ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 16 1955

Канд. физико-математич. наук **Б. Л. Голинский**

К ВОПРОСУ ОБ ОБТЕКАНИИ СИСТЕМЫ ДУГ БЛИЗКОЙ К ОТРЕЗКАМ ПРЯМОЙ В ИДЕАЛЬНОМ ПОТОКЕ И О СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА КЕЛДЫША — СЕДОВА

§ 1. Пусть E' — некоторая система дуг $(E' = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_N)$ а E система дуг, мало отличающихся от E', обтекание которой мы рассмотрим.

Пусть в потоке имеются вихри, расположенные на линиях C_k ($k = 1, 2, \ldots m$) с известной плотностью $\gamma(u)$, где $u \in C$ и $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_m$, а комплексная скорость потока на бесконечности равна $V_0 e^{-i\alpha}$.

Пусть $g(v)$ представляет собой искомую плотность вихревого набора, который расположен на E и имитирует поток вне E.

Условие (в линеаризованном виде) того, что нормальная проекция полной скорости в любой точке обтекаемой дуги равна нулю, приводит к следующему сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} Re \left\{ \frac{dz}{ds} \left(\int\limits_E \frac{g(v)}{z - v} |dv| + \int\limits_C \frac{V(u)}{z - u} |du| \right) \right\} = F(s), \tag{1,1}$$

где

$F(s) = f[z'(s)], \quad z = x + iy = z(s) \in E, \quad z' = x' + iy' = z(s) \in E'$ z и z' лежат на одной нормали к E, s — соответствующая дуга, отсчитываемая от некоторой точки на E.

Функция $f(z')$ равна $V_0 \left(\cos\alpha \frac{dy'}{ds} - \sin\alpha \frac{dx'}{ds} \right)$ для $z' \in E'$ и равна нулю для

$$z' \overline{\in} E'. \tag{1,2}$$

Постулат Жуковского — Чаплыгина о конечном характере скорости в задних кромках и условие Л. И. Седова о порядке возрастания скорости в передних кромках каждой дуги позволяет представить вихревую функцию в виде:

$$g(z) = p(z)\, k(z), \tag{1,3}$$

где $p(z)$ — функция особенностей, а $k(z)$ — непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на концах каждой из дуг E'_k.

В работе рассматривается случай, когда E — система отрезков одной прямой. Функцию $p(z)$ выберем так, чтобы она содержала все особенности вихревой функции и имела бы вид, при котором из уравнения (1,1), пользуясь формулами обращения [1], можно было бы найти $k(z)$.

В качестве примера применения уравнения (1,1) рассмотрим вывод уравнения Вагнера [5] в теории неустановившегося движения крыла.

Пусть за крылом на отрезке CA находятся вихри, происходящие от неустановившегося характера движения, причем точка C есть начальное положение задней кромки, то есть положение, соответствующее началу движения. Оси $X^*O^*Y^*$ неподвижны, а оси XOY неизменно связаны с крылом (рис. 1). Если скорость крыла равна V_0, то

$$X^* = X - a + \int_0^t V_0 dt$$

и в любой момент времени скорость потока на бесконечности относительно крыла равна $u_\infty = -V_0$.

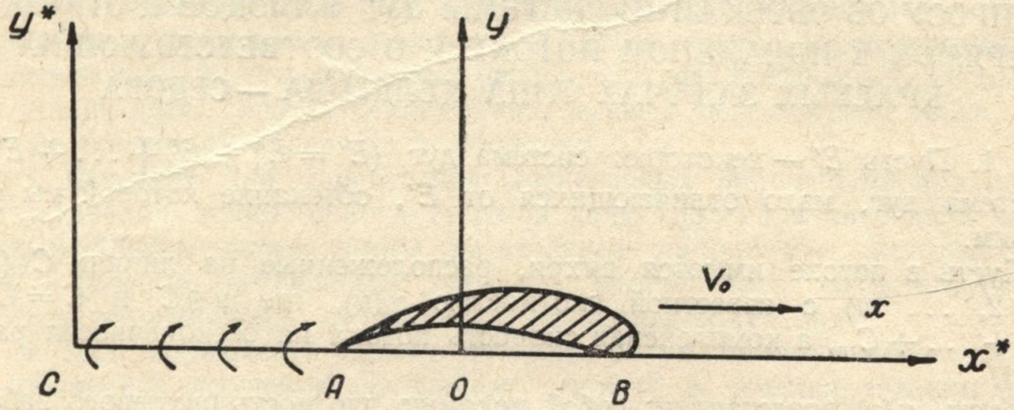

Рис. 1.

При этом a есть абсцисса точки A в системе XOY, абсциссу точки B в этой системе обозначим через b, а абсциссу точки C через c, очевидно,

$$c = a - \int_0^t V_0 dt$$

Будем искать вихревую функцию в виде:

$$g(z)\sqrt{\frac{z-a}{b-z}}\,k(z)$$

(точка A является задней кромкой).

В нашем случае E есть отрезок (a, b), C — отрезок (c, a), из (1,2) следует, что $f = V_0 \frac{dy}{dx}$, где $y = y(x)$ — уравнение дуги E'.

Уравнение (1,1) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{\frac{v-a}{b-v}}\,\frac{k(v)}{x-v}\,dv + \frac{1}{\pi}\int_c^a \frac{\gamma(u)\,du}{x-u} = F(x,\ t), \qquad (1,1\text{-bis})$$

где

$$F(x, t) = -2V_0\frac{dy}{dx}.$$

Кроме уравнения (1,1-bis) мы имеем соотношение

$$\int_c^a \gamma(u)\,du + \int_a^b \sqrt{\frac{v-a}{b-v}}\,k(v)\,dv = 0, \qquad (1,4)$$

выражающее теорему Томсона.

Применив к уравнению (1,1-bis) теорему 3 из [1], найдем

$$k(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}\left\{F(v)-\frac{1}{\pi}\int_c^a\frac{\gamma(u)\,du}{v-u}\right\}\frac{dv}{v-x}. \tag{1,5}$$

Подставляя выражение (1,5) в (1,4), получим после простых преобразований следующее выражение

$$\int_c^a\gamma(u)\,du=\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}\left\{F(v)-\frac{1}{\pi}\int_c^a\frac{\gamma(u)\,du}{v-u}\right\}dv. \tag{1,6}$$

Используя известные формулы*, можно уравнения (1,5) и (1,6) привести к виду:

$$\int_c^a\sqrt{\frac{u-b}{u-a}}\,\gamma(u)\,du=\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}F(v)\,dv, \tag{1,6-bis}$$

и

$$k(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}\,\frac{F(v)\,dv}{v-x}-\frac{1}{\pi}\int_c^a\sqrt{\frac{u-b}{u-a}}\,\frac{\gamma(u)}{u-x}\,du. \tag{1,5-bis}$$

Положим в уравнении (1,6-bis) $u=x+c$ и $\gamma(x+c)=\Gamma(x)$.

Вместо времени t введен путь $s: l=b-a,\ s=\int_0^t V_0dt$.

Если учесть, что $c=a-s$, то уравнение (1,6-bis) примет вид:

$$\int_0^s\Gamma(x)\sqrt{\frac{l+s-x}{s-x}}\,dx=\varphi(s), \tag{1,7}$$

где

$$\varphi(s)=\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}F(v,\ t)\,dv,$$ $a\Gamma(x)$ от времени не зависит.

Уравнение (1,7) и есть уравнение Вагнера.

§ 2. Пусть $E=[a_1,\ b_1]+[a_2,\ b_2]+\ldots+[a_N,\ b_N]$, $\gamma(u)\equiv 0$.

Уравнение (1,1) примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_E\frac{g(t)\,dt}{x-t}=f(x), \tag{2,1}$$

где

$$f(x)=V_0\left(\cos\alpha\,\frac{dy}{dx}-\sin\alpha\right).$$

Предположим, что

$$f(x)\in L_E^2\{q_0\},\ \ g(x)=p_0(x)\,k(x),$$

$$p_0(x)=\sqrt{-\prod_{k=1}^{N}\frac{x-b_k}{x-a_k}}\ \text{ и }\ q_0=\frac{1}{p_0}. \tag{2,2}$$

---

* $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}\,\frac{dv}{v-u}=\sqrt{\frac{u-b}{u-a}}-1$ и $\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{b-v}{v-a}}\,\frac{dv}{x-v}=1.$

Применяя к уравнению (2,1) теорему 3 из [1], найдем

$$k(x) = \frac{2}{\pi} \int_E' q_0(t) f(t) \frac{dt}{t-x}. \tag{2,3}$$

Для суммарной вихревой плотности имеем

$$\Gamma = \int_E g(x)\,dx = \int_E p_0(x) k(x)\,dx = 2 \int_E f(t) q_0(t) \left(\frac{1}{\pi} \int_E' \frac{p_0(x)\,dx}{t-x} \right) dt =$$

$$= 2 \int_E f(t) q_0(t)\,dt. \tag{2,4}$$

Подъемная сила определяется по теореме Н. Е. Жуковского.

Для чаплыгинского крыла [4] $f(x) = -V_0 \sin\alpha$ и (2,4) дает

$$|\Gamma| = 2V_0 \sin\alpha \left| \int_E q_0(t)\,dt \right| = \pi V_0 \sin \cdot l, \text{ где } l = \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k).$$

Комплексная скорость потока за счет вихревого набора, расположенного на E, будет

$$w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{g(x)\,dx}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{p_0(x)}{z-x} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_E' q_0(t) f(t) \frac{dt}{t-x} \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_E H_0(z, t) q_0(t) f(t)\,dt, \tag{2,5}$$

где

$$H_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_E' \frac{p_0(x)\,dx}{(z-x)(t-x)} \tag{2,6}$$

и

$$w^*(z) = p_0(z) \cdot \frac{1}{\pi} \int_E \frac{q_0(t) f(t)}{z-t}\,dt.^{*} \tag{2,5-bis}$$

Для чаплыгинского крыла (4), найдем **

$$w^*(z) = -V_0 \sin\alpha \cdot p_0(z) \cdot \frac{1}{\pi} \int_E \frac{q_0(t)\,dt}{z-t} = -V_0 \sin\alpha p_0(z)(-iq_0(z) - 1) =$$

$$= V_0 \sin\alpha (p_0(z) + i). \tag{2,7}$$

Функция

$$F(z) = p_0(z) \cdot \frac{1}{\pi} \int_E \frac{q_0(t) f(t)}{t-z} dt + Cp_0(z), \tag{2,8}$$

где C — вещественная постоянная, решает задачу типа Келдыша — Седова [2] ***.

---

* См. формулу (п. 11).

** Пользуемся значением интеграла $\frac{1}{\pi} \int_E \frac{q_0(t)\,dt}{z-t} = -iq_0(z) - 1$,

*** По формуле Привалова — Сохоцкого

$$\lim_{z \to x \in E} Im F(z) = f(x).$$

Пусть

$$E=[a_1+kD,\ b_1+kD]+[a_2+kD,\ b_2+kD]+\ldots+ \\ +[a_N+kD,\ b_N+kD],\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,$$

а $f(x)$ — периодическая с периодом D функция.

Формула (2,8) в этом случае запишется:

$$F(z)=p(z)\cdot\frac{1}{\pi}\int_{E_0} q(t)f(t)\left\{\frac{1}{t-z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t-z-kD}+\frac{1}{t-z+kD}\right\}dt+Cp(z), \quad (2,9)$$

где

$$p(z)=\lim_{k\to\infty}p_0(z)=\sqrt{-\prod_{m=1}^{N}\frac{\sin\frac{\pi}{D}(z-b_m)}{\sin\frac{\pi}{D}(z-a_m)}},\ E_0=[a_1,b_1]+\ldots+[a_N,b_N]. \quad (2,10)$$

Формулу (2,9) можно записать в виде

$$F(z)=p(z)\cdot\frac{1}{D}\int_{E_0}q(t)f(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(t-z)\,dt+Cp(z),\quad q=\frac{1}{p}. \quad (2,11)$$

Формула (2,11) дает решение задачи типа Келдыша — Седова для периодической функции [3].

Положим, что

$$\lim_{z\to i\infty}F(z)=-\lim_{z\to -i\infty}F(z). \quad (2,12)$$

Тогда, учитывая предельные равенства

$$\lim_{z\to i\infty}p(z)=\frac{1}{i}e^{\frac{\pi}{D}\sigma i},\ \lim_{z\to -i\infty}p(z)=\frac{1}{i}e^{-\frac{\pi}{D}\sigma i},\ \lim_{z\to i\infty}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(z-t)=\frac{1}{i}, \quad (2,13)$$

где

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k),$$

получим для постоянной C из (2,11) следующее значение

$$C=\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{D}\cdot\frac{1}{D}\int_{E_0}q(t)f(t)\,dt \quad (2,14)$$

и

$$F(z)=p(z)\cdot\frac{1}{D}\int_{E_0}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{D}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(z-t)\right]f(t)q(t)\,dt. \quad (2,15)$$

Если

$$E=[a_1+kDi,\ b_1+kDi]+\ \ldots\ +[a_N+kDi,\ b_N+kDi],$$

то из аналогичных соображений получим

$$F(z)=p^*(z)\cdot\frac{1}{D}\int_{E}\left[\operatorname{th}\frac{\pi\sigma}{D}-\operatorname{cth}\frac{\pi}{D}(z-t)\right]f(t)q^*(t)\,dt, \quad (2,16)$$

где $$p^*=\sqrt{-\prod_{m=1}^{N}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{D}(z-b_m)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{D}(z-a_m)}},\quad q^*=\frac{1}{p^*}$$

§ 3. Рассмотрим решетку с разрезным пером.

Пусть

$$E=[a_1+kD,\ b_1+kD]+\ldots+[a_N+kD,\ b_N+kD]\ k=0,\pm 1,\pm 2 \quad (3,1)$$

или

$$E=[a_1+kDi,b_1+kDi]+\ldots+[a_N+kD_i,\ b_N+kDi]. \quad (3,2)$$

Как известно, решетка не только возмущает скорость набегающего потока, но и поворачивает поток в целом. Если вектор скорости на бесконечности перед решеткой $V_1e^{i\alpha_1}$, а за решеткой $V_2e^{i\alpha_2}$, то вектор средней скорости определяется формулой

$$V_m e^{i\alpha m}=\frac{1}{2}[V_1e^{i\alpha_1}+V_2e^{i\alpha_2}]. \quad (3,3)$$

Пусть Γ — величина циркуляции, наложенной на каждое перо. В случае потенциального обтекания между известными величинами V_1, α_1 и неизвестными V_2, α_2 и Γ существует, как известно, следующая зависимость

$$V_2\sin\alpha_2=V_1\sin\alpha_1,\ D(V_1\cos\alpha_1-V_2\cos\alpha_2)=\Gamma. \quad (3,4)$$

Подъемная сила, действующая на перо решетки, по величине и направлению совпадает с силой, определяемой теоремой Н. Е. Жуковского в случае изолированного крыла, если за скорость на бесконечности принять среднюю скорость, а величину циркуляции оставить такой же, какой она была для пера решетки.

В случае (3,1) $g(x+D)=g(x)$ и уравнение (1,1) запишется

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_0}' g(t)\left\{\frac{1}{x-t}+\sum\frac{1}{x-t-kD}+\frac{1}{x-t+kD}\right\}dt=f(x)$$

или

$$\frac{1}{2D}\int_{E_0}' g(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(x-t)\,dt=f(x), \quad (3.5)$$

где

$$E_0=[a_1,\ b_1]+\ldots+[a_N,\ b_N],\ \text{а}\ f(x)=V_m\left(\frac{dy}{dx}\cos\alpha_m-\sin\alpha_m\right)\ldots, \quad (3,6)$$

где $y=y(x)$ — уравнение системы дуг E', а V_m и α_m определяются из (3,3).

Для случая (3,2) $g(x)=g(x+Di)$ и уравнение обтекания будет:

$$\frac{1}{2D}\int_{E_0}' g(\mathrm{t})\operatorname{cth}\frac{\pi}{D}(x-t)\,dt=f(x). \quad (3,7)$$

Перейдем от системы отрезков E_0 к системе отрезков $E_1\left\{(\alpha_k\beta_k)\right\}_1^N$ заменой

$$x=\frac{D}{2\pi}x_1,\ h\left(\frac{D}{2\pi}x_1\right)=h_1(x_1). \quad (3,8)$$

После преобразования (3,8) уравнение (3,5) примет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_1} g_1(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\alpha t=2f_1(t), \quad (3.5\text{-bis})$$

где

$$g_1(t) = p_1(t)\gamma_1(t), \text{ а } p_1(t) = \sqrt{-\prod_{k=1}^{N} \frac{\sin\frac{t-\beta_k}{2}}{\sin\frac{t-\alpha_k}{2}}}, \quad q_1 = \frac{1}{p_1}. \qquad (3.9)$$

Применив теорему 4 из [1] и уравнение (3,5-bis), найдем для суммарной вихревой плотности

$$\Gamma_1 = \int_{E_1} g_1(t)\,dt = \int_{E_1} p_1(t)\gamma_1(t)\,dt = \frac{2}{\cos\sigma_1}\int_{E_1} q_1(t) f_1(t)\,dt, \qquad (3,10)$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k).$$

Для функции $\gamma_1(x)$ будем иметь

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{E_1} q_1(t) f_1(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt + \operatorname{tg}\sigma_1\cdot\frac{1}{\pi}\int_{E_1} q_1(t) f_1(t)\,dt. \qquad (3,11)$$

Возвращаясь от E_1 к E_0, получим

$$\Gamma = \frac{D}{2\pi}\Gamma_1 = \frac{2}{\cos\frac{\pi\sigma}{D}}\int_{E_0} q(t) f(t)\,dt \qquad (3,12)$$

и

$$g(x) = p(x)\frac{2}{D}\int_{E_0}' \left[\operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{D} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(t-x)\right] g(t) f(t)\,dt, \qquad (3,13)$$

где $f(x)$ имеет значение (3,6), $q = \frac{1}{p}$, а σ значение (2,13). Из равенств (3.4) и (3.10) можно найти α_2, V_2 и Γ.

Подъемная сила найдется по теореме Н. Е. Жуковского

$$P = \rho V_m \frac{2}{\cos\frac{\pi\sigma}{D}}\cdot\int_{E_0} q(t) f(t)\,dt. \qquad (3,14)$$

Пусть $E_0 = (-\tau, \tau)$, а функция $f(t)$ представлена в виде тригонометрического многочлена

$$f(t) = \sum_{-n}^{n} A_k e^{i\frac{2\pi}{D}t\cdot k} \quad (A_k = \bar{A}_{-k}).$$

Формула (3,14) в этом случае будет

$$P = \rho V_m \frac{2}{\cos\frac{\pi\tau}{D}}\sum_{-n}^{n} A_k C_k, \qquad (3,15)$$

где

$$C_k = \int_{E_0} q(t) e^{i\frac{2\pi t}{D}\cdot k}\,dt = \frac{D}{2}C_k', \text{ а } C_k' = \frac{1}{\pi}\int_{-\tau_1}^{\tau_1} q_1(t) e^{itk}dt,$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\tau}, \quad C_{-k} = \bar{C}_k.$$

Коэффициенты C'_k можно вычислить по формуле*:

$$C'_k = i\left\{e^{-i\frac{\pi t}{D}} P_{k-1}\left(\cos\frac{2\pi\tau}{D}\right) - e^{\frac{i\pi\tau}{D}} P_k\left(\cos\frac{2\pi\tau}{D}\right)\right\}, \qquad (3,16)$$

где $P_k(x)$ — многочлены Лежандра.

Вихревая плотность найдется при этом по формуле (3,9)

$$g(x) = \sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{D}(\tau - x)}{\sin\frac{\pi}{D}(\tau + x)}} \cdot \sum_{-n}^{n} A_k\left\{2\lambda_k\left(\frac{2\pi}{D}x\right) + \frac{1}{D}\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{D}\cdot C_k\right\}, \qquad (3,17)$$

где $\lambda_k(x)$ определяются из рекуррентного соотношения

$$e^{ix}\{\lambda_{k-1}(x) + 2iC'_{k-1}\} = \lambda_k(x) - 2iC'_k \qquad (3,18)$$

с $\lambda_0 = \cos\frac{\pi\tau}{D}$, $C'_0 = 2\sin\frac{\pi\tau}{D}$.

Комплексная скорость за счет вихревого набора будет

$$w^*(z) = \frac{1}{2Di}\int_{E_0} g(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{D}(z - t)\,dt, \qquad (3,19)$$

где

$$g(t) = p(t)\,\gamma(t).$$

Произведя замену (3,8) в (31,9) и воспользовавшись формулой (3,11), найдем после изменения порядка интегрирования

$$w_1^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{E_1} q_1(t) f_1(t) I_1(t, z)\,dt + \frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\sigma_1\cdot\int_{E_1} q_1(t) f_1(t) U_1(z)\,dt, \qquad (3,20)$$

где

$$I_1(t, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{E_1}' p_1(x)\operatorname{ctg}\frac{t - x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{z - x}{2}\,dx, \qquad (3,21)$$

$$U_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{E_1} p_1(x)\operatorname{ctg}\frac{z - x}{2}\,dx. \qquad (3,22)$$

Вернувшись к исходным переменным и написав формулы для интегралов** I_1 и U_1, получим

$$w^*(z) = p(z)\cdot\frac{1}{D}\int_{E_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(z - t)}{D} - \operatorname{tg}\frac{\pi\sigma}{D}\right] q(t) f(t)\,dt \qquad (3,23)$$

Аналогично рассматривается случай (3,2). Заметим, что функция (3,23) с точностью до знака совпадает с функцией (2.15).

§ 4. Рассмотрим поток в канале $-\frac{H}{2} \leqslant I_m z \leqslant \frac{H}{2}$ (рис. 2). Вихрь интенсивности Γ в точке t эквивалентен потоку во всей плоскости комплексного переменного z с вихрями интенсивности Γ в точках $t \pm 2mH_i$, $m = 1, 2, \ldots$ и интенсивности $-\Gamma$ в точках*** $t \pm (2m + 1)Hi$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ В этом случае $C = C_1 + C_2$, где

* См. формулу (п. 4).
** См. Формулы (п. 6 и п. 8).
*** Применяем последовательно принцип зеркального отображения.

$$C_1 = [a_1 + 2kHi,\ b_1 + 2kHi] + \ldots + [a_N + 2kHi,\ b_N + 2kHi],\quad k = \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{4,1}$$

$$C_2 = [a_1 + (2k+1)Hi,\ b_1 + (2k+1)Hi] + \ldots + [a_N + (2k+1)Hi,\ b_N + (2k+1)Hi] \tag{4,2}$$

и соответственно

$$\gamma_1(u) = g(u),\ \gamma_2(u) = -g(u). \tag{4,3}$$

Уравнение (1,1) в соответствии с этим представится

$$\frac{1}{2H}\int\limits_{E_0}' g(t)\operatorname{csh}\frac{\pi}{H}(x-t)\,dt = f(x), \tag{4,4}$$

где
$$f(x) = V_0 y'(x).$$

Вихревую плотность будем искать в виде

$$g(t) = P(t)\gamma(t),\ \text{где}\ P(t) = \sqrt{-\prod_{k=1}^{N}\frac{\operatorname{th}\nu b_k - \operatorname{th}\nu t}{\operatorname{th}\nu a_k - \operatorname{th}\nu t}} = \frac{1}{Q(t)},\quad \nu = \frac{\pi}{H} \tag{4,5}$$

Уравнение (4,4) или более общее

$$\frac{\nu}{\pi}\int\limits_{E_0}' \Gamma(t)P(t)\operatorname{csh}\nu(x-t)\,dt = F(x), \tag{4,4-bis}$$

где $F(x)$ заданная функция из класса $L^2_{E_0}\{Q\}$, может быть решено следующим образом: отобразим множество E_0 на e при помощи формулы $\operatorname{th}\nu t = \sigma$ ($\operatorname{th}\nu x = s$), тогда e будет лежать строго внутри $[-1,\ 1]$.

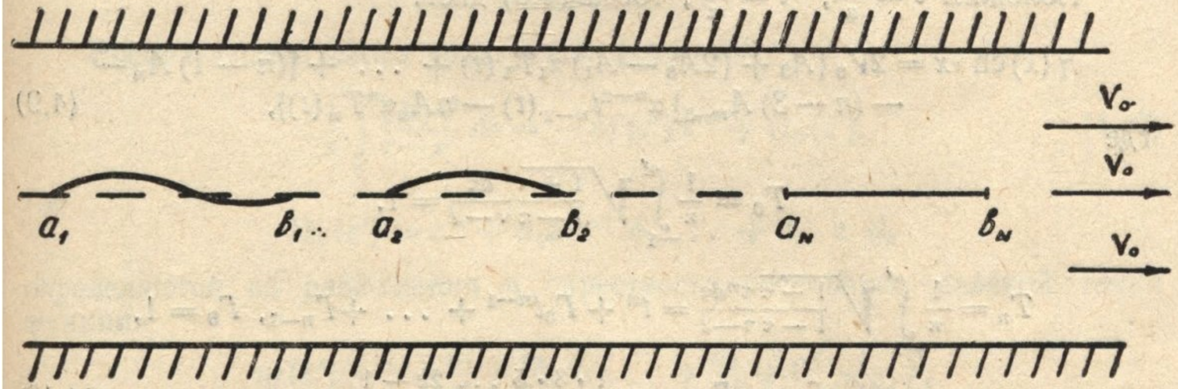

Рис. 2.

Обозначим

$$\operatorname{th}\nu b_k = \beta_k,\ \operatorname{th}\nu a_k = \alpha_k,\ Q(t) = \sqrt{-\prod_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k-\sigma}{\beta_k-\sigma}} = q(\sigma),\ P(t) = p(\sigma).$$

Функции $\Gamma(t)$ и $F(t)$ перейдут соответственно в $\gamma(\sigma)$ и $f(\sigma)$, кроме того,

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\nu(x-t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\nu t\cdot\operatorname{ch}\nu x}\cdot\frac{1}{\operatorname{th}\nu x - \operatorname{th}\nu t} = \frac{\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-\nu^2}}{s-\sigma},\quad dt = \frac{1}{\nu}\frac{d\sigma}{1-\sigma^2}.$$

Уравнение (4,4-bis) перейдет в уравнение

$$\frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{e}' p(\sigma)\frac{\gamma(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}}\frac{d\sigma}{s-\sigma}. \tag{4,5-bis}$$

Так как
$$\int_e \frac{f^2(s)\,ds}{1-s^2} = \nu \int_{E_0} F^2 Q dt < \infty,$$

то по теореме (3) из [1], имеем
$$\frac{\gamma(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_e' q(\tau) \frac{f(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{dt}{\tau - t}. \qquad (4,6)$$
$$\int_e \frac{\gamma^2(t)\,dt}{1-t^2} = \nu \int_{E_0} \Gamma^2(x) P(x)\,dx < \infty.$$

Возвращаясь в (4.6) к исходным переменным, получим
$$\Gamma(x) = \frac{\nu}{\pi} \int_{E_0}' F(t) Q(t) \operatorname{csh} \nu(t-x)\,dt. \qquad (4,6\text{-bis})$$

(4,4-bis) и (4.6-bis) являются взаимными формулами обращения.

Пусть $E_0 = [a, a]$. Уравнение дуги $y = y(x)$ представим в виде:
$$y = A_0 + A_1 \frac{1}{\operatorname{ch} \nu x} + A_2 \frac{\operatorname{sh} \nu x}{\operatorname{ch}^2 \nu x} + \ldots + A_n \frac{\operatorname{sh} \nu x}{\operatorname{ch} \nu x}. \qquad (4,7)$$

На основании (4.6) имеем
$$\gamma(x) \operatorname{ch} \nu x = \frac{2V_0}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha}{}' \sqrt{\frac{\alpha+\sigma}{\alpha-\sigma}} \{A_2 + (2A_3 - A_1)\sigma + (3A_4 - 2A_2)\sigma^2 + \ldots +$$
$$+ [(n-1)A_n - (n-3)A_{n-2}\sigma^{n-2}] - A_n n \sigma^n\} \frac{d\sigma}{\sigma - s}. \qquad (4,8)$$

Положим $t = \frac{s}{\alpha}$, $\tau = \frac{\sigma}{\alpha}$, тогда (4,8) даст:
$$\gamma(x) \operatorname{ch} \nu x = 2V_0 \{A_2 + (2A_3 - A_1)\alpha_1 T_1(t) + \ldots + [(n-1)A_n -$$
$$-(n-3)A_{n-2}]\alpha^{n-2} t_{n-2}(t) - nA_n \alpha^n T_n(t)\}, \qquad (4,9)$$

где
$$T_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}' \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{d\tau}{\nu - t} = 1.$$

$$T_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}' \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{\tau^n d\tau}{\tau - t} = t^n + \Gamma_0 t^{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-1},\ \Gamma_0 = 1,$$
$$\Gamma_{2k} = \Gamma_{2k-1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2k-1}{2^k \cdot k!}. \qquad (4,10)$$

Вихревая плотность $g(x)$ будет
$$g(x) = 2V_0 \sqrt{\frac{\operatorname{th} \nu a - \operatorname{th} \nu x}{\operatorname{th} \nu a + \operatorname{th} \nu x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \nu x} \cdot P_n\left\{\frac{\operatorname{th} \nu x}{\operatorname{th} \nu a}\right\}, \qquad (4,11)$$

где P_n многочлен n-ой степени, выражающий содержимое скобок {} правой части формулы (4,9).

Подъемная сила и момент найдутся по формулам Чаплыгина.

Комплексная скорость, индуцируемая вихревым набором, будет
$$w^*(z) = \frac{1}{2Hi} \int_{E_0} g(x) \operatorname{csh} \frac{\pi}{H}(z-x)\,dx, \qquad (4,12)$$

где
$$g(x) = \Gamma(x) P(x).$$

Подставив в (4,12) вместо $\Gamma(x)$ его значение (4,6-bis) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$w^*(z) = \frac{1}{H^2 i} \int_{E_0} K_0(z, t) Q(t) f(t) \, dt, \tag{4,13}$$

где

$$K_0(z; t) = \int_{E_0}' P(x) \operatorname{csh} \frac{\pi}{H}(z - x) \operatorname{csh} \frac{\pi}{H}(t - x) \, dx. \tag{4,14}$$

Подставив в (4.13) значение $K_0(z; t)$ *, получим

$$w^*(z) = P(z) \cdot \frac{1}{H} \int_{E_0} Q(t) f(t) \operatorname{csh} \frac{\pi}{H}(z - t) \, dt. \tag{4,15}$$

Функция

$$F(z) = -w^*(z) + CP(z), \tag{4,15-bis}$$

где C — вещественная постоянная, решает задачу типа Келдыша — Седова ** для полосы $-\frac{H}{2} \leqslant J_m z \leqslant \frac{H}{2}$. При $C = 0$ — с дополнительным условием на границе: $J_m F(z) = 0$ для $z = x \pm \frac{iH}{2}$.

Пусть $f(t)$ имеет вид (4,7) с $A_0 = 0$. Пользуясь обозначениями, введенными в начале этого параграфа, будем иметь

$$F(z) = P(z) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \nu z} \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \frac{1}{\pi} \int_e \frac{q(\sigma) \sigma^{k-1}}{\sigma - z'} \, d\sigma. \tag{4,16}$$

Воспользуемся легко доказуемой формулой

$$\frac{1}{\pi} \int_e \frac{q(\sigma) \sigma^k}{\sigma - z'} \, d\sigma = -iq(z') z'^k + \Pi_k(z'), \tag{4,17}$$

где

$$\Pi_k(z') = z'^k + d_1 z'^{k-1} + \ldots + d_k, \text{ а } d_k$$

определяются из разложения в окрестности бесконечно далекой точки функции

$$iq(z') = 1 + \frac{d_1}{z'} + \frac{d_2}{z'^2} + \ldots + \frac{d_k}{z'^k} + 0\left(\frac{1}{z'^{k+1}}\right),$$

тогда (4,16) запишется

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \{ P(z) \Pi_{k-1}(\operatorname{th} \nu z) - i(\operatorname{th} \nu z)^k \}. \tag{4,18}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Пусть $C_k' = \frac{1}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} q(t) e^{ikt} dt$, где q_1 имеет значение (3,9).

---

* См. формулу (п. 10).

** Применяя формулу Привалова — Сохоцкого, получим

$$\lim_{z \to x \in E_0} J_m F(z) = f(x).$$

Положим $z' = e^{it}$, тогда

$$C'_k = -ie^{i\frac{\tau_1}{2}} \cdot \Psi_k(0), \qquad (\text{П}.1)$$

где

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_e \frac{\omega(z')\, z'^k}{z'-z}\, dz', \quad \omega(z') = \sqrt{\frac{z'-e^{-i\tau_1}}{z'-e^{i\tau_1}}}, \quad e = (e^{-i\tau_1}, e^{i\tau_1}).$$

Легко проверить, что

$$\Psi_k(z) = \Pi_k(z) - z^k \omega(z), \qquad (\text{П}.2)$$

где

$$\Pi_k(z) = z^k + d_1 z^{k-1} + \ldots + d_k,$$

а d_k определяются из разложения в окрестности бесконечно далекой точки функции

$$\omega(z) = 1 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots \qquad (\text{П}.3)$$

Сравнивая (п. 1), (п. 2) и (п. 3) найдем, что $C'_k = -ie^{\frac{i\tau_1}{2}} \cdot d_k$.

Далее, так как

$$\omega(z) = \frac{z-e^{-i\tau_1}}{\sqrt{1-2z\cos\tau_1+z^2}} = \frac{1-\frac{1}{z}e^{-i\tau_1}}{\sqrt{1-\frac{2}{z}\cos\tau_1+\frac{1}{z^2}}} = P_0(\cos\tau_1) + \frac{1}{z}P_1(\cos\tau_1) + \ldots$$

$$+ e^{-i\tau_1}\left\{\frac{1}{z}P_0(\cos\tau_1) + \frac{1}{z^2}P_1(\cos\tau_1) + \ldots\right\},$$

то

$$d_k = P_k(\cos\tau_1) - e^{-i\tau_1}P_{k-1}(\cos\tau_1)$$

и

$$C'_k = i\left\{e^{\frac{-i\tau_1}{2}}P_{k-1}(\cos\tau_1) - e^{\frac{i\tau_1}{2}}P_k(\cos\tau_1)\right\}. \qquad (\text{П}.4)$$

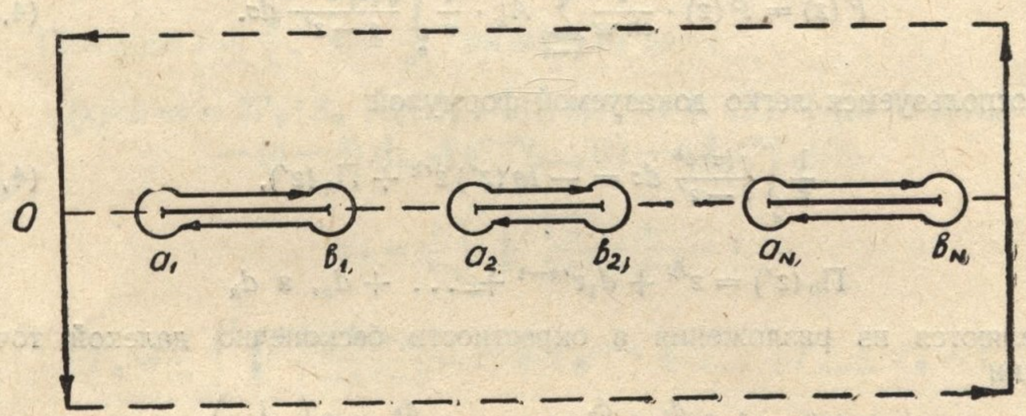

Рис. 3.

2. Найдем значения интегралов (3,21) и (3,22). Рассмотрим интеграл

$$U = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C P_1(z')\operatorname{ctg}\frac{z-z'}{2}\, dz'$$

по контуру C, указанному на рис. 3.

Воспользуемся предельными равенствами

$$p(x+i\infty) = -ie^{i\sigma_1}, \quad p(x-i\infty) = -ie^{-i\sigma_1}, \quad \lim_{z'=t-i\infty}\operatorname{ctg}(z'-z) = i \qquad (\text{П}.5)$$

интегралы по вертикальным отрезкам прямоугольника (рис. 3) в сумме дают нуль, так как подинтегральная функция периодическая. Применив формулу Коши и равенства (п. 5), найдем что

$$U_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_1} P_1(x)\operatorname{ctg}\frac{z-x}{2}\, dx = -P_1(z) - i\cos\sigma_1. \qquad (\text{П}.6)$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(t,\ z;\ z')\, dz',$$

где

$$\varphi(t,\ z;\ z') = P_1(z') \operatorname{ctg} \frac{t - z'}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{z - z'}{2}$$

по контуру C (рис. 3).

Аналогично прежнему найдем, что

$$J = i \sin \sigma_1 + \operatorname{ctg} \frac{z - t}{2} \cdot \{p(z) - p(t)\}. \tag{П.7}$$

Переходя к пределу в (п. 7) при $t \to x$, получим

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_1}' \varphi(x,\ z;\ x')\, dx' = i \sin \sigma_1 + p_1(z) \operatorname{ctg} \frac{z - x}{2}. \tag{П.8}$$

3. Найдем значение интеграла (4,14). Произведем замену переменных

$$\frac{\pi}{H} z = \frac{iz^*}{2},\ \frac{\pi t}{H} = \frac{i\tau}{2},\ \frac{\pi}{H} x = \frac{iy}{2}.$$

При этом $E\{(a_k,\ b_k)\}_1^N$ перейдет в $E_1\{\alpha_k,\ \beta_k\}_1^N$.

$$K_0 = H\rho K_1, \text{ где } K_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_1} \Psi_1(z^*,\ \tau;\ y)\, dy$$

и

$$\Psi_1(z^*,\ t,\ y) = P_1(y) \csc \frac{z^* - y}{2} \cdot \csc \frac{\tau - y}{2};\ \rho = \sqrt{\prod_{k=1}^{N} \frac{\cos \frac{\alpha_k}{2}}{\cos \frac{\beta_k}{2}}},$$

$p_1(y)$ имеет значение (3.9).

Рассмотрим интеграл

$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Psi_1(z^*,\ \tau^*;\ z')\, dz'$$

по контуру C, изображенному на рис. 3.

Интегралы по горизонтальным отрезкам обращаются в нуль, так как

$$\lim_{z' = t \pm i\infty} \csc(z' - z) = 0.$$

Интегралы по вертикальным отрезкам в сумме дают нуль, так как подинтегральная функция периодическая. Из формулы Коши получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{E_1} \Psi_1(z^*,\ \tau^*,\ y)\, dy = [p_1(\tau^*) - p_1(z^*)] \csc \frac{\tau^* - z^*}{2}. \tag{П.9}$$

Переходя в (п. 9) к пределу при $\tau^* \to \tau$ и возвращаясь к исходным переменным, получим

$$K_0 = HiP(z) \operatorname{csh} \frac{\pi}{H}(z - t). \tag{П.10}$$

4. Найдем значение интеграла (2.6). Рассмотрим интеграл

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{p_0(z')\, dz'}{(z - z')(i - z')}$$

по контуру C, состоящему из прямолинейных разрезов вдоль $E\{(a_k, b_k)\}_1^N$ и окружности достаточно большого радиуса R. Применив формулу Коши и переходя к пределу при $R \to \infty$, найдем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_E \frac{p(x)\,dx}{(z-x)(t-x)} = \frac{p(z)-p(t)}{z-t}. \qquad (\text{П.11})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Известия Академии Наук СССР т. 9, 1945, стр. 275—290.
2. Лаврентьев М. А. и Шаба. Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1951, стр 270—275.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1950, стр. 149—152.
4. Чаплыгин С. А. Схематическая теория разрядного крыла аэроплана. Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 431—441.
5. Wagner. Dinamischer Auftrieb von Tragflugeln. Zeitschrift für Angewandete Mathematik und Mechanik Bd. 5, 1924, стр. 17.