УДК539.3

Кривцов В.С., Халилов С.А.

## Критериальные упругие модели. Теория тонкого прямого бруса

Под критериальными упругими моделями механики твердого деформируемого тела здесь понимаются построенные на основе обобщенного закона Гука геометрически нелинейные модели с привлечением минимального числа упрощающих предположений, не противоречащих основным законам механики. Эти модели имеют самостоятельное теоретическое значение. Обобщая все известные модели, они позволяют оценить точность более простых теорий ( в том числе и геометрически нелинейных ) и определить пути уточнения последних, что представляется важным при проведении теоретических и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния гибких тел. Кроме того, теории, базирующиеся на этих моделях, могут быть положены в основу специальных курсов, читаемых в высших учебных заведениях.

В качестве объекта исследования не случайно выбран тонкий прямой брус. Этот выбор обусловлен не столько простотой данного объекта, а сколько необходимостью осознания результатов, получаемых на выбранном пути исследования.

Основное упрощающее предположение для тонкого бруса отражено в законе плоских сечений, позволяющем свести трехмерную задачу теории упругости к одномерной. Справедливость этого закона постулируется и в данной работе.

При деформировании тонкого бруса силами, лежащими в плоскости, содержащей одну из главных центральных осей, определяющими являются нормальные напряжения $\sigma_x$, возникающие в его поперечных сечениях. Асимптотический анализ уравнений теории упругости показывает, что при этом нормальные напряжения $\sigma_y$ и $\sigma_z$ являются величинами порядка $(h/l)^2\sigma_x$, а касательные - порядка $(h/l)\sigma_x$ ( $h$ и $l$ - соответственно характерный размер сечения бруса и его "характерная" длина). Определение напряжений $\sigma_x$ является основной задачей теории бруса. Исключение составляют тонкостенные стержни и композитные балки. Кроме того, излагаемая теория не применима для оценки прочности в местах приложения сосредоточенных воздействий и скачкообразного изменения распределенных.

Отнесем брус к правой прямоугольной декартовой системе координат OXYZ так, что :

- ось OX (осевая линия) параллельна оси бруса, проходящей через центры тяжести его сечений;

– ось OZ – главная центральная;

– ось OY – параллельна второй главной центральной оси и может совпадать с ней.

Введем обозначения :

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты системы координат;

$\vec{n}$ – единичный орт нормали к деформированной оси бруса;

$\vec{r}_0, \vec{R}_0$ – радиусы-векторы произвольной точки осевой линии бруса до (ось OX) и после деформирования;

$\vec{r}, \vec{R}$ – то же для произвольной точки сечения бруса;

$\vec{R}_0'/|\vec{R}_0'|$ – единичный орт касательной к деформированной оси;

$\vec{u}_0(x)$ – вектор перемещения точек осевой линии;

$\vec{u}(x,z)$ – то же для произвольной точки сечения.

Установим связь между векторами $\vec{u}(x,z)$ и $\vec{u}_0(x)$ в предположении, что нагрузки лежат в плоскости XOZ. Разложение этих векторов по ортам исходной системы координат очевидно :

$$\vec{u}_0(x) = u_0(x)\vec{i} + w_0(x)\vec{k}$$
$$\vec{u}(x,z) = u(x,z)\vec{i} + v(x,z)\vec{j} + w(x,z)\vec{k} \qquad (1)$$

Имеют место равенства :

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 + \vec{u}_0, \quad \vec{R} = \vec{r} + \vec{u}, \qquad (2)$$
$$\vec{r}_0 = x\vec{i}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (3)$$

Из закона плоских сечений следует :

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + z\vec{n} + y\vec{j}, \qquad (4)$$

где $$\vec{n} = (\vec{R}_0' \times \vec{j})/|\vec{R}_0'| \qquad (5)$$

(здесь и далее "штрих" означает дифференцирование по X).

Но с другой стороны имеем :

$$\vec{R}_0 = (x+u_0)\vec{i} + w_0\vec{k} \qquad (6)$$

откуда находим :

$$\vec{R}_0' = (1+u_0')\vec{i} + w_0'\vec{k},$$
$$|\vec{R}_0'|^2 = (1+u_0')^2 + (w_0')^2 \qquad (7)$$

Подставляя теперь равенства (7) в равенство (5), получим :

$$\vec{n} = \eta\left((1+u_0')\vec{k} - w_0'\vec{i}\right) \qquad (8)$$

где обозначено :

$$\eta = \eta(x) = \left((1+u_0')^2 + (w_0')^2\right)^{-\frac{1}{2}} = (1+2\varepsilon_0(x))^{-\frac{1}{2}}$$

Смысл величины $\varepsilon_o$ будет выяснен позднее.

Второе равенство из (2) с учетом равенств (3) и (4) представим так :

$$\vec{u} = \vec{R}_o - x\vec{i} + z(\vec{n} - \vec{k}) \tag{10}$$

Подставив сюда равенство (6) и учтя первое равенство из (1), получим окончательно :

$$\vec{u} = \vec{u}_o + z(\vec{n} - \vec{k}) \tag{11}$$

Отсюда следуют три скалярных равенства :

$$u(x,z) = u_o(x) - z w_o'(x)\eta(x), \quad v(x,z) \equiv 0, \tag{12}$$
$$w(x,z) = w_o(x) + z\left((1+u_o'(x))\eta(x) - 1\right).$$

Заметив, что выполнено тождество

$$(w_o'\eta)^2 + (1+u_o')^2\eta^2 \equiv 1,$$

введём обозначения :

$$w_o'\eta = \sin\vartheta, \quad (1+u_o')\eta = \cos\vartheta \tag{13}$$

Тогда основные геометрические соотношения (12) примут вид :

$$u = u_o - z\sin\vartheta, \quad w = w_o + z(\cos\vartheta - 1) \tag{14}$$

Теперь для конечной деформации $\varepsilon_x$ с учетом $v \equiv 0$ получим :

$$\varepsilon_x(x,z) = \varepsilon_o(x) - z\vartheta'/\eta + \frac{1}{2}(z\vartheta')^2, \tag{15}$$

где
$$\varepsilon_o(x) \equiv \varepsilon_x(x, z=0) = u_o' + \frac{1}{2}(u_o')^2 + \frac{1}{2}(w_o')^2. \tag{16}$$

Равенством (16) устанавливается физический смысл величины $\varepsilon_o(x)$.

Далее легко проверяется, что остальные компоненты тензора конечных деформаций Коши-Грина обращаются в нуль :

$$\varepsilon_y \equiv 0, \ \varepsilon_z \equiv 0, \ \gamma_{xy} \equiv 0, \ \gamma_{xz} \equiv 0, \ \gamma_{yz} \equiv 0 \tag{17}$$

Таким образом, из закона плоских сечений следует, что единственной отличной от нуля компонентой тензора конечных деформаций является компонента $\varepsilon_x$.

Поскольку кроме закона плоских сечений никакие другие упрощения приняты не были, то основные соотношения (12) и (15) являются наиболее общими при построении геометрически нелинейной теории. Теорию, построенную на этих соотношениях, мы и называем критериальной теорией тонкого прямого бруса.

Оценим порядок слагаемых, входящих в правые части равенств (12).

и (15), предварительно заметив, что деформация $\varepsilon_x$ тонкого бруса имеет порядок $(h/l)^2$ : $\varepsilon_x \sim O(h/l)^2$. Эти оценки таковы :

$$\varepsilon_0 \sim O(\varepsilon),\ z\varphi'/\eta \sim O(\varepsilon),\ \frac{1}{2}(z\varphi')^2 \sim O(\varepsilon^2)$$

где $\varepsilon$ - величина, численно равная некоторой характерной деформации.

Если $\varepsilon$ - малая в сравнении с единицей величина, то соотношения (12) и (15) допускают упрощения, а именно: можно пренебречь последним слагаемым в правой части равенства (15), и с учетом выражения

$$\varphi' = \eta\,(w_0''\cos\varphi - u_0''\sin\varphi), \tag{18}$$

вытекающего из соотношений (13), представить равенство (15) в виде :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - z w_0''\eta - z\eta\,(u_0' w_0'' - u_0'' w_0') \tag{19}$$

Первые два слагаемые в этом равенстве имеют порядок $\varepsilon$, последнее- $\varepsilon^2$, и им можно пренебречь, т.е.

$$\varepsilon_x = u_0' + \frac{1}{2}(u_0')^2 + \frac{1}{2}(w_0')^2 - z\eta w_0'' \tag{20}$$

Первое и последнее слагаемые здесь имеют порядок $\varepsilon$, второе - $\varepsilon^2$, и им можно пренебречь. Что касается третьего слагаемого, то оно пропорционально квадрату углов поворота и может быть сравнимо с деформациями. Последнее слагаемое при $\varepsilon \ll 1$ оценивается так :

$$z w_0''\eta \approx z w_0''(1-\varepsilon_0) \approx z w_0'',$$

после чего приходим к окончательному представлению :

$$\varepsilon_x = u_0' + \frac{1}{2}(w_0')^2 - z w_0'' \tag{21}$$

Равенства (12) переходят при этом в следующие :

$$u = u_0 - z w_0',\quad w \equiv w_0 \tag{22}$$

Теория бруса, основанная на геометрических соотношениях (21) и (22), может быть названа теорией квадратичного приближения (задачи устойчивости, продольно-поперечного изгиба и т.д.)

Существует класс задач, описывающий сильный изгиб (термин условный) гибких тел, характерной особенностью которых является малость деформации оси. Полагая $\varepsilon_0 = 0$, получим :

$$u_0' = (1-(w_0')^2)^{1/2} - 1,\quad \varphi' = w_0''(1-(w_0')^2)^{-1/2},$$
$$\varepsilon_x = -z w_0''(1-(w_0')^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(z w_0'')^2(1-(w_0')^2)^{-1} \tag{23}$$

Второе слагаемое в последнем равенстве мало в сравнении с первым и им можно пренебречь:

$$\varepsilon_x = -z w_0''\left(1-(w_0')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Равенства (13) здесь переходят в следующие

$$\sin\varphi = w_0', \quad \cos\varphi = 1+u_0' = \left(1+(w_0')^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

а равенства (12) записываются так:

$$u = u_0 - z w_0', \qquad w = w_0 + z u_0' \tag{26}$$

Пришли к основным соотношениям (24)...(26) теории, известной как Эйлерова эластика.

Наконец, соотношения линейной теории следуют из соотношений теории квадратичного приближения (21), (22) или из общих соотношений (12) и (15), если их линеаризовать.

Из равенств (13) следует равенство

$$\operatorname{tg}\varphi = w_0'/(1+u_0'), \tag{27}$$

которым определяется геометрический смысл угла $\varphi$, введенного по (13) формально.

Обращение в нуль деформаций $\varepsilon_y$ и $\varepsilon_z$ не означает обращения в нуль напряжений $\sigma_y$ и $\sigma_z$. Полагая $\sigma_y = \sigma_z = 0$, ограничиваясь лишь ссылкой на гипотезу о ненадавливании волокон, приходим к противоречию в обобщенном законе Гука. Указанное противоречие устраняется (формально), если допустить правомочность замены реального материала бруса некоторым ортотропным, наделенным гипотетическими свойствами:

$$E_y = E_z = \infty, \quad \nu_{yx} = \nu_{zx} = 0$$

где $\nu_{\alpha\beta}$ – коэффициенты Пуассона.

Из обращения в нуль деформаций сдвига следует отсутствие касательных напряжений, что, в свою очередь, не согласуется с уравнениями равновесия. Для устранения этого противоречия следует принять

$$G_{xy} = G_{zx} = G_{yz} = \infty,$$

где $G_{\alpha\beta}$ – модули сдвига.

Тогда из всех соотношений закона Гука остается одно единственное

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x,$$

где $E_x$ – модуль упругости реального материала бруса, а уравнения равновесия служат для определения касательных напряжений.

Уравнения равновесия и естественные краевые условия в рассматриваемой критериальной теории получим, исходя из принципа виртуальной работы:

$$\iiint\limits_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV - \int\limits_{\ell} (q_x \delta u_0 + q_z \delta w_0) dx -$$
$$- \bar{N} \delta u_0 \Big|_0^{\ell} - \bar{Q} \delta w_0 \Big|_0^{\ell} + \bar{M} \delta \varphi \Big|_0^{\ell} = 0 \qquad (28)$$

Здесь первый интеграл распространяется на весь объем $V$ бруса, второй берется по его длине $\ell$. Принятые обозначения таковы :

$q_x$, $q_z$ - компоненты внешней нагрузки, в составе которой могут быть разрывные и сосредоточенные воздействия (их моделями служат некоторые обобщенные функции);

$\bar{N}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ - заданные краевые нагрузки : осевая и перерезывающая силы и изгибающий момент;

$\delta$ - знак вариации.

Запись (например) $\bar{N}\delta u_0 \Big|_0^{\ell}$ означает следующее :

$$\bar{N}\delta u_0 \Big|_0^{\ell} = \bar{N}_{\ell} \delta u_0(\ell) - \bar{N}_0 \delta u_0(0)$$

Если на каком-либо торце задано перемещение, то соответствующая вариация обращается в нуль, а заданное перемещение учитывается кинематическими краевыми условиями.

Если торцы бруса свободны от закреплений, то внешние воздействия должны отвечать условиям равновесия бруса как твердого тела (принцип отвердевания).

Из вариационного принципа (28) следуют уравнения равновесия и естественные краевые условия.

Уравнения равновесия $(0 < x < \ell)$ :

$$(N_x^*)' \equiv \left(\tilde{N}_x(1+u_0') - \tilde{M}_y' w_0' \left((1+u_0')^2 + (w_0')^2\right)^{-1}\right)' + q_x = 0 \qquad (29)$$
$$(Q_z^*)' \equiv \left(\tilde{N}_x w_0' + M_y'(1+u_0')\left((1+u_0')^2 + (w_0')^2\right)^{-1}\right)' + q_z = 0$$

Естественные краевые условия $(x=0$ и $x=\ell)$:

$$N_x^* = \bar{N} \qquad (u_0 = \bar{u}_0),$$
$$Q_z^* = \bar{Q} \qquad (w_0 = \bar{w}_0), \qquad (30)$$
$$M_y = \bar{M} \qquad (\varphi = \bar{\varphi})$$

При задании на торце перемещения, соответствующее естественное краевое условие заменяется условием приведенным в скобках.

В уравнениях (28) и (30) приняты такие обозначения :

$$\tilde{N}_x = N_x - M_y 2\varphi', \quad \tilde{M}_y = \frac{1}{2} M_y - \varphi' M_{yy}, \qquad (31)$$

$$N_x=\iint\limits_F \sigma_x dF, \quad M_y=\iint\limits_F z\sigma_x dF, \quad M_{yy}=\iint\limits_F z^2\sigma_x dF, \tag{32}$$

$\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – заданные краевые статические величины;
$\bar{u}_o, \bar{w}_o, \bar{\varphi}$ – заданные краевые кинематические величины;
$F$ – площадь поперечного сечения бруса.

Новая статическая величина $M_{yy}$ может быть названа моментом второго порядка; ни в каких других теориях, кроме развиваемой здесь, эта величина не встречается.

Из уравнений равновесия (29) следует функциональная статическая неопределимость рассматриваемой модели. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо привлечь дополнительные условия, отражающие связь статических ($\tilde{N}_x, \tilde{M}_y$) величин с кинематическими ($u_o, w_o$) величинами. Из равенств (32) с учетом физического закона и соотношения (15) получаем:

$$\begin{aligned} N_x &= EF\varepsilon_o - ES_y\varphi'/2 + EJ_y\tfrac{1}{2}(\varphi')^2, \\ M_y &= ES_y\varepsilon_o - EJ_y\varphi'/2 + ES_{yy}\tfrac{1}{2}(\varphi')^2, \\ M_{yy} &= EJ_y\varepsilon_o - ES_{yy}\varphi'/2 + EJ_{yy}\tfrac{1}{2}(\varphi')^2, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$F=\iint\limits_F dF, \quad S_y=\iint\limits_F z\,dF, \quad J_y=\iint\limits_F z^2 dF, \tag{34}$$

$$S_{yy}=\iint\limits_F z^3 dF, \quad J_{yy}=\iint\limits_F z^4 dF \tag{35}$$

При выводе (33) принято $E=E_x=const$ (что не отражается на существе рассматриваемой теории). Формулами (35) определяются новые геометрические характеристики сечения, которые могут быть названы соответственно статическим и осевым моментами инерции второго порядка.

Постановка равенств (33) в соотношение (31) приводит к зависимостям, замыкающим систему уравнений теории:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x &= EF\varepsilon_o - ES_y\varphi'\tfrac{1}{2}(1+2\varepsilon_o) + \tfrac{3}{2}EJ_y(\varphi')^2 - ES_{yy}\tfrac{1}{2}2(\varphi')^3, \\ \tilde{M}_y &= ES_y\frac{\varepsilon_o}{2} - EJ_y\varphi'(1+3\varepsilon_o) + ES_{yy}\tfrac{3}{2}(\varphi')^2\tfrac{1}{2} - EJ_{yy}\tfrac{1}{2}(\varphi')^3 \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения равновесия (29) совместно с краевыми условиями (30) и уравнениями связи (36) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений рассматриваемой теории, из которой следуют все известные теории прямого тонкого бруса

$$N_x = \iint\limits_F \sigma_x \, dF, \quad M_y = \iint\limits_F z \sigma_x \, dF, \quad M_{yy} = \iint\limits_F z^2 \sigma_x \, dF \tag{32}$$

$\bar{N}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ - заданные краевые статические величины;
$\bar{u}_0$, $\bar{w}_0$, $\bar{\varphi}$ - заданные краевые кинематические величины;
$F$ - площадь поперечного сечения бруса.

Новая статическая величина $M_{yy}$ может быть названа моментом второго порядка; ни в каких других теориях, кроме развиваемой здесь, эта величина не встречается.

Из уравнений равновесия (29) следует функциональная статическая неопределимость рассматриваемой модели. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо привлечь дополнительные условия, отражающие связь статических ($\tilde{N}_x$, $\tilde{M}_y$) величин с кинематическими ($u_0$, $w_0$) величинами. Из равенств (32) с учетом физического закона и соотношения (15) получаем:

$$\begin{aligned} N_x &= EF\varepsilon_0 - ES_y \varphi' \frac{1}{2} + EJ_y \frac{1}{2}(\varphi')^2, \\ M_y &= ES_y \varepsilon_0 - EJ_y \varphi' \frac{1}{2} + ES_{yy} \frac{1}{2}(\varphi')^2, \\ M_{yy} &= EJ_y \varepsilon_0 - ES_{yy} \varphi' \frac{1}{2} + EJ_{yy} \frac{1}{2}(\varphi')^2, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$F = \iint\limits_F dF, \quad S_y = \iint\limits_F z \, dF, \quad J_y = \iint\limits_F z^2 \, dF \tag{34}$$

$$S_{yy} = \iint\limits_F z^3 \, dF, \quad J_{yy} = \iint z^4 \, dF \tag{35}$$

При выводе (33) принято $E = E_x = const$ (что не отражается на существе рассматриваемой теории). Формулами (35) определяются новые геометрические характеристики сечения, которые могут быть названы соответственно статическим и осевым моментами инерции второго порядка.

Постановка равенств (33) в соотношение (31) приводит к зависимостям, замыкающим систему уравнений теории:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x &= EF\varepsilon_0 - ES_y \varphi' \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon_0) + \frac{3}{2} EJ_y (\varphi')^2 - ES_{yy} \frac{1}{2} 2 (\varphi')^3, \\ \tilde{M}_y &= ES_y \frac{\varepsilon_0}{2} - EJ_y \varphi' (1 + 3\varepsilon_0) + ES_{yy} \frac{3}{2} (\varphi')^2 \frac{1}{2} - EJ_{yy} \frac{1}{2} (\varphi')^3 \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения равновесия (29) совместно с краевыми условиями (30) и уравнениями связи (36) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений рассматриваемой теории, из которой следуют все известные теории прямого тонкого бруса.

$N_j$