Доцент, кандидат физико-математических наук **М. С. Шун**

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Все системы классических ортогональных многочленов (Чебышева — Эрмита, Чебышева — Лагерра и Якоби) допускают представление

$$P_n(x) = \frac{\gamma_n}{p(x)} D^n [p(x) u^n(x)], \tag{1}$$

где

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Кроме того, имеет место условие: $p(x)u^n(x)$ имеет нули в двух фиксированных точках вещественной оси. (*A*)

Очевидно, что представление (1) вместе с условием (*A*) обеспечивает ортогональность системы многочленов $P_n(x)$ с весом $p(x)$.

Имеет место теорема:

Представление (1) совместно с условием (*A*) имеет место только для классических ортогональных многочленов.

Доказательство.

Положив в (1) $n=1$ и $n=2$, найдём:

$$D(pu) = \frac{p}{\gamma_1} P_1(x) \tag{1₁}$$

$$D^2(pu^2) = \frac{p}{\gamma_1} P_1(x)\left[\frac{P_1(x)}{\gamma_1} + u'\right] + pu\left[\frac{P_1'(x)}{\gamma_1} + u''\right] = \frac{p\,P_2(x)}{\gamma_2},$$

откуда

$$uu'' + \frac{P_1'}{\gamma_1}u + \frac{P_1}{\gamma_1}u' = \frac{P_2}{\gamma_2} - \frac{P_1^2}{\gamma_1^2}. \tag{2}$$

Но из уравнения

$$P_{n+2} = (x + \alpha_{n+1}) P_{n+1} - \lambda_n P_n$$

и представления (1) следует:

$$D^{n+2}(pu^{n+2}) - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}(x + \alpha_{n+1}) D^{n+1}(pu^{n+1}) + \frac{\lambda_n \gamma_n}{\gamma_{n+2}} D^n(pu^n) = 0,$$

или так как

$$xD^{n+1}(pu^{n+1}) = D^n[xD(pu^{n+1}) - npu^{n+1}], \quad n \geq 0,$$

то

$$D^n\left\{D^2(pu^{n+2}) - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}[xD(pu^{n+1}) - npu^{n+1} + \alpha_{n+1}D(pu^{n+1})] + \frac{\gamma_n\lambda_n}{\gamma_{n+2}} pu^n\right\} = 0,$$

откуда

$$D^2(pu^{n+2}) - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}[xD(pu^{n+1}) - npu^{n+1} + \alpha_{n+1}D(pu^{n+1})] + \frac{\gamma_n\lambda_n}{\gamma_{n+2}} pu^n = C_{n-1}(x), \tag{3}$$

где:

$C_{n-1}(x)$ — произвольный многочлен от x степени $n-1$. Но, в силу условия (*A*), $C_{n-1}(x)$ имеет не менее n нулей, следовательно, $C_{n-1}(x) \equiv 0$.

Кроме того, имеем $D(pu^{n+1}) = pu^n\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + nu'\right)$,

$$D^2(pu^{n+2}) = pu^n\left\{\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + nu'\right)\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + (n+1)u'\right) + u\left(\frac{P_1^1}{\gamma_1} + (n+1)u''\right)\right\},$$

после чего уравнение (3) даёт:

$$\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + nu'\right)\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + (n+1)u'\right) + u\left(\frac{P_1'}{\gamma_1} + (n+1)u''\right) -$$
$$- \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}\left\{\left(\frac{P_1}{\gamma_1} + nu'\right)\left(x + \alpha_{n+1}\right) - nu\right\} + \frac{\lambda_n\gamma_n}{\gamma_{n+2}} = 0. \qquad (3_1)$$

Вычисляя третью разность по n, получаем:

$$\frac{P_1}{\gamma_1}(a_n x + b_n) + u'(c_n x + d_n) - c_n u - l_n = 0, \qquad (4)$$

где:

$$\left.\begin{aligned} a_n = \Delta^3\left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}\right), \quad b_n = \Delta^3\left(\frac{\gamma_{n+1}\,\alpha_{n+1}}{\gamma_{n+2}}\right), \\ c_n = \Delta^3\left(\frac{n\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}\right), \ d_n = \Delta^3\left(n\frac{\alpha_{n+1}\,\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+2}}\right), \ \mathrm{ln} = \Delta^3\left(\frac{\lambda_n\gamma_n}{\gamma_{n+2}}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (4_1)$$

Отсюда

$$D^3\{u'(c_n x + b_n) - c_n u\} = 0. \qquad (5)$$

Ясно, что тогда $b_n = \mu \cdot c_n$, после чего уравнение (5) даёт:

$$c_n D^3\{u'(x+\mu) - u\} = 0$$

и если $c_n \neq 0$, то

$$\frac{u^{(4)}}{u^{(3)}} = -\frac{2}{x+\mu}. \qquad (6)$$

Теперь из (6) и (2) следует

$$u = c_1x^2 + c_2x + c_3 = c_1(x-\lambda_1)(x-\lambda_2), \qquad (6_1)$$

где $\lambda_{1,2}$ в силу (A) — вещественные.

Случай $c_n = 0$, $b_n \neq 0$ с помощью (4) даёт:

$$a_n = Ad_n, \ b_n = Bd_n, \ l_n = Cd_n$$

и

$$(Ax + B)\frac{P_1}{\gamma_1} + u' - C = 0,$$

откуда и из (2) также следует (6_1).

Наконец случай $c_n = b_n = 0$ с помощью (4) и (4_1) даёт:

$$a_n = a, \ d_n = d, \ l_n = 0.$$

Тогда (4) и (2) также приводит к (6_1).

Теперь, из (1_1) следует:

$$\frac{p'}{p} = \frac{P_1 - \gamma_1 u'}{\gamma_1 u},$$

откуда с помощью (6_1) вытекают следующие четыре возможности:

1) $p(x) = k(x-\lambda_1)^{\alpha}(x-\lambda_2)^{\beta}$ $\qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $p(x) = k(x-\lambda)^{\alpha}e^{\frac{\beta}{x-\lambda}}$ $\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \infty$

3) $p(x) = k(x-\lambda)^{\beta}e^{\alpha x}$ $\qquad \lambda_1 = \lambda \neq \infty, \ \lambda_2 = \infty$

4) $p(x) = ke^{\alpha x^2 + \beta x}$ $\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \infty$.

В случае (2) не выполняется условие (A). Остальные случаи дают системы классических ортогональных многочленов.