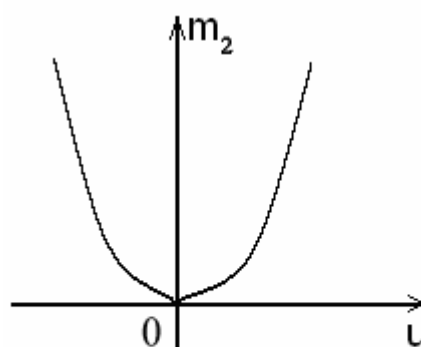


Рис. 2.2

Функція Гамільтона (2.45) для задачі (2.76) – (2.78) має вигляд

$$H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t)u(t) - m_1(x(t) - r(t)) - m_2(u(t)). \quad (2.79)$$

Оптимальне керування $u^*(t)$ знаходимо з умов максимуму функції (2.79) за керуванням (2.26), (2.31). Маємо:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi(t) - \frac{dm_2(u)}{du} = \psi(t) - 2 \begin{cases} a_2 u^2, & u \geq 0, \\ b_2 u^2, & u < 0 \end{cases} = 0,$$

звідки

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\psi(t)}{a_2}, & \psi(t) \geq 0, \\ \frac{\psi(t)}{b_2}, & \psi(t) < 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Умова Лежандра - Клебша (2.31) при цьому виконується:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 \begin{cases} a_2, & u \geq 0, \\ b_2, & u < 0 \end{cases} < 0, \forall a_2, b_2 > 0.$$

Далі складаємо систему канонічних рівнянь Гамільтона (2.13) із заданими в задачі умовами:

$$\dot{x}(t) = u(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\psi(t)}{a_2}, \psi(t) \geq 0, \\ \frac{\psi(t)}{b_2}, \psi(t) < 0; \end{cases} \quad (2.81)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2 \begin{cases} a_1(x(t) - r(t)), x(t) \geq r(t), \\ b_1(x(t) - r(t)), x(t) < r(t); \end{cases} \quad (2.82)$$

$$x(0) = x_0; \quad (2.83)$$

Граничні умови, яких бракує, знаходимо з умов трансверсальності (2.64):

$$\psi(t) = -2 \begin{cases} a_1(x(T) - r(T)), x(T) - r(T) \geq 0, \\ b_1(x(T) - r(T)), x(T) - r(T) < 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Таким чином, процес знаходження оптимального керування звівся до розв'язання крайової задачі (2.81) – (2.84), (2.77).

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.81) – (2.82) використовується той чи інший метод чисельного інтегрування. Якщо взяти метод Ейлера [13], то отримаємо систему скінченно-різницевих рівнянь з кроком інтегрування Δt , а саме:

$$\frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \approx 2 \begin{cases} a_1(x(t) - r(t)), x(t) \geq r(t), \\ b_1(x(t) - r(t)), x(t) < r(t); \end{cases}$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\psi(t)}{a_2}, \psi(t) \geq 0, \\ \frac{\psi(t)}{b_2}, \psi(t) < 0. \end{cases}$$

Звідси для досить малих значень Δt знаходимо:

$$\psi(t + \Delta t) = \psi(t) + 2\Delta t \begin{cases} a_1(x(t) - r(t)), x(t) \geq r(t), \\ b_1(x(t) - r(t)), x(t) < r(t); \end{cases} \quad (2.85)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{2} \begin{cases} \frac{\psi(t)}{a_2}, \psi(t) \geq 0, \\ \frac{\psi(t)}{b_2}, \psi(t) < 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

Приклад 2.5. Календарне планування поставок продукції. Чисельне розв'язання. Дискретний варіант ([9]).

Процес виробництва і поставок продукції, на відміну від прикладу 2.4, відбувається у дискретні моменти часу $t = 0, 1, \dots, T$.

За аналогією з (2.76) – (2.78) для дискретного процесу маємо:
рівняння процесу

$$x(t+1) = x(t) + u(t); \quad (2.87)$$

початкова умова (2.77), а саме $x(0) = x_0$;

функціонал

$$J[u] = \sum_{t=0}^{T-1} [m_1(x(t) - r(t)) + m_2(u(t))] + m_1(x(T) - r(T)) \rightarrow \min. \quad (2.88)$$

У термінальний член функціонала (2.78) не записують вираз $m_2(u(T))$ тому, що на подальші перетворення він не має впливу.

Задача (2.87) – (2.88), (2.77) належить до класу багатокрокових керованих процесів. Необхідні умови оптимальності мають вигляд:

$$\left. \frac{\partial H(t, \psi(t+1), x(t), u(t))}{\partial u} \right|_{u=u^*(t)} = 0; \quad (2.89)$$

$$\psi(t) = \left. \frac{\partial H(t, \psi(t+1), x(t), u^*(t))}{\partial x} \right|_{x=x^*(t)}; \quad (2.90)$$

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)). \quad (2.91)$$

До рівностей (2.89) – (2.91) потрібно додати початкову умову (2.77) та умови трансверсальності (2.64) для значень $t = T$. Функція Гамільтона записується у вигляді (2.45).

Якщо вищенаведені необхідні умови оптимальності застосувати до задачі (2.87) – (2.88), (2.77), то отримаємо

$$H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t)(x(t) + u(t)) - m_1(x(t) - r(t)) - m_2(u(t)),$$

$$\psi(t+1) = \left. \frac{dm_2}{du} \right|_{u=u^*(t)} = 0 \quad (\text{з (2.89)}),$$

або, з урахуванням (2.69),

$$\psi(t+1) = \begin{cases} 2a_2 u^*(t), u^*(t) \geq 0; \\ 2b_2 u^*(t), u^*(t) < 0. \end{cases} \quad (2.92)$$

З умови (2.90) знаходимо

$$\psi(t) = \psi(t+1) - \left. \frac{dm_1}{dq} \right|_{q=x(t)-r(t)},$$

або, з урахуванням (2.69)

$$\psi(t) = \psi(t+1) - 2 \begin{cases} a_1(x(t) - r(t)), x(t) \geq r(t), \\ b_1(x(t) - r(t)), x(t) < r(t). \end{cases} \quad (2.93)$$

З (2.92) маємо

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t+1)}{2a_2}, \psi(t+1) \geq 0, \\ \frac{\psi(t+1)}{2b_2}, \psi(t+1) < 0. \end{cases} \quad (2.94)$$

Далі підставляємо $u^*(t)$ в рівняння процесу (2.87). Маємо

$$x^*(t) = x^*(t+1) - \begin{cases} \frac{\psi(t+1)}{2a_2}, \psi(t+1) \geq 0, \\ \frac{\psi(t+1)}{2b_2}, \psi(t+1) < 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Якщо задано значення $x^*(t+1), \psi(t+1)$, то з формул (2.93) – (2.95) знаходимо $x^*(t), \psi(t), u^*(t)$ і т. д. Розрахунки будуть продовжені, поки не буде визначено значення $x^*(0)$ за умовою $x^*(0) = x_0$. Щоб цього досягти, потрібно застосувати умову трансверсальності (2.64). Використовуючи (2.78) – (2.79), (2.74), знаходимо:

$$F = m_1(x(T) - r(T)), \quad t = T, \quad \text{тому } \delta t = 0, \quad \delta F = \left. \frac{dm_1}{dq} \frac{dq}{dx} dx \right|_{x=x^*},$$

$$q(t) = x(t) - r(t), \quad \left. \frac{dm_1}{dq} \right|_{x=x^*} + \psi(t) \Big|_{t=T} = 0, \quad \psi(T) = - \left. \frac{dm_1}{dq} \right|_{x=x^*},$$

або

$$\psi(T) = -2 \begin{cases} a_1(x^*(T) - r(T)), x^*(T) \geq r(T), \\ b_1(x^*(T) - r(T)), x^*(T) < r(T). \end{cases} \quad (2.96)$$

Покладемо $t+1 = T$. Тоді за формулами (2.93) – (2.96) можна отримати $x^*(0)$, значення якого буде залежним від прийнятого значення $x^*(T)$. Значення $x^*(T)$ потрібно задати. Як це зробити, буде показано далі. Таким чином, повинна виконуватися рівність $x^*(0, x^*(T)) = x_0$. Ця рівність є рівнянням відносно $x^*(T)$, для розв'язання якого можуть бути застосовані лише чисельні методи. Найбільш поширеним з них є метод прогонки. Точність обчислення перевіряється умовою

$$\left| x^*(0, x^*(T)) - x_0 \right| < \varepsilon. \quad (2.97)$$

Якщо на деякому кроці $t = t_1$ вираз $x^*(t_1)$ стане від'ємним, ітерація припиняється, задається нове значення $x^*(T)$ і відбувається перехід

до нової ітерації.

Для ілюстрації наведеного методу розв'язання пропонується такий приклад.

Дано: $T = 5$, $x_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = b_2 = 3$, $\varepsilon = 0,1$.

Значення функції $r(t)$ наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

t	0	1	2	3	4	5
$r(t)$	1	2	1	5	4	8

Перша ітерація. За змістовною складовою задачі шукана функція $x^*(t)$ повинна наближатися до заданої функції $r(t)$. Для початку покладемо $x^*(5) = r(5) = 8$. За $u^*(3)$ формулою (2.96) отримаємо $\psi(5) = 0$. За формулами (2.93) – (2.95) визначаємо: $T = t + 1 = 5$, $t = 4$, $x^*(4) = 8$, $u^*(4) = 0$, $\psi^*(4) = -8$. Далі, взявши $t + 1 = 4$, $t = 3$, знаходимо $x^*(3)$, $\psi(3)$ і т. п. В кінці першої ітерації визначаємо $x^*(0) = 30,58$, що не задовольняє умову (2.97).

Друга ітерація. Щоб зменшити значення $x^*(0)$, змінимо значення $x^*(5)$. Спочатку зменшимо його. Проведені розрахунки покажуть, правильне це рішення чи ні. Візьмемо $x^*(5) = 6,125$ і одержимо $x^*(0) = 3,923$. Очевидно, що рішення на зменшування значення $x^*(5)$ виявилось правильним.

Третя ітерація. Візьмемо $x^*(5) = 6,02$. Одержимо $x^*(0) = 2,253$. Динаміка на зменшення $x^*(5)$ є правильною.

Четверта ітерація. Візьмемо $x^*(5) = 5,95$. Одержимо $x^*(0) = 1,053$. Це значення задовольняє нерівність (2.97).

Отримані результати вважаються наближеним оптимальним розв'язком. Вони відображені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

t	0	1	2	3	4	5
$x^*(t)$	1,053	1,783	2,365	3,405	4,580	5,950
$\psi(t)$	4,350	4,370	3,500	6,230	7,040	8,200
$u^*(t)$	0,730	0,582	1,040	1,175	1,370	1,370

Зауваження 2.7. Формули (2.93) і (2.95) з точністю до перестановки окремих доданків лівої та правої частин збігаються з еквівалентними формулами (2.85) – (2.86) неперервного варіанта розглянутої задачі. Єдиною відмінністю є те, що у формулах (2.93),

(2.95) крок інтегрування дорівнює одиниці, а у формулах (2.85) – (2.86) - Δt .

Розділ 3. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

3.1. Обговорення принципу максимуму. Задача Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії

Методи класичного варіаційного числення (див. розд. 2) не враховують обмежень на величину керування (1.9). Може так статися, що значення $|\vec{u}(t)|$ буде належати границі області застосування (див. рис. 1.2), а вираз (2.5) і взагалі може не задовольняти умову (1.9). Крім того, досить часто функція Гамільтона (2.45) є лінійною відносно керування $\vec{u}(t)$. В цьому випадку умови (2.26), (2.31) неможливо застосувати.

Указані ускладнення прискорили розробку і впровадження інших методів дослідження задач оптимального керування. Одним з таких методів і є принцип максимуму Понтрягіна.

У процесі керування припускають, що керування використовує інформацію тільки про поточний час, тобто система керування не є замкненою за станом (рис. 3.1).

Функцію $\vec{u}(t)$ називають програмою керування. В економічних задачах застосування керування $\vec{u}(t)$ відповідає довгостроковим планам.

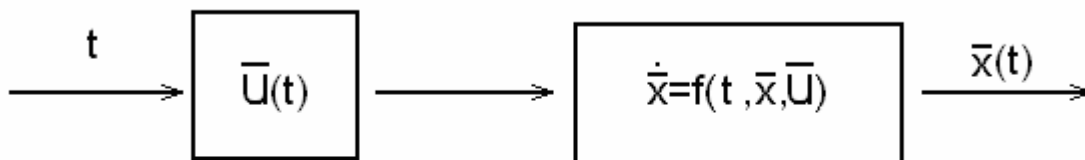


Рис. 3.1

Змістовна складова методу буде викладена на прикладі задачі Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії. Всі інші задачі оптимального керування, як це підкреслювалося в розд. 2, можуть бути зведені саме до цієї задачі.

Розглянемо задачу Майєра:

$$\dot{x}^i(t) = f_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)); \quad (3.1)$$

$$x^i(t_0) = x_0^i; \quad (3.2)$$

$$J[\bar{u}(t)] = F(\bar{x}(T)) \rightarrow \min; \quad (3.3)$$

$$\bar{u}(t) \leq \bar{u}_0, \forall t \in [t_0, T]. \quad (3.4)$$

Нехай $\bar{u}^*(t)$ - шукане оптимальне керування, яке задовольняє умову (3.3), а $\bar{u}_1(t)$ - інше допустиме керування, близьке до $\bar{u}^*(t)$. Для побудови функції $\bar{u}_1(t)$ будемо використовувати метод "голчатих" варіацій. Для цього зафіксуємо будь-яке значення $\tau \in (0, T)$ і розглянемо проміжки $[t_0, \tau - \varepsilon]$, $[\tau - \varepsilon, \tau]$, $[\tau, T]$ для будь-якого додатного скіль завгодно малого значення ε . Покладемо

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\tau - \varepsilon, \tau], \\ \bar{\ell}, & t \in [\tau - \varepsilon, \tau], \end{cases} \quad (3.5)$$

де $\bar{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)^T$.

Керування $\bar{u}_1(t)$ побудуємо таким чином:

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} \bar{u}^*(t), & t \notin [\tau - \varepsilon, \tau], \\ \bar{u}^*(t) + \bar{h}(t), & t \in [\tau - \varepsilon, \tau]. \end{cases} \quad (3.6)$$

Функції $\bar{u}_1^i(t)$ та $\bar{u}^{i*}(t)$ зображені на рис. 3.2. При цьому функції $\bar{x}^*(t)$ і $\bar{x}_1(t)$ однакові на проміжку $[t_0, \tau - \varepsilon)$ і будуть різнитися $\forall t \in [\tau - \varepsilon, T]$ (рис. 3.3).

До речі, близькість функцій $\bar{u}_1(t)$ і $\bar{u}^*(t)$ розглядається як інтегральна, а саме

$$\int_{t_0}^T (\bar{u}_1(t) - \bar{u}^*(t)) dt = \int_{\tau - \varepsilon}^T \bar{h}(t) dt = O(\varepsilon).$$

Покладемо $\bar{\Delta}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)$ і розглянемо значення $t > \tau$, де $\bar{u}_1(t) = \bar{u}^*(t)$. Маємо $\forall i = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta^i(t)}{dt} &= \frac{dx_1^i(t)}{dt} - \frac{dx^{i*}}{dt} = f_i(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}^*(t)) - f_i(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t))}{\partial x_j} \Delta^k(t) + \gamma |\bar{\Delta}(t)|, \end{aligned}$$

де $\gamma \rightarrow 0$ за умови, що $\bar{\Delta}(t) \rightarrow 0$. Спрямуємо $t \rightarrow \tau$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Враховуючи неперервність $\frac{\partial f_1}{\partial x_k}$, $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}^*(t)$, $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}^*(t)$, рівність

(3.7) з точністю до нескінченно малих вищого порядку малості можна

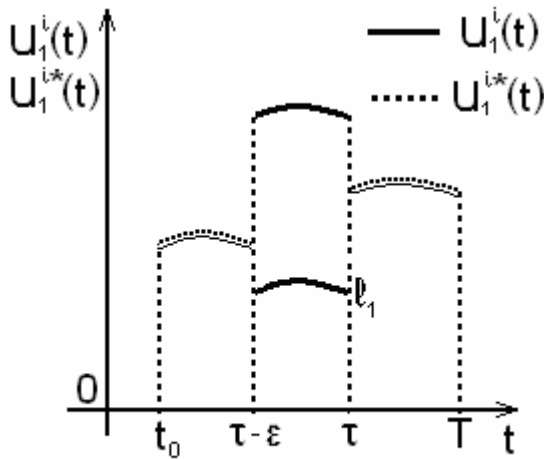


Рис. 3.2

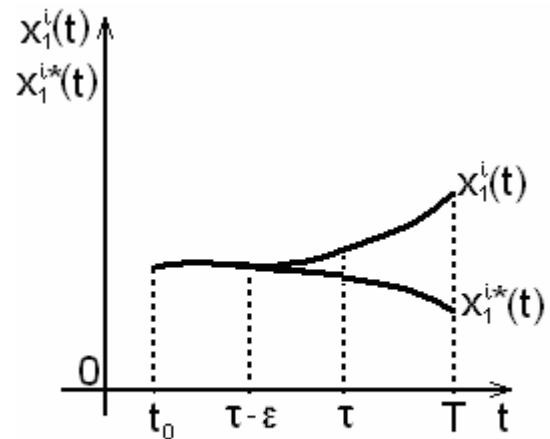


Рис. 3.3

записати у вигляді

$$\frac{d\Delta^i(\tau)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(t, \bar{x}^*(\tau), \bar{u}^*(\tau))}{\partial x_k} \Delta^k(\tau) \quad (3.8)$$

з початковою умовою

$$\bar{\Delta}(\tau) = f(\tau, \bar{x}^*(\tau), \bar{V}(\tau)) - f(\tau, \bar{x}^*(\tau), \bar{u}^*(\tau)) . \quad (3.9)$$

Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} F(\bar{x}(T)) - F(\bar{x}^*(T)) &= F(\bar{x}^*(T) + \bar{\Delta}(T)) - F(\bar{x}^*(T)) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T \bar{\Delta}(T) + \bar{\Delta}^T(T) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{t=T} \cdot \bar{\Delta}(T) + \dots = \delta F + \delta^2 F + \dots > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Враховуючи порядок малості доданків, нерівність (3.10) буде виконуватись, якщо

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T \bar{\Delta}(T) > 0. \quad (3.11)$$

Умова (3.11) є необхідною умовою мінімуму функціонала (3.3).

Для знаходження оптимального керування введемо допоміжну вектор-функцію $\vec{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)\}^T$, яка задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\vec{\psi}}(t) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \vec{\psi}(t) \quad (3.12)$$

і граничні умови

$$\bar{\psi}(T) = - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{t=T}. \quad (3.13)$$

(Порівняйте (3.12) – (3.13) з (2.12), (2.25)).

Розглянемо також функцію Гамільтона (2.10):

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t)) = \bar{\psi}^T(t) f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

Лема 3.1. Якщо вектор-функція $\bar{\Delta}(t)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь (3.8), то $\forall t \in [\tau, T]$

$$\bar{\phi}^T(t) \bar{\Delta}(t) = \text{const}. \quad (3.14)$$

Доведення. Обчислимо похідну за t від добутку $\bar{\psi}^T(t) \bar{\Delta}(t)$ з урахуванням (3.12). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\bar{\psi}^T(t) \bar{\Delta}(t) \right) &= \dot{\bar{\psi}}^T(t) \bar{\Delta}(t) + \bar{\psi}^T(t) \dot{\bar{\Delta}}(t) = \\ &= -\bar{\psi}^T(t) \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\Delta}(t) + \bar{\psi}^T(t) \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\Delta}(t) = 0. \end{aligned}$$

На підставі цього приходимо до висновку, що рівність (3.14) правильна.

Тепер, використовуючи початкову умову (3.9), можна записати $\bar{\psi}^T(t) \bar{\Delta}(t) = \bar{\psi}^T(\tau) \bar{\Delta}(\tau) = \bar{\psi}^T(\tau) f(\tau, \bar{x}^*(\tau), \bar{V}(\tau)) - f(\tau, \bar{x}^*(\tau), \bar{u}^*(\tau)) = H(\bar{V}) - H(\bar{u}^*)$. (3.15)

Підставимо (3.15) в (3.11). З урахуванням (3.13) маємо $\forall \bar{V} \in M_0$

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=T}^T \bar{\Delta}(T) = -\bar{\psi}^T(T) \bar{\Delta}(T) = -H(\bar{V}) + H(\bar{u}^*) > 0. \quad (3.16)$$

Момент часу $t = \tau$ вибирався довільно. Тому нерівність (3.16) виконується: $\forall t \in [t_0, T]$.

Таким чином, якщо $\bar{u}^*(t)$ - оптимальне керування, то функція Гамільтона (2.10) досягає максимуму на цьому керуванні. Ця властивість і отримала назву принципу максимуму Понтрягіна.

Теорема 3.1 (принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра з фіксованим часом і вільним правим кінцем).

Якщо $(\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t))$ - оптимальний процес для задачі (3.1) – (3.4), вектор-функція $\bar{\psi}(t)$ - розв'язок задачі Коші (3.12) – (3.13), $H(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t))$ - функція Гамільтона (2.10), то отримуємо

$$\max_{\vec{u} \in U_0} H(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), \vec{u}(t)) = H(t, \vec{x}^*(t), \vec{\psi}(t), \vec{u}^*(t)), \quad (3.17)$$

тобто функція Гамільтона має максимум за керуванням.

Зауваження 3.1. Задачі Больца і Лагранжа з фіксованим і довільним часом, а також з обмеженнями і без обмежень на правий кінець траєкторії можуть бути зведені до розглянутої задачі Майєра (див. підрозд. 1.3, 2.3 - 2.5).

Зауваження 3.2. Надалі функцію Гамільтона рекомендується записувати у вигляді (2.45).

Зауваження 3.3. Системи (3.1) і (3.12) можуть бути записані в симетричній формі (2.13) за допомогою функції Гамільтона (2.45).

Зауваження 3.4. Якщо обмеження (3.4) на керування відсутні і функція Гамільтона не є лінійною відносно керування $\vec{u}(t)$, то замість необхідної умови (3.17) розглядаються умови (2.26), (2.31) класичного варіаційного числення.

Зауваження 3.5. Для розв'язання задач оптимального керування застосовується алгоритм підрозд. 2.5, за винятком пункту 2, який слід записати так: знаходимо оптимальне керування $\vec{u}^*(t)$ з умови (3.17) – максимуму гамільтоніана за керуванням.

3.2. Приклади застосування принципу максимуму.

Задача на швидкодію

У цьому підрозділі будуть розглянуті приклади задач на оптимальне керування у випадку наявності обмежень на керування. Як зазначалося у розд. 2, методи класичного варіаційного числення у цьому випадку не спрацьовують, і слід користуватися принципом максимуму.

Алгоритм розв'язання задач наведено у підрозд. 2.5. Цим алгоритмом потрібно користуватись з урахуванням зауваження 3.5 попереднього підрозділу.

Приклад 3.1. Задано модель об'єкта керування

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u, \quad |u| \leq 1 \quad (3.18)$$

з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.19)$$

і функціонал

$$J = \dot{x}(2\pi) \rightarrow \min. \quad (3.20)$$

Знайти оптимальне програмне керування $u^*(t)$ і відповідну до нього траєкторію.

Для запису задачі у стандартному вигляді введемо фазовий вектор $\vec{x}(t) = \{x^1(t), x^2(t)\}, T \in R^2, t \in [0, 2\pi]$, де фазові координати $x^i(t), i = 1, 2$

визначаються таким чином: $x^1(t) = x(t), x^2(t) = \dot{x}^1(t)$. Тоді задача (3.18) - (3.20) буде записана так:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^2(t), \\ \dot{x}^2(t) = -x^1(t) + u; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$x^1(0) = 0, x^2(0) = 0; \quad (3.22)$$

$$J = x^2(2\pi) \rightarrow \min. \quad (3.23)$$

Задача (3.21) – (3.23) є задачею Майера з фіксованим часом ($T = 2\pi$). Якщо записати функціонал (3.23) у загальній формі (1.11), то можна ввести такі стандартні формули: $f_0(t, \vec{x}, u) = 0$, $F(\vec{x}) = x_2$, $f_1(t, \vec{x}, u) = x_2$, $f_0(t, \vec{x}, u) = -x_1 + u$, $u \in U_0 = [-1, 1]$. Далі застосовуємо алгоритм підрозд. 2.5 з урахуванням зауваження 3.5.

1. Складаємо гамільтоніан: $H(t, \vec{\psi}(t), \vec{x}(t), u) = \psi_1(t)x^2(t) + \psi_2(t) \times (-x^1(t) + u)$, де $\vec{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t)\}^T$.

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням. Гамільтоніан є лінійною функцією від u , тому згідно з принципом максимуму

$$u^*(t) = \arg \max_{|u| \leq 1} H(t, \vec{\psi}(t), \vec{x}(t), u) = \arg \max_{|u| \leq 1} (u\psi_2(t)) = \text{sign} \psi_2(t).$$

3. Складаємо систему канонічних рівнянь Гамільтона:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^2(t), x^1(0) = 0; \\ \dot{x}^2(t) &= -x^1(t) + u^*(t) = -x^1(t) + \text{sign} \psi_2(t), x^2(0) = 0; \\ \dot{\psi}_1(t) &= \psi_2(t), \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

4. Граничні умови, яких не вистачає, знаходимо з умов трансверсальності (2.64):

$$\delta F - H \delta t_1 + \sum_{j=1}^2 \psi_j(t_1) \delta x^j = 0. \quad (3.25)$$

У нашому випадку $\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial t_1} \delta t_1 = \delta x^j$, $t_1 = 2\pi$, тому

$$\delta t_1 = 0.$$

Правий кінець траєкторії є вільним від будь-яких умов, тому δx_1 і δx_2 вважаються довільними. Рівняння (3.25) набуває вигляду

$$\psi_1(2\pi) \delta x^1 + (1 + \psi_2(2\pi)) \delta x^2 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \quad (3.26)$$

5. Розв'язуємо крайову задачу (3.24), (3.26):

$$\ddot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2, \quad \ddot{\psi}_1 + \psi_1 = 0, \quad \psi_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad \psi_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

З урахуванням (3.26) визначаємо $c_1 = 0, c_2 = -1$. Маємо $\psi_1(t) = -\sin t, \psi_2(t) = -\cos t, u^*(t) = -\text{sign}(\cos t)$. Отримане керування $u^*(t)$ на проміжку $t \in [0; 2\pi]$ має дві точки перемикання і, як наслідок, три інтервали, де функція $u^*(t)$ набуває сталих значень. Розглянемо ці інтервали:

а) $t \in [0, 2\pi], u^*(t) = -\text{sign}(\psi_1(t)) = -1.$

З (3.24) маємо:

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = -x^1(t) - 1, \quad x^1(0) = x^2(0) = 0;$$

$$\ddot{x}^1 + x^1 = -1, \quad x_{\text{заг. одн}}^1 = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t, \quad x_{\text{част. неодн}}^1 = -1;$$

$$\begin{cases} x^1(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t - 1, \\ x^2(t) = -\alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t. \end{cases}$$

Використовуючи початкові умови, знаходимо, що $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. Таким чином, $x^{1*}(t) = \cos t - 1, x^{2*}(t) = -\sin t, u^* = -1, t \in [0, \frac{\pi}{2}];$

б) $t \in [\pi/2, 3\pi/2), u^*(t) = 1$. Проводячи аналогічні перетворення, знаходимо

$$\begin{cases} x^1(t) = \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t + 1; \\ x^2(t) = -\beta_1 \sin t + \beta_2 \cos t. \end{cases}$$

Сталі $\beta_i, i = 1, 2$ визначаємо з умови неперервності фазових координат,

а саме $x^i\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = x^i\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), i = 1, 2$. Маємо

$$\begin{cases} \beta_2 + 1 = -1, & \beta_1 = 1, \\ -\beta_1 = -1; & \beta_2 = -2; \end{cases}$$

$$x^{1*}(t) = \cos t - 2 \sin t + 1, \quad x^{2*}(t) = -\sin t - 2 \cos t, \quad u^* = 1, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right);$$

в) $t \in [3\pi/2, 2\pi), u^*(t) = -1$. Використовуючи розв'язання пункту «а» і умови неперервності $x^i\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) = x^i\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right), i = 1, 2$, знаходимо:

$$x^{1*}(t) = \cos t - 4 \sin t - 1, \quad x^{2*}(t) = -\sin t - 4 \cos t, \quad u^* = -1, \quad t \in [3\pi/2, 2\pi).$$

Мінімальне значення функціонала (3.23) дорівнює $x^{2*}(2\pi) = -4$.

Приклад 3.2. По горизонтальних рейках рухається без тертя під дією сили тяги двигуна дрезина. В початковий момент часу вона знаходиться на деякій відстані S_0 від станції і має певну початкову швидкість V_0 . Знайти такий закон керування силою тяги двигуна, щоб дрезина за найкоротший час прибула до станції і там зупинилася (спрощений варіант прикладу 1.1 задачі на швидкодію).

Побудуємо математичну модель поставленої задачі. Будемо вважати, що дрезина – це деяка матеріальна точка. Якщо $\vec{x} = \vec{x}(t)$ – закон руху матеріальної точки, то за другим законом Ньютона $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$. Введемо фазові координати $x^1(t) = x(t), x^2(t) = \dot{x}(t)$. Тоді другий закон Ньютона може бути записаний у вигляді

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = u, \quad (3.27)$$

де $u = |\vec{F}| / m$ – параметр керування, який визначає закон руху дрезини у фазовому просторі. Сила тяги двигуна обмежена, тому будемо вважати, що $|u| \leq 1$.

Треба знайти оптимальне керування $u^*(t)$ ($|u^*(t)| \leq 1$), відповідну траєкторію $x^*(x^1(t), x^2(t))$ і найменший час $t_1 = T$, необхідний для переходу зі стану $x_0(S_0, V_0)$, де $x_1^0 = S_0, x_2^0 = V_0$, у початок координат ($\vec{x}(T) = (x^1(T), x^2(T))^T = (0, 0)^T$) для моделі об'єкта керування (3.27).

Поставлена задача може бути сформульована у формі мінімізації функціонала

$$J = \int_0^T dt = t \rightarrow \min, \quad (3.28)$$

де момент закінчення процесу T – невідомий.

У даному прикладі $f_0(t, \vec{x}, u) = 1, f_1(t, \vec{x}, u) = x^2(t), f_2(t, \vec{x}, u) = u, F(\vec{x}) = 0, x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$. Задача є задачею Лагранжа з довільним часом.

1. Будуємо гамільтоніан:

$$H(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), u(t)) = \psi_1(t)x^2(t) + \psi_2(t)u(t) - 1.$$

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням:

$$u^*(t) = \arg \max_{|u| \leq 1} H(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), u(t)) = \text{sign} \psi_2(t).$$

3. Випишуємо канонічну систему диференціальних рівнянь Гамільтона:

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), x^1(0) = S_0, x^1(T) = 0, \dot{x}^2(t) = u, x^2(0) = V_0, x^2(T) = 0;$$

$$\dot{\psi}_1(t) = 0, \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t). \quad (3.29)$$

4. Знаходимо з умов трансверсальності (2.64) граничні умови, яких не вистачає: $t_1 = T$, $\delta T \neq 0$ (момент часу $t_1 = T$ довільний), $x^1(t) = x^2(t) = 0$, тому $\delta x^1(T) = \delta x^2(T) = 0$, $F(x) = 0$, $\delta F = 0$. Маємо

$$H(T, \vec{x}(T), \vec{\psi}(T), u) = 0. \quad (3.30)$$

5. Розв'язуємо крайову задачу (3.29) – (3.30):

$$\psi_1(t) = c_1, \psi_2(t) = -c_1 t + c_2, u^*(t) = \text{sign} \psi_2(t) = \text{sign}(-c_1 t + c_2).$$

Оптимальне керування є кусково-сталою функцією з не більш ніж двома інтервалами сталості. На одному інтервалі $u^*(t) = 1$, а на другому - $u^*(t) = -1$.

Далі визначаємо фазові траєкторії:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^2(t), \\ \dot{x}^2(t) = u = \text{const}; \end{cases} \quad \begin{cases} dx^1 = x^2 dt, \\ dx^2 = u dt; \end{cases}$$

$$\frac{dx^1}{dx^2} = \frac{x^2}{u}, \quad dx^1 = \frac{x^2}{u} dx^2, \quad x^1(t) = \frac{(x^2)^2}{2u} + c.$$

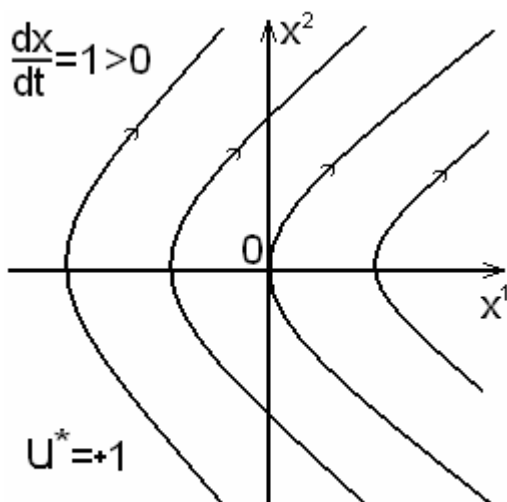


Рис. 3.4

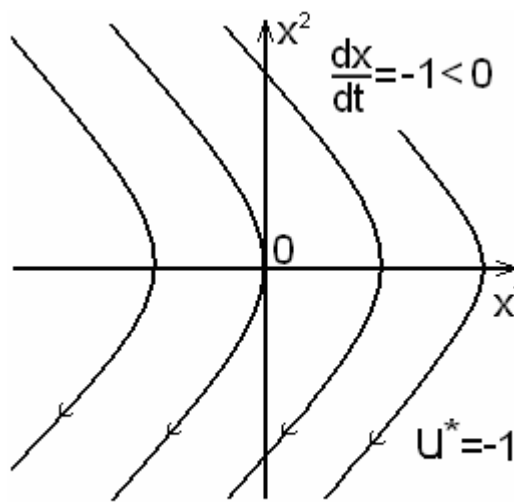


Рис. 3.5

Для проміжку часу, де $u^* = -1$, маємо $x^1(t) = \frac{1}{2}(x^2)^2 + c$ (рис. 3.4), а для проміжку часу, де $u^* = 1$, фазова траєкторія така: $x^1(t) =$

$= -\frac{1}{2}(x^2)^2 + c$ (рис. 3.5). На кожному з рисунків напрямок руху вказано стрілкою.

Якщо оптимальне керування $u^*(t)$ спочатку дорівнює 1, а потім -1, то фазова траєкторія складається з двох гілок парабол (рис. 3.6), причому друга гілка належить параболі, що проходить через початок координат. Якщо навпаки, спочатку $u^* = -1$, потім $u^* = 1$, то фазова траєкторія буде мати вигляд, зображений на рис. 3.7. Тільки

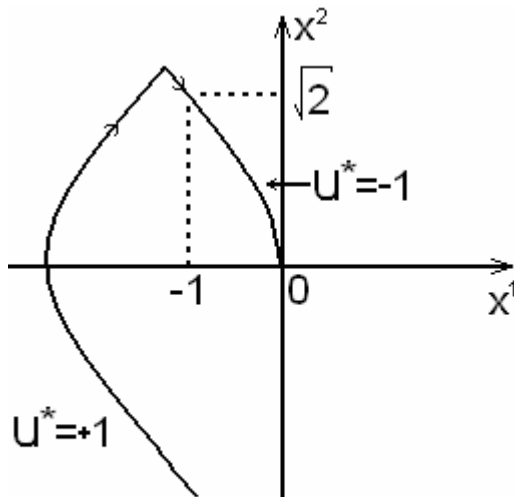


Рис. 3.6

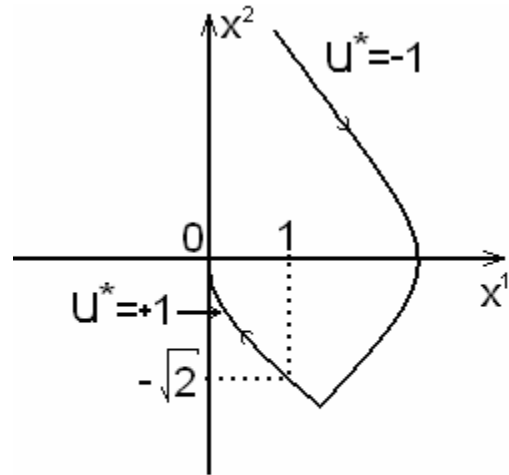


Рис. 3.7

побудовані траєкторії можуть бути оптимальними, і з кожної точки фазової площини виходить тільки одна траєкторія, яка веде до початку координат (задання початкової точки \bar{x}_0 однозначно визначає відповідну траєкторію).

Визначимо час руху T і оптимальну траєкторію. Рух починається з початкової точки $\bar{x}_0(S_0, V_0)$ і закінчується в початку координат $\bar{x}(T) = (0,0)^T$. Виходячи з фізичного тлумачення задачі $S_0 \geq 0$, $V_0 \geq 0$ (принаймні одна величина має бути додатною), можна зробити висновок, що на початку руху $u^*(t) = -1$. Позначимо $T = t_1 + t_2$, де t_1 - час, витрачений на рух матеріальної точки з початкової точки до точки перемикання, а t_2 - час, витрачений на рух від точки перемикання до початку координат ($u^* = 1$).

Розглянемо введені інтервали часу.

1. $t \in [0; t_1)$, $u^*(t) = -1$,

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^2(t), & x^1(t) = S_0, \\ \dot{x}^2(t) = u^* = -1, & x^2(0) = V_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^1(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \\ x^2(t) = -t + c_1, & c_1, c_2 \in R; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1(0) = c_2 = S_0, \\ x^2(0) = c_1 = V_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^1(t) = -\frac{t^2}{2} + V_0 t + S_0, \\ x^2(t) = -t + V_0. \end{cases}$$

2. $t \in [t_1, T)$, $u^*(t) = 1$,

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^2(t), & x^1(T) = 0, \\ \dot{x}^2(t) = u^* = 1, & x^2(T) = V_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^1(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha_1 t + \alpha_2, \\ x^2(t) = -t + \alpha_1, & \alpha_1, \alpha_2 \in R. \end{cases}$$

Визначимо α_1 і α_2 з умов $x^i(T) = 0, i = 1, 2$, де $T = t_1 + t_2$. Маємо

$$\begin{cases} \frac{(t_1 + t_2)^2}{2} + \alpha_1(t_1 + t_2) + \alpha_2 = 0, \\ t_1 + t_2 + \alpha_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{(t_1 + t_2)^2}{2}, \\ \alpha_1 = -(t_1 + t_2). \end{cases}$$

3. Знайдемо t_1 і t_2 і, як наслідок, T з умов неперервності фазових траєкторій в момент часу $t = t_1$, а саме $x^i(t_1 - 0) = x^i(t_1 + 0), i = 1, 2$:

$$\begin{cases} -\frac{t_1^2}{2} + V_0 t_1 + S_0 = \frac{t_1^2}{2} - (t_1 + t_2)t_1 + \frac{(t_1 + t_2)^2}{2}, \\ -t_1 + V_0 = t_1 - t_1 + t_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{t_1^2}{2} + V_0 t_1 + S_0 = \frac{t_1^2}{2} - (2t_1 - V_0)t_1 + \frac{(t_1 - V_0)^2}{2}, \\ t_2 = t_1 - V_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t_1^2 + 4t_1 V_0 + V_0^2 - 2S_0 = 0, \\ t_2 = t_1 - V_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1^{(1)} = \frac{2V_0 + \sqrt{2V_0^2 + 4S_0}}{2}, \\ t_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{2V_0^2 + 4S_0}; \end{cases} \quad \begin{cases} t_1^{(2)} = \frac{2V_0 - \sqrt{2V_0^2 + 4S_0}}{2}, \\ t_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2V_0^2 + 4S_0} < 0. \end{cases}$$

З фізичних міркувань час не може бути від'ємним, тому

$$t_1 = t_1^{(1)}, t_2 = t_2^{(1)}, \text{де } T = V_0 \sqrt{2V_0^2 + 4S_0}.$$

Знайдемо оптимальну траєкторію. Якщо $t \in [0; t_1)$, то крива

$$x^1(t) = -\frac{1}{2}(x^2(t))^2 + c, \quad x^1(0) = S_0, \quad x^2(0) = V_0 \quad \text{і}$$

$$x^{1*}(t) = -\frac{1}{2}(x^{2*}(t))^2 + S_0 + \frac{1}{2}V_0^2.$$

Для $t \in [t_1, T)$ парабола має рівняння $x^1(t) = \frac{1}{2}(x^2(t))^2 + c$.

Якщо $x^1(T) = x^2(T) = 0$, то $c = 0$ і $x^{1*}(t) = \frac{1}{2}(x^{2*}(t))^2$.

Точка A перетину парабол така:
$$\begin{cases} x_A^1(t) = -\frac{1}{2}S_0 + \frac{1}{4}V_0^2, \\ x_A^2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{4S_0 + 2V_0^2}. \end{cases}$$

Графік оптимальної траєкторії наведено на рис. 3.8.

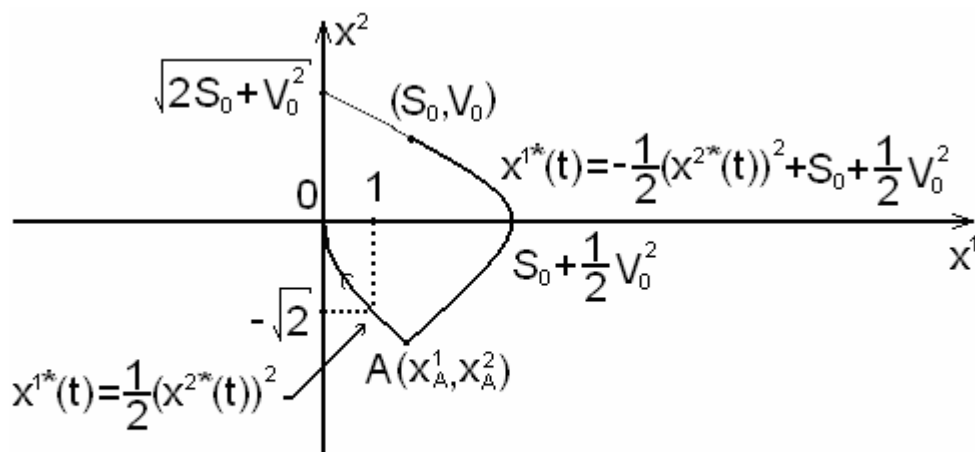


Рис. 3.8

3.3. Задача синтезу. Проблема синтезу оптимальних керувань

Постановки задач оптимального керування припускають, що початковий стан процесу і початковий момент часу фіксовані. В процесі розв'язання задачі зручніше “занурити” її в множину задач, які оперують тими ж рівняннями процесу і функціоналами, але з різними значеннями початкових станів і початкових моментів часу.

Визначаючи оптимальне керування зразу для всієї множини задач, отримують розв'язок у формі синтезу. Ця форма розв'язку відображає залежність величини оптимального керування не тільки від поточного моменту часу, але й від стану системи. Якщо є розв'язок задачі у формі синтезу, неважко отримати розв'язок і для будь-яких

фіксованих початкових умов у звичайній формі, тобто оптимальне керування як функцію від часу. Розв'язок задачі у формі синтезу дає повну інформацію про оптимальне керування.

Повернемося до задачі 3.2. Позначимо через $V(\bar{x}) = V(x^1, x^2)$ функцію, задану на фазовій площині, а саме:

$$V(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо точка } (x^1, x^2) \text{ розташована нижче} \\ & \text{лінії } AOB \text{ або на дузі } AO, \\ -1, & \text{якщо точка } (x^1, x^2) \text{ розташована вище} \\ & \text{лінії } AOB \text{ або на дузі } BO. \end{cases} \quad (3.31)$$

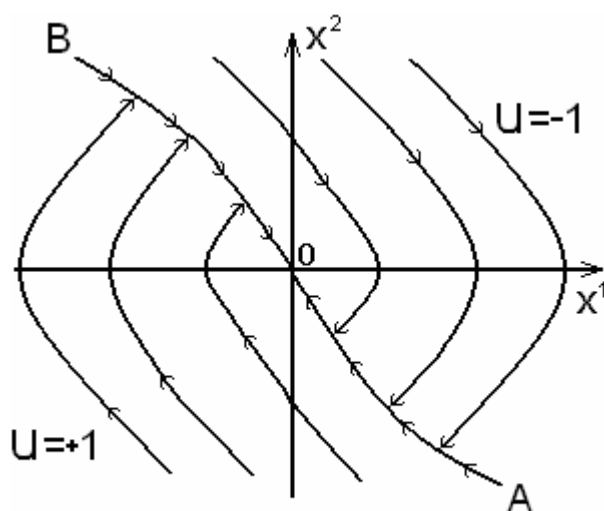


Рис. 3.9

Функція $V(x^1, x^2)$ є функцією фазових змінних. Вона називається синтезуючою функцією і в кожній точці фазового простору дорівнює значенню оптимального для цієї точки керування. На кожній оптимальній траєкторії (рис. 3.9) значення оптимального керування $u(t)$ у довільний момент часу дорівнює $V(x^1(t), x^2(t))$, тобто значенню функцій V в тій точці оптимальної траєкторії, в якій знаходиться рухома точка саме в момент часу t :

$$u(t) = V(x^1(t), x^2(t)).$$

Якщо в системі (3.27) величину u замінити функцією $V(x^1(t), x^2(t))$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = V(x^1, x^2), \end{cases} \quad (3.32)$$

розв'язок якої з довільним початковим станом $\bar{x}_0(x_0^1, x_0^2)$ дає всі оптимальні фазові траєкторії, напрямлені у початок координат. Іншими словами, оптимальне керування природно шукати зразу в

формі $u = V(x^1(t), x^2(t))$, тобто шукане оптимальне керування у кожний момент часу залежить лише від того, в якій точці простору знаходиться в даний момент часу фазова точка. Синтезуюча функція прикладу 3.2 є кусково-неперервною.

У загальному випадку питання, пов'язане з побудовою синтезуючої функції, дуже складне. Для лінійних систем другого порядку синтез оптимальних (за швидкодією) керувань побудовано в праці [4].

Приклад 3.3. Знайти оптимальне за швидкодією керування, відповідні до цього керування траєкторії та час, витрачений на перехід точки $\bar{x}_0(x_0^1, x_0^2)$ в початок координат для моделі об'єкта керування

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}^2(t) = -x_1(t) + u(t), |u| \leq 1. \end{cases}$$

Для розглянутого прикладу $f_0(t, \bar{x}, u) = 1$, $f_1(t, \bar{x}, u) = x_2(t)$, $f_2(t, \bar{x}, u) = -x_1(t) + u(t)$, $F(\bar{x}) = 0$. Функціонал, який потрібно мінімізувати, як і у прикладі 3.2, має вигляд

$$J = \int_0^T dt = T \rightarrow \min,$$

де момент закінчення руху невідомий, а граничні умови мають вигляд $x^i(T) = 0$, $i = 1, 2$. Це задача Лагранжа з довільним часом.

Застосуємо алгоритм принципу максимуму.

1. Будуємо гамільтоніан:

$$H(t, \bar{x}(t), \vec{\psi}(t), u) = \psi_1(t)x^2(t) + \psi_2(t)(-x^1(t) + u(t)) - 1.$$

2. Знаходимо максимум гамільтоніана за керуванням:

$$u^*(t) = \arg \max_{|u| \leq 1} H(t, \bar{x}(t), \vec{\psi}(t), u(t)) = \text{sign} \psi_2(t),$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, \psi_2(t) \geq 0; \\ -1, \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

3. Випишемо канонічну систему диференціальних рівнянь Гамільтона:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^2(t), \quad x^1(0) = x_0^1, \quad x^1(T) = 0; \\ \dot{x}^2(t) &= -x^1(t) + u(t), \quad x^2(0) = x_0^2, \quad x^2(T) = 0; \\ \dot{\psi}_1(t) &= \psi_2(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t). \end{aligned} \tag{3.33}$$

4. Знаходимо з умов трансверсальності (2.64) граничні умови, яких не вистачає: $t_1 = T$, $\delta T \neq 0$, $\delta x^1(T) = \delta x^2(T) = 0$, $F(x) = 0$, $\delta F = 0$.

Маємо

$$H(T, \bar{x}(T), \bar{\psi}(T), u) = 0. \quad (3.34)$$

Розв'язуємо крайову задачу (3.33) – (3.34): $\psi_2(t) = A \sin(t - \alpha)$, де $A > 0$ і α - деяка стала. Тому $u^* = \text{sign} \sin(t - \alpha)$. Функція $u^*(t)$ дорівнює +1 або -1 на кожному з інтервалів довжиною π і може бути отримана в результаті зсуву цих інтервалів на відрізок довжиною $|\alpha|$ (рис. 3.10).

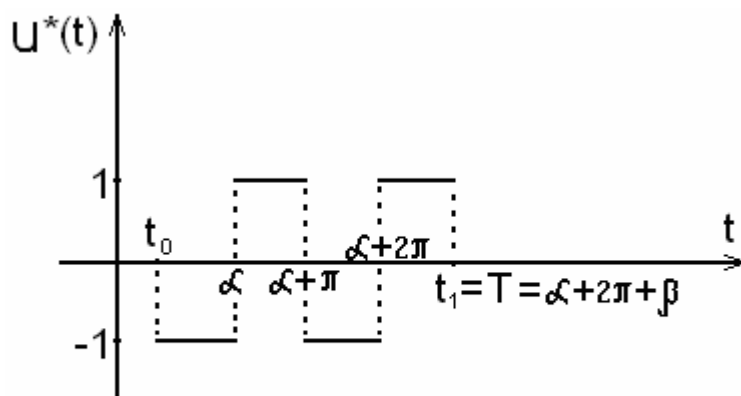


Рис. 3.10

Розглянемо ділянки траєкторії, які відповідають проміжкам часу, на яких $u^* = +1$ і $u^* = -1$. Для цього розв'яжемо систему $\dot{x}^1(t) = x^2(t)$, $\dot{x}^2(t) = -x^1(t) + u$. Маємо

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + u^*, \\ \dot{x}^2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + u^*, \end{cases} \quad (3.35)$$

або $(x^1(t) - u^*)^2 + x^{2^2}(t) = c_1^2 + c_2^2 = \varepsilon^2$. Таким чином, фазовими траєкторіями є ділянки концентричних кіл з центром у точці $(u^*, 0)$.

Визначимо оптимальну траєкторію. Почнемо з останнього проміжку часу, тому що відома скінченна точка траєкторії.

1. $t \in [\alpha + 2\pi, T)$, $u^* = 1$, $T = \alpha + 2\pi + \beta$. З умови трансверсальності (3.34) знаходимо, що $\psi_2(t) = 1$, $A \sin(T - \alpha) = 1$, $2\pi + \beta = (-1)^k \arcsin(1/A) + \pi k$, $k \in Z$. Звідси ($k = 2$): $\beta = \arcsin(1/A)$, ($0 < \beta < \pi/2$), або ($k = 3$): $\beta = \pi - \arcsin(1/A)$, ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$). В обох випадках $0 < \beta < \pi$. Враховуючи граничні умови $x^i(T) = 0$, $i = 1, 2$, знаходимо з (3.35):

$$\begin{cases} x^1(t) - 1 = \cos(t - \alpha - \beta); \\ x^2(t) = \sin(t - \alpha - \beta), \end{cases}$$

або $(x^1(t) - 1)^2 + (x^2(t))^2 = 1$. (3.36)

Отриману траєкторію показано на рис. 3.11. Остання ділянка руху $A_1 m_1 O$ здійснюється по дузі кола (3.36) від точки $A_1(1 - \cos \beta, -\sin \beta)$ до початку координат.

2. $t \in [\alpha + \pi, \alpha + 2\pi)$, $u^* = -1$. За аналогією отримуємо

$$\begin{cases} x^1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1, \\ x^2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Сталі $c_i, i = 1, 2$ визначаємо з умов неперервності фазових координат, а саме

$$x^i(\alpha + 2\pi - 0) = x^i(\alpha + 2\pi + 0).$$

Маємо

$$\begin{cases} x^1(t) + 1 = (2 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \cos t + (2 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \sin t, \\ x^2(t) = -(2 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \sin t + (2 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \cos t, \end{cases}$$

або

$$(x^1(t) + 1)^2 + (x^2(t))^2 = 5 - 4 \cos \beta, \quad (5 - 4 \cos \beta \geq 1). \quad (3.37)$$

Рух на проміжку часу $[\alpha + \pi, \alpha + 2\pi)$ відбувається по дузі $A_2 m_2 A_1$ кола (3.37) від точки $A_2(-2 + \cos \beta, \sin \beta)$ до точки A_1 . Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно центра кола (3.37), тому що довжина проміжку, де розглядається рух, дорівнює π .

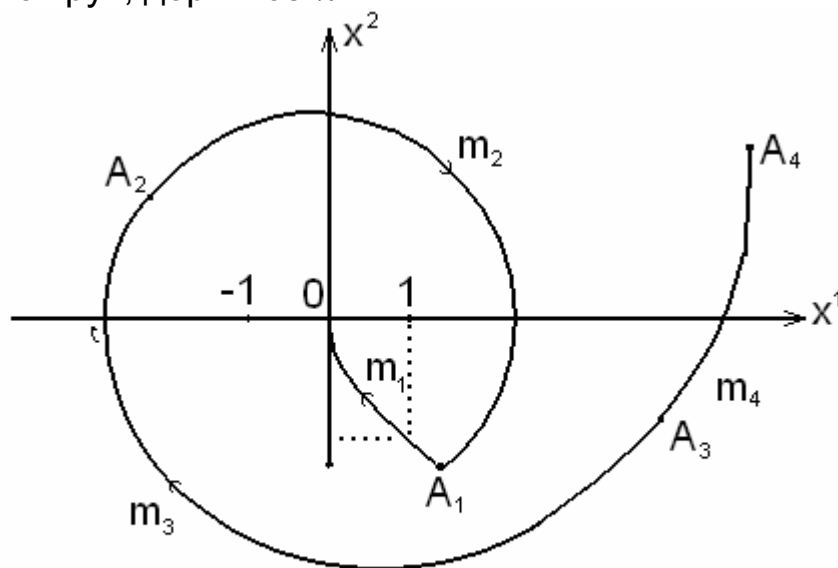


Рис. 3.11

3. $t \in [\alpha, \alpha + \pi)$, $u^* = 1$. Аналогічно пункту 2 знаходимо:

$$\begin{cases} x^1(t) - 1 = (3 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \cos t + (3 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \sin t, \\ x^2(t) = (-3 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \sin t + (3 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \cos t; \end{cases}$$

або

$$(x^1(t) - 1)^2 + (x^2(t))^2 = 10 - 6 \cos \beta. \quad (3.38)$$

Рух на проміжку часу $[\alpha, \alpha + \pi)$ відбувається по дузі $A_3 m_3 A_2$ кола (3.38) від точки $A_3(4 - \cos \beta, -\sin \beta)$ до точки A_2 .

4. $t \in [t_0, \alpha)$, $u^* = -1$. Аналогічно отримуємо:

$$\begin{cases} x^1(t) = (5 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \cos t + (5 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \sin t - 1, \\ x^2(t) = -(5 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) \sin t + (5 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta)) \cos t; \end{cases} \quad (3.39)$$

або

$$(x^1(t) + 1)^2 + (x^2(t))^2 = 26 - 10 \cos \beta. \quad (3.40)$$

Рух на проміжку часу $[t_0, \alpha)$ відбувається по дузі $A_4 m_4 A_3$ кола (3.40) від точки A_4 до точки A_3 . Координати початкової точки A_4 визначаються з початкових умов $x^i(t_0) = x_0^i$, $i = 1, 2$. Так, наприклад, якщо взяти $t_0 = 0$ з (3.39), знаходимо

$$\begin{cases} 5 \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) = 1 + x_0^1, \\ 5 \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) = x_0^2. \end{cases}$$

Звідси отримуємо систему тригонометричних рівнянь для визначення α і β :

$$\begin{cases} \sin \beta = (1 + x_0^1) \sin \alpha - x_0^2 \cos \alpha, \\ \cos \beta = 5 - (1 + x_0^1) \cos \alpha - x_0^2 \sin \alpha. \end{cases}$$

Фазову траєкторію, яка відповідає оптимальному керуванню, що дорівнює -1, на останньому етапі руху (довжина якого β) можна отримати з траєкторії, наведеної на рис. 3.11, за допомогою центральної симетрії.

Розділ 4. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Метод динамічного програмування

Метод динамічного програмування запропоновано американським математиком Р. Беллманом. Як зазначалося в підрозд. 3.3, оптимальна синтезуюча функція $\vec{u}(t) = \vec{V}(t, \vec{x}(t))$ задає розв'язання не однієї оптимізаційної задачі, а цілої сім'ї оптимізаційних задач з

різними початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. Для реалізації синтезу потрібно окрім значення часу t знайти стан системи у будь-який момент часу. В теорії керування $\bar{u}(t, \bar{x})$ називають керуванням з оберненим зв'язком. На рис. 4.1 показано, як формується траєкторія системи.

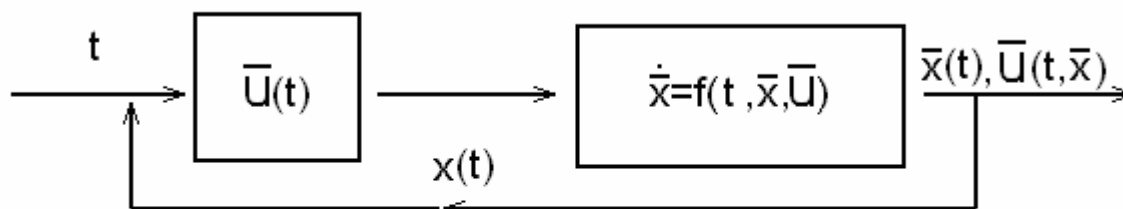


Рис. 4.1

Для формування траєкторії $\bar{x}(t)$ системи необхідно мати інформацію про стан системи. Стан, в який система перейшла під впливом керування, в свою чергу, впливає на формування самого керування. Таким чином і виникає зв'язок між станом і керуванням, який називають оберненим зв'язком.

В економічних задачах застосування керування у вигляді синтезу відповідає економічному регулюванню (корегуванню плану). Керування $\bar{u}(t, \bar{x})$ у випадку відхилення траєкторії системи від планового значення дає оптимальний розв'язок і для нового стану системи. Програмне керування $\bar{u}(t)$ при цьому втрачає властивість оптимальності.

Розв'язок задачі оптимального керування у формі синтезу оптимального керування дає метод Беллмана.

4.2. Алгоритм методу динамічного програмування для задач з вільним правим кінцем траєкторії

Цей підрозділ присвячено побудові достатніх умов існування розв'язків задач оптимального керування.

Розглянемо задачу Майєра (3.1) – (3.4) і припустимо, що розв'язок цієї задачі ($\bar{u} = \bar{u}(t)$ - оптимальне керування і $\bar{x}(t)$ - відповідна траєкторія) знайдено. Також будемо вважати, що оптимальне керування визначене у формі оберненого зв'язку, тобто

$$\bar{u}(t) = \vec{V}(t, \bar{x}(t)). \quad (4.1)$$

У цьому випадку відповідна оптимальна траєкторія є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x}(t), \vec{V}(t, \bar{x}(t))), \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \quad (4.2)$$

Значення $\bar{x}(T)$, виходячи з (4.2), буде залежати лише від початкової умови \bar{x}_0 і довжини інтервалу $[t_0, T]$. Тому значення функціонала $F(\bar{x}(T))$ з (3.3) при оптимальному керуванні буде також залежати тільки від x_0 і $[t_0, T]$. Позначимо цю залежність через $R(\bar{x}_0; t_0, T)$.

Якщо задачу (3.1) – (3.4) розглядати на проміжку $[t, T]$ з початковою умовою $\bar{x}(t) = \bar{x}$, то оптимальне керування також буде визначатися функцією (4.1). Тому функціонал (3.3) буде дорівнювати $R(\bar{x}; t, T)$.

Функція $R(\bar{x}; t, T)$ названа функцією Беллмана. Вона дорівнює значенню функціонала (3.3), якщо процес починається зі стану (t, \bar{x}) і на інтервалі $[t, T]$ використовується оптимальне керування, тобто значення функціонала (3.3) визначається тільки скінченною точкою, тому функція Беллмана є сталою на оптимальній траєкторії. Маємо

$$R(\bar{x}(t); t, T) = R(\bar{x}(\tau); \tau, T), \quad (4.3)$$

$\forall t, \tau \in [t_0, T]$, а значення $\bar{x}(t)$ і $\bar{x}(\tau)$ належать одному і тому ж розв'язку системи (4.2).

Розглянемо на інтервалі $[t, T]$ довільну точку τ , $t < \tau < T$ і розіб'ємо інтервал на два інтервали, а саме $[t, \tau]$ і $[\tau, T]$.

Нехай \bar{u}_1 - довільне керування на інтервалі $[t, \tau]$, а \bar{u} - оптимальне на інтервалі $[\tau, T]$. Тоді значення функціонала (3.3) буде дорівнювати $R(\bar{x}_1(\tau); \tau, T)$, де $\bar{x}_1(\tau)$ - розв'язок системи (3.1) – (3.2) на інтервалі $[t, \tau]$ з початковим станом $\bar{x}(t) = \bar{x}$ і керуванням \bar{u}_1 . Керування $\bar{u}_1(t, \bar{x}_1(t))$ не є оптимальним, тому

$$R(\bar{x}; t, T) \leq R(\bar{x}(\tau); \tau, T) \quad (4.4)$$

$\forall \tau \in [t, T]$ і $\forall \bar{u}_1$ з проміжку $[t, \tau]$.

Вираз (4.4) буде перетворюватись в рівність, якщо керування $\bar{u}_1(t, \bar{x}_1(t))$ взяти оптимальним, тобто

$$R(\bar{x}; t, T) = \min_{\bar{u}_1, t \in [t, \tau]} R_1(\bar{x}_1(\tau); \tau, T). \quad (4.5)$$

Рівність (4.5) має місце $\forall \tau \in [t, T]$.

Рівняння (4.5) можна спростити, якщо припустити, що функція $R(\bar{x}; t, T)$ диференційовна по \bar{x} і t . Покладемо $\tau = t + \Delta t$, де Δt - нескінченно мала величина. Маємо

$$\begin{aligned} R(\bar{x}(\tau); \tau, T) &= R(\bar{x}(t + \Delta t); t + \Delta t, T) = \\ &= R(\bar{x}_1(t); t, T) + \frac{\partial R}{\partial t} \Delta t + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^T \dot{\bar{x}}_1 \Delta t + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вектор-функція $\bar{x}_1(t)$ є розв'язком системи (3.1) з початковою умовою $\bar{x}_1(t) = \bar{x}$ і довільним керуванням \bar{u}_1 . Тому $R(\bar{x}_1(t); t, T) = R(\bar{x}; t, T)$. Маємо

$$\min_{\bar{u}_1, [t, t+\Delta t]} \left[\frac{\partial R}{\partial t} \Delta t + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^T f(t, \bar{x}, \bar{u}(t)) \Delta t + \dots \right] = 0,$$

або

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_{u \in u_0} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^T f(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (4.7)$$

До рівності (4.7) потрібно додати граничну умову

$$R(\bar{x}; T, T) = F(\bar{x}(T)). \quad (4.8)$$

Рівняння (4.7) називається рівнянням Беллмана. Перетворення, наведені вище, можна записати так.

Теорема 4.1. Для існування розв'язку задачі (3.1) – (3.4) достатньо існування $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall \bar{x} \in R^n$, $\forall \bar{u} \in u_0$ диференційовної функції $R(\bar{x}; t, T)$, яка задовольняє рівняння Беллмана (4.7) і граничну умову (4.8).

Тепер розглянемо задачу Майєра (2.47) – (2.49) з довільним часом і без обмежень на правий кінець траєкторії, але з обмеженнями на величину керування

$$\bar{u} \in u_0. \quad (4.9)$$

Для цієї задачі окрім оптимального керування (4.1) потрібно знайти й функцію $t_1 = t_1(t, \bar{x}(t))$, де t_1 - момент оптимальної зупинки ($t_1 > t$).

Зафіксуємо значення t_1 . Тоді $R(\bar{x}; t, t_1)$ - значення функціонала (2.49) за умови оптимального керування і з початковим станом (t, \bar{x}) . Якщо момент часу t_1 довільний, то за значення t_1 потрібно взяти таке значення, яке мінімізує функцію $R(\bar{x}; t, t_1)$. Для цього скористаємося умовами екстремуму

$$\frac{dR(\bar{x}; t, t_1)}{dt_1} = 0, \quad \frac{d^2 R(\bar{x}; t, t_1)}{dt_1^2} > 0. \quad (4.10)$$

Таким чином, розв'язок задачі (2.47) – (2.49), (4.9) може бути отриманий за два етапи. На першому з них знаходимо розв'язок цієї задачі з фіксованим часом t_1 , а саме розв'язуємо рівняння (4.7) з граничною умовою

$$R(\bar{x}; t_1, t_1) = F(t_1, \bar{x}(t_1)). \quad (4.11)$$

Враховуючи еквівалентність умов (4.11) і $\lim_{t \rightarrow t_1} R(\bar{x}; t, t_1) = F(t_1, \bar{x}(t_1))$,

маємо

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{dR(\bar{x}; t, t_1)}{dt_1} = \frac{dF(t_1, \bar{x}(t_1))}{dt_1} = \left\{ \frac{dF}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T f(t, \bar{x}, \bar{V}(t, \bar{x})) \right\} \Big|_{t=t_1} = 0. \quad (4.12)$$

Умова (4.12) збігається з умовою трансверсальності (2.51).

Застосуємо метод динамічного програмування до задачі Больца (2.35) – (2.37) або (2.38)– (2.41).

Для будь-яких значень t і τ , таких, що $t_0 < t < \tau < T$, маємо

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_t^T f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt + F(x(T)) = \\ &= \int_t^\tau f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt + \int_\tau^T f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt + F(\bar{x}(T)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Позначимо як $R(\bar{x}; t, T)$ значення функціонала (4.13) за умови, що в момент часу t початковою умовою є умова $\bar{x}(t) = x$ і на інтервалі $[t, T]$ використовувалося оптимальне керування. Тоді

$$R(\bar{x}; t, T) < \int_t^T f_0(t, \bar{x}(t), u(t)) dt + R(\bar{x}_1(\tau); \tau, T), \quad (4.14)$$

де $\bar{x}_1(\tau)$ - розв'язок задачі (3.1) – (3.2) або (2.35) – (2.36) на проміжку $(t, T]$ з початковою умовою $\bar{x}_1(t) = \bar{x}$ і довільним керуванням \bar{u}_1 для $\forall \tau \in [t, T]$. Нерівність (4.14) обертається в рівність, якщо $\bar{u}_1(t)$ буде оптимальним керуванням. Тому має місце запис

$$R(\bar{x}; t, T) = \min_{u, [t, \tau]} \left[\int_t^\tau f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt + R(\bar{x}_1(\tau); \tau, T) \right]. \quad (4.15)$$

Припустимо, що функція $R(\bar{x}; t, T)$ диференційовна по \bar{x} і t . Візьмемо $\tau = t + \Delta t, t \rightarrow 0$. Враховуючи розкладання

$$\int_t^\tau f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt = f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \Delta t + o(\Delta t),$$

отримуємо, за аналогією з (4.6) – (4.9),

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_{u \in u_0} \left\{ f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^T f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right\}. \quad (4.16)$$

Граничною умовою залишається умова (4.8), тому що при $t = T$ інтеграл у виразі (4.13) обертається в 0.

4.3. Задачі з обмеженнями на правий кінець траєкторії

Розглянемо задачу загального типу, тобто задачу (2.54) – (2.57),

(4.9) з довільним часом із обмеженнями на правий кінець траєкторії. Ця задача може бути зведена до задачі (2.58) – (2.60), (4.9) завдяки введенню допоміжної функції (2.61):

$$\dot{x}^i = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \quad \dot{x}^i(t_0) = x_0^i, i = \overline{1, n};$$

$$J[\bar{u}] = \tilde{F}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu}) \rightarrow \min; \bar{u} \in u_0,$$

де $\tilde{F}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu}) = F(t, x(t_1)) + \bar{\mu}^T g(t, \bar{x})$.

Для розв'язання останньої задачі потрібно записати рівняння Беллмана (4.7) з граничними умовами (4.8) і (4.12):

$$R(\bar{x}; t_1, t_1) = \tilde{F}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{\mu}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}(t, \bar{x}(t), \bar{\mu})}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{F}(t, \bar{x}(t), \bar{\mu})}{\partial x} \right)^T f(t, \bar{x}(t), \bar{V}(t, \bar{x}(t))) = 0, t = t_1. \quad (4.18)$$

Зауваження 4.1. Для задач оптимального керування, коли функціонал задачі записано у формі Больца (1.11), рівняння Беллмана має вигляд (4.16). До цього рівняння потрібно додати граничні умови (4.17) і (4.18). При цьому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}(t, \bar{x}(t), \bar{\mu})}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{F}(t, \bar{x}(t), \bar{\mu})}{\partial x} \right)^T f(t, \bar{x}(t), V(t, \bar{x}(t))) + \\ + f_0(t, \bar{x}(t), \bar{V}(t, \bar{x}(t))) = 0, t = t_1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Наведемо алгоритм застосування методу динамічного програмування (алгоритм синтезу оптимального керування з повним оберненим зв'язком):

1. Записуємо рівняння Беллмана (4.16) (рівняння (4.7) є окремим випадком рівняння (4.16)).

2. Знаходимо оптимальне керування з повним оберненим зв'язком, яке мінімізує вираз праворуч у рівняннях (4.16) або (4.7):

$$\bar{V}^*(t, \bar{x}) = \arg \min_{u \in u_0} \left\{ f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^T f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right\}.$$

3. Керування $\bar{V}^*(t, \bar{x})$ підставляємо в рівняння (4.16) або (4.7). В результаті отримуємо нелінійне диференціальне рівняння у частинних похідних.

4. Отримане рівняння інтегруємо з граничними умовами (4.8), (4.11) або (4.17). Параметри t_1 і $\bar{\mu}$ знаходимо або вилучаємо за допомогою рівнянь (2.57) і (4.19) або (4.18) для задачі Майєра.

Слід звернути увагу на те, що практичне застосування методу динамічного програмування до задач з обмеженнями на правий кінець траєкторії пов'язане зі значними труднощами.

Зауваження 4.2. Якщо покласти $R_1(\vec{x}; t, t_1) = -R(\vec{x}; t, t_1)$, то рівняння Беллмана (5.16) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = \max_{u \in u_0} \left\{ \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} \right)^T f(t, \vec{x}, \vec{u}) - f_0(t, \vec{x}, \vec{u}) \right\}. \quad (4.20)$$

4.4. Зв'язок методу динамічного програмування з принципом максимуму Понтрягіна

Розглянемо задачу Майєра (3.1) – (3.4) з оптимальним керуванням (4.1). Оптимальне керування (4.1) знаходимо за методом динамічного програмування з рівняння (4.7). Припустимо також, що функція Беллмана двічі неперервно диференційовна за своїми аргументами. Якщо до відповідної задачі застосувати принцип максимуму Понтрягіна, то оптимальне керування знайдемо з умови максимуму функції Гамільтона (2.10), а саме

$$H(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), \vec{u}(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) = \vec{\psi}^T(t) \vec{f}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)).$$

Якщо порівняти останню формулу з правою частиною рівняння (4.7), то можна стверджувати, що розв'язки, отримані кожним з методів, будуть збігатися, якщо має місце співвідношення

$$\vec{\psi}(t) = - \frac{\partial R}{\partial x} \quad (4.21)$$

для будь-яких t і \vec{x} , для яких існує розв'язок задачі (3.1) – (3.4).

Для $t=T$ рівність (4.21) має місце, тому що вектор-функція $\vec{\psi}(t)$ задовольняє умову (2.25), а функція $R(\vec{x}; t, T)$ - умову (4.8).

Доведемо рівність (4.21). Для цього розглянемо будь-яке значення t з проміжку (t_0, T) . Повний диференціал від правої частини рівності (4.21) має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \vec{f}. \quad (4.22)$$

Обчислимо частинні похідні по x від обох частин рівняння (4.7), враховуючи той факт, що керування в цьому рівнянні вже оптимальне. Маємо

$$- \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \vec{f} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4.23)$$

Віднімемо рівняння (4.23) від (4.22):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Тепер, якщо $\frac{\partial R}{\partial x}$ замінити на $-\vec{\psi}(t)$, згідно з рівнянням (4.21) отримаємо

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \vec{\psi}(t). \quad (4.25)$$

Рівняння (4.25) збігається з означенням (2.12) для вектор-функції $\vec{\psi}(t)$.

Враховуючи той факт, що від однієї задачі оптимального керування (наприклад Майєра) можна перейти до інших задач (Лагранжа або Больца) і навпаки (див. підрозд. 1.3), а також те, що задачі з обмеженнями на правий кінець траєкторії та задачі з довільним часом (див. підрозд. 4.2, 4.3) зводяться до задачі Майєра (3.1) – (3.4), можна стверджувати що еквівалентність методів максимуму Понтрягіна і методу динамічного програмування має місце і для цих задач.

Наприкінці підрозділу дамо порівняльний аналіз методів максимуму Понтрягіна і методу динамічного програмування Беллмана.

1. Метод максимуму зводить задачу оптимального керування до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (або рекурентних рівнянь), тоді як метод динамічного програмування відповідну задачу оптимального керування зводить до задачі Коші для рівнянь у частинних похідних. У цій складовій метод динамічного програмування набагато складніший.

2. Метод максимуму дозволяє знайти оптимальне програмне керування $\vec{u}(t)$ і оптимальну траєкторію, які відповідають заданим граничним умовам. Метод динамічного програмування забезпечує розв'язок у формі синтезу $\vec{u}(t) = \vec{V}(t, \vec{x}(t))$ сім'ї оптимізаційних задач з будь-якими початковими умовами, тобто узагальнює задачу оптимізації.

3. Процес $(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, знайдений за методом максимуму, може бути й неоптимальним. Доведення оптимальності потребує додаткових досліджень. Оптимальне керування $\vec{V}(t, \vec{x}(t))$ і процес $(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$, знайдені за методом динамічного програмування, не потребує додаткових досліджень на оптимальність.

4.5. Приклади застосування методу динамічного програмування

У наступних прикладах необхідно знайти оптимальне керування у формі оберненого зв'язку. Для розв'язання задач використовується алгоритм, наведений у підрозд. 4.3.

Приклад 4.1. Задано модель об'єкта керування $\dot{x}(t) = u(t)$, де

$x \in R, u \in R, t \in [0;1]$, і функціонал $J = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)] dt \rightarrow \min$. Знайти

оптимальне керування $u^* = V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком і оптимальну траєкторію $x^*(t)$.

Розв'язання. В даному прикладі $f(t, x(t), u(t)) = u(t)$, $f_0(t, x(t), u(t)) = u^2(t) + x^2(t)$, $F(x) = 0$. Розв'язується задача Лагранжа.

1. Запишемо рівняння Беллмана (4.16)

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} u + u^2 + x^2 \right\}.$$

2. Знаходимо оптимальне керування, яке мінімізує вираз праворуч у рівнянні Беллмана: $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial x} u + u^2 + x^2 \right) = \frac{\partial R}{\partial x} + 2u = 0$. Звідси

$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x} = V(t, x(t))$. Значення $u = V(t, x(t))$ дійсно надає мінімальне значення розглядуваному виразу тому, що

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} u + u^2 + x^2 \right) = 2 > 0.$$

3. Записуємо рівняння (4.16), куди замість u підставляємо функцію $V(t, x(t)) = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}$. Маємо

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - x^2. \quad (4.26)$$

4. Рівняння (4.26) інтегруємо з граничною умовою (4.8), яка набуває вигляду

$$R(x; 1, 1) = 0. \quad (4.27)$$

Рівняння (4.26) є нелінійним рівнянням у частинних похідних. Розв'язок цього рівняння розшукуємо у вигляді

$$R(x; t, 1) = K(t)x^2. \quad (4.28)$$

Підставляємо вираз (4.28) в рівняння (4.26) і прирівнюємо коефіцієнти при x^2 . Отримуємо $\dot{K}(t) = K^2 - 1$. Звідси $K(t) = \frac{1 + ce^{2t}}{1 - ce^{2t}}$ і

$R(x; t, 1) = \frac{1 + ce^{2t}}{1 - ce^{2t}} x^2$. Сталу c визначаємо з граничної умови (4.27). Маємо

$$1 + ce^2 = 0, \quad c = e^{-2}, \quad R(x; t, 1) = \frac{1 - e^{2(t-1)}}{1 + e^{2(t-1)}} x^2.$$

Шукане оптимальне керування $V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком набуває вигляду

$$V(t, x(t)) = \frac{e^{2(t-1)} - 1}{e^{2(t-1)} + 1} x \quad (4.29)$$

5. Покажемо, що оптимальне керування (4.29) з повним оберненим зв'язком утворює оптимальну пару $(u^*(t), x^*(t))$ для будь-якої допустимої початкової умови $x(0) = x_0$. Для цього запишемо рівняння $\dot{x} = u(t)$, куди замість $u(t)$ підставимо функцію $V(t, x(t))$ (4.29). Маємо

$$\dot{x}(t) = \frac{e^{2(t-1)} - 1}{e^{2(t-1)} + 1} x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо $x^*(t) = c_1 e^{-t} (e^{2t} + e^2)$, а початкова умова $x(0) = x_0$ дає змогу визначити сталу інтегрування $c_1 = ex_0 / (e^2 + 1)$.

Остаточо знаходимо

$$x^*(t) = \frac{2ex_0}{e^2 + 1} ch(t-1), \quad u^*(t) = \frac{2ex_0}{e^2 + 1} sh(t-1). \quad (4.30)$$

Зауваження 4.3. Розв'язок (4.30) повністю збігається з розв'язком прикладу (2.1), де були застосовані методи класичного варіаційного числення ($x_0 = 1/2$).

Приклад 4.2. Задано модель об'єкта керування $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, де $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0; 1]$, і функціонал $J = \int_0^1 u^2(t) dt - x^2(1) \rightarrow \min$. Знайти оптимальне керування $u^* = V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком і оптимальну траєкторію $x^*(t)$.

Розв'язання. В даному прикладі $f(t, x(t), u(t)) = x(t) + u(t)$, $f_0(t, x(t), u(t)) = u^2(t)$, $F(x) = -x^2$. Розв'язується задача Больца.

1. Запишемо рівняння Беллмана (4.16)

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} (u + x) + u^2 \right\}.$$

2. Знаходимо оптимальне керування, яке мінімізує вираз праворуч в рівнянні Беллмана: $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial x} (u + x) + u^2 \right) = \frac{\partial R}{\partial x} + 2u = 0$. Звідси

$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x} = V(t, x(t))$. Значення $u = V(t, x(t))$ дійсно надає мінімальне

значення розглядуваному виразу тому, що

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} (u + x) + u^2 \right) = 2 > 0.$$

3. Записуємо рівняння (4.16), куди замість u підставляємо функцію $V(t, x(t)) = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}$. Маємо

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial R}{\partial t} x. \quad (4.31)$$

4. Рівняння (4.31) інтегруємо з граничною умовою (4.8), яка набуває вигляду

$$R(x; 1, 1) = -x^2. \quad (4.32)$$

Рівняння (4.26) є нелінійним рівнянням у частинних похідних. Розв'язок цього рівняння розшукуємо у вигляді (4.28). Підставляємо вираз (4.28) в рівняння (4.31) і прирівнюємо коефіцієнти при x^2 .

Отримуємо $\dot{K}(t) = K^2 - 2K$. Звідси $K(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}}$ і

$R(x; t, 1) = \frac{2}{1 - ce^{2t}} x^2$. Сталу c визначаємо з граничної умови (4.32).

Маємо

$$\frac{2x^2}{1 - ce^{2t}} x^2 = -x^2, \quad c = 3e^{-2}, \quad R(x; t, 1) = \frac{2x^2}{3e^{2(t-1)} - 1}.$$

Шукане оптимальне керування $V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком набуває вигляду

$$V(t, x(t)) = \frac{2x(t)}{3e^{2(t-1)} - 1}. \quad (4.33)$$

5. Покажемо, що оптимальне керування (4.33) з повним оберненим зв'язком утворює оптимальну пару $(u^*(t), x^*(t))$ для будь-якої допустимої початкової умови $x(0) = x_0$. Для цього запишемо рівняння $\dot{x} = x(t) + u(t)$, куди замість $u(t)$ підставимо функцію $V(t, x(t))$ (4.33).

Маємо

$$\dot{x}(t) = x(t) + \frac{2x(t)}{3e^{2(t-1)} - 1}, \quad x(0) = x_0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо $x^*(t) = c_1 e(3e^{t-1} - e^{-t+1})$, а початкова умова $x(0) = x_0$ дає змогу визначити сталу інтегрування $c_1 = x_0 / (3 - e^2)$. Остаточо знаходимо

$$x^*(t) = \frac{x_0(3e^{t-1} - e^{-t+1})}{3e^{-1} - e}, \quad u^*(t) = \frac{2x_0e^{-t+1}}{3e^{-1} - e}.$$

Приклад 4.3. Задано модель об'єкта керування $\dot{x}(t) = u(t)$, де $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0; t_1]$, і функціонал $J = \frac{1}{2}x^2(t_1) + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\alpha + u^2(t)] dt$.

Знайти оптимальне керування $u^* = V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком, оптимальний час t_1^* і оптимальну траєкторію $x^*(t)$.

Розв'язання. Розв'язується задача Больца. В даному прикладі $f(t, x(t), u(t)) = u(t)$, $f_0(t, x(t), u(t)) = \alpha + u^2(t)$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.

1. Запишемо рівняння Беллмана (4.16)

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} u^2(t) \right\}.$$

2. Знаходимо оптимальне керування, яке мінімізує вираз праворуч в рівнянні Беллмана:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial R}{\partial x} + u = 0, \quad u = -\frac{\partial R}{\partial x} = V(t, x(t));$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} u^2 \right) = 1 > 0.$$

3. Записуємо рівняння (4.16), куди замість u підставляємо функцію $V(t, x(t))$:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \alpha. \quad (4.34)$$

Гранична умова (4.8) для цього рівняння має вигляд

$$R(x; t_1, t_1) = \frac{1}{2} x^2(t_1). \quad (4.35)$$

4. Розв'язок граничної задачі (4.34) – (4.35) розшукуємо у вигляді

$$R(x; t, t_1) = K(t)x^2 - \frac{1}{2} \alpha(t - t_1).$$

Проводячи перетворення так само, як і у прикладах 4.1 і 4.2, знаходимо

$$\dot{K}x^2 - \frac{1}{2} \alpha = 2K^2x^2 - \frac{1}{2} \alpha, \quad \dot{K} = 2K^2, \quad \frac{dK}{K^2} = 2dt, \quad K = -\frac{1}{2(t+c)},$$

$$R(x; t, t_1) = -\frac{x^2}{2(t+c)}.$$

Константу c_1 визначаємо з граничної умови (4.35):

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{t_1 + c}, \quad t_1 + c = -1, \quad c = -t_1 - 1.$$

Таким чином, маємо

$$R(x; t, t_1) = \frac{x^2(t)}{2(t_1 + 1 - t)} + \frac{1}{2}\alpha(t_1 - t), \quad (4.36)$$

$$V(t, x(t)) = \frac{x(t)}{t - t_1 - 1}. \quad (4.37)$$

5. Покажемо, що оптимальне керування (4.37) з повним оберненням зв'язком утворює оптимальну трійку $(t_1^*, u^*(t_1), x^*(t_1))$ для будь-якої допустимої початкової умови $x(0) = x_0$. Для цього в задане за умовою рівняння замість функції $u(t)$ підставимо оптимальне керування (4.37). Маємо

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t - t_1 - 1}, \quad x(0) = x_0.$$

Інтегруючи останнє рівняння із заданою початковою умовою, знаходимо

$$\ln |x| = \ln |t - t_1 - 1| + \ln c_1, \quad x(t) = c_1(t - t_1 - 1), \quad x_0 = c_1(-t_1 - 1),$$

$$x^*(t) = -x_0 \frac{t - t_1 - 1}{t_1 + 1}. \quad (4.38)$$

Підставляючи (4.38) в (4.37), отримуємо

$$u^*(t) = -\frac{x_0}{1 + t_1} = \text{const}. \quad (4.39)$$

6. Визначимо оптимальне значення t_1 - моменту закінчення процесу. Це значення знаходиться з умов (4.10), які забезпечують мінімум функції $R(x; t_1, t_1)$ з (4.36):

$$\frac{\partial R}{\partial t_1} = -\frac{(x^*(t))^2}{2(t_1 + 1 - t)^2} + \frac{1}{2}\alpha = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t_1^2} = \frac{(x^*(t))^2}{2(t_1 + 1 - t)^3} > 0. \quad (4.41)$$

Умова (4.41) завжди виконується, тому що $t_1 > t$, а звідси $t_1 - t > 0$, $t_1 - t + 1 > 1$. З (4.40) визначимо t_1 . Маємо

$$\alpha = \frac{(x^*(t))^2}{(t_1 + 1 - t)^2}, \quad (t_1 + 1 - t)^2 = \frac{(x^*(t))^2}{\alpha}, \quad t_1 + 1 - t = \frac{|x^*(t)|}{\sqrt{\alpha}},$$

$$t_1^* = t - 1 + |x^*(t)| / \sqrt{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad |x^*(t)| > \sqrt{\alpha}.$$

Якщо проміжок, де розв'язується задача, $[t, t_1] = [0, t_1]$, то $t = 0$ і $t_1^* = -1 + |x_0| / \sqrt{\alpha}$.

Приклад 4.4. Задано модель об'єкта керування $\dot{x}(t) = u(t)$, де $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0; t_1]$, функціонал $J = \frac{1}{2} \int_0^1 [\alpha + u^2(t)] dt \rightarrow \min$ і гранична умова

$$x(t_1) - f(t_1) = 0. \quad (4.42)$$

Знайти оптимальне керування $u^* = V(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком, оптимальну траєкторію і оптимальний час t_1^* .

Розв'язання. В даному прикладі розв'язується задача Лагранжа, $f(t, x(t), u(t)) = u(t)$, $f_0(t, x(t), u(t)) = \frac{1}{2}(\alpha + u^2(t))$.

1. Запишемо рівняння Беллмана (4.16)

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2}(\alpha + u^2) \right\}.$$

2. Як і у прикладі 4.3, оптимальне керування $V(t, x(t)) = -\frac{\partial R}{\partial x}$, рівняння Беллмана має вигляд

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \alpha,$$

але граничні умови записуються у вигляді (4.17), (4.19), а саме

$$R(x(t_1); t, t_1) = \mu(x - f(t_1)), \quad (4.43)$$

$$-\mu \frac{df}{dt} + \mu u + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} u^2 = 0, \quad t = t_1. \quad (4.44)$$

3. Враховуючи складність умови (4.44), розв'язок рівняння Беллмана записуємо у вигляді квадратичної форми відносно x , тобто

$$R(x; t, t_1) = a_0(t; t_1) + a_1(t; t_1)x + a_2(t; t_1)x^2. \quad (4.45)$$

Підставляємо (4.7) в рівняння Беллмана і знаходимо

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial t} x + \frac{\partial a_2}{\partial t} x^2 = \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 x)^2 - \frac{1}{2} \alpha.$$

Далі прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} - \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \alpha = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} - 2a_1 a_2 = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - 2a_2^2 = 0. \quad (4.46)$$

Тепер прирівняємо праві частини виразів (4.43) і (4.45) при $t = t_1$.
 Маємо граничні умови для рівнянь (4.46), а саме

$$a_0(t_1, t_1) = -\mu f(t_1), \quad a_1(t_1, t_1) = \mu, \quad a_2(t_1, t_1) = 0. \quad (4.47)$$

Третє рівняння (4.46) є однорідним, а гранична умова нульова. Тому $a_2(t, t_1) \equiv 0$. Звідси $\frac{\partial a_1}{\partial t_1} = 0$, $a_1(t, t_1) = \text{const} = \mu$ (з граничної умови (4.47)). З першого рівняння (4.46) знаходимо

$$a_0(t, t_1) = \frac{1}{2}(\beta - \mu^2)t + c.$$

Враховуючи першу граничну умову (4.47), отримуємо

$$\frac{1}{2}(\beta - \mu^2)t_1 + c = -\mu f(t_1), \quad c = \frac{1}{2}(\beta - \mu^2)(t - t_1) - \mu f(t_1)$$

$$\text{і } R(x; t, t_1) = \frac{1}{2}(\beta - \mu^2)(t - t_1) - \mu f(t_1) + \mu x.$$

Звідси

$$u^*(t) = V(t, x(t)) = -\frac{\partial R}{\partial x} = -\mu = \text{const}. \quad (4.48)$$

4. Визначимо оптимальну траєкторію. Для цього розглянемо задане за умовою рівняння, куди замість функції $u(t)$ підставимо $V(t, x(t))$:

$$\dot{x}(t) = u^*(t), \quad x(t) = -\mu t + c_1.$$

Якщо ввести початкову умову $x(0) = x_0$, то отримаємо

$$\dot{x}(t) = -\mu t + x_0. \quad (4.49)$$

Для визначення параметрів $-\mu$ і t_1 скористаємося граничними умовами (4.42) і (4.44). З урахуванням отриманих результатів вони набувають вигляду

$$\begin{cases} x_0 - \mu t = f(t_1), \\ -\mu f'(t_1) + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\mu^2 = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Бібліографічний список

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Наука, 1975.
4. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1966.
5. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. – М.: Высш. шк., 2002.
6. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М.: Мир, 1972.
7. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Наука, 2002.
8. Жабко А. П. Сборник задач и упражнений по теории управления. Стабилизация программных движений. – М.: Высш. шк., 2003.
9. Кротов В. Ф. Основы теории оптимального управления. – М.: Высш. шк., 1990.
10. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2003.
11. Параев Ю. М. Теория оптимального управления. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986.
12. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961.
13. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

Андрусенко Олена Миколаївна
Ванін Віктор Антонович
Головченко Олександр Васильович
Кошовий Андрій Георгійович

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

Редактор Л.О. Кузьменко

Зв. план, 2007

Підписано до друку 08.06.2007

Формат 60x84 1/16. Папір офс. №2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 3.7. Обл.-вид. арк. 4,25. Наклад 200 прим.

Замовлення 272. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu