

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С. С. КУРЄННОВ, К. П. БАРАХОВ

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
КЛЕЙОВИХ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК.
АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД**

Монографія

Меріс
Publisher

Харків
2022

УДК 539.313:539.384
К93

*Рекомендовано до друку вченою радою
Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
(протокол № 5 від 29 грудня 2022 р.)*

Рецензенти:

Н. В. Сметанкіна – д-р техн. наук, зав. відділу вібраційних і термоміцнісних досліджень Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України;

Ю. В. Токовий – д-р фіз.-мат. наук, заст. директора Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України;

Г. Ю. Мартиненко – д-р техн. наук, професор кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» МОН України;

Куреннов С. С., Барахов К. П.

К93 **Математичні моделі напруженого стану клейових з'єднань внапуск. Аналітичний підхід** / С. С. Куреннов, К. П. Барахов; за ред. проф. С. С. Куреннова. – Харків. Видавець: О. А. Мірошніченко, 2022. – 208 с.

ISBN 978-617-8130-13-8.

Описано основні проблеми та підходи математичного моделювання напружено-деформованого стану клейових з'єднань внапуск. Розглянуто класичні підходи знаходження напружено-деформованого стану з'єднань та висвітлено їх недоліки. Наведено нові вдосконалені математичні моделі напружено-деформованого стану з'єднань, які є розвитком та узагальненням класичних моделей напружено-деформованого стану з'єднань. Розглянуто одновимірні моделі з'єднань внапуск стрижнів, круглих пластин і труб та двовимірні моделі напруженого стану з'єднань внапуск прямокутних пластин і коаксіальних труб.

Для дослідників, що працюють в області механіки деформівного твердого тіла, а також наукових працівників, інженерів, аспірантів і студентів, що вивчають питання математичної фізики, теорії пружності, клейових з'єднань.

УДК 539.313:539.384

© Куреннов С. С., Барахов К. П., 2022

© Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2022

ISBN 978-617-8130-13-8

ЗМІСТ

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ВСТУП..... | 5 |
| Розділ 1. ОСНОВИ МЕХАНІКИ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК. МОДЕЛІ ФОЛЬКЕРСЕНА І ГОЛАНДА – РЕЙССНЕРА. КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРАЮ КЛЕЙОВОГО ШАРУ..... | 9 |
| 1.1. Особливості напруженого стану клейового шару в з'єднанні..... | 9 |
| 1.2. Конструктивні заходи щодо зменшення напружень у клейовому шарі та підвищення несної здатності з'єднань внапуск..... | 14 |
| 1.3. Найпростіші класичні математичні моделі напруженого стану з'єднань внапуск..... | 17 |
| 1.4. Інші типи з'єднань (огляд)..... | 26 |
| Висновки за розділом..... | 29 |
| Розділ 2. УДОСКОНАЛЕНІ ОДНОВИМІРНІ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З'ЄДНАНЬ..... | 30 |
| 2.1. Узагальнення моделі Голанда – Рейсснера на довільну кількість шарів..... | 30 |
| 2.2. Уточнення моделі напруженого стану клейового шару. Двопараметрична модель пружної основи. Дослідження критерію міцності клею в умовах складного навантаження..... | 42 |
| 2.3. З'єднання внапуск коаксіальних труб. Осесиметрична модель..... | 56 |
| 2.4. З'єднання круглої накладки з пластиною, що містить круглий виріз. Узагальнення моделей Фолькерсена і Голанда – Рейсснера на області з круговою симетрією..... | 67 |
| 2.4.1. Осесиметричне узагальнення моделі Фолькерсена..... | 68 |
| 2.4.2. Осесиметричне узагальнення моделі Голанда – Рейсснера..... | 79 |
| 2.4.3. Осесиметричне узагальнення моделей Фолькерсена і Голанда – Рейсснера..... | 98 |
| Висновки за розділом..... | 109 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Розділ 3. ДВОВИМІРНІ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК, У ЯКИХ УРАХОВУЄТЬСЯ НЕРІВНОМІРНІСТЬ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЇ ПО ШИРИНІ..... | 111 |
| 3.1. Двовимірне узагальнення моделі Фолькерсена. Загальна система рівнянь | 112 |
| 3.2. Урахування взаємного впливу поперечних і поздовжніх деформацій пластин на напружений стан з'єднання в умовах рівномірного по ширині навантаження і відсутності дотичних напружень у з'єднуваних шарах..... | 116 |
| 3.3. Напружений стан з'єднання при нерівномірному по ширині конструкції поздовжньому навантаженні..... | 128 |
| 3.4. Напружений стан з'єднання при ексцентричному навантаженні..... | 139 |
| 3.5. Напружений стан з'єднання двох пластин, одна з яких навантажена поздовжніми зусиллями, а інша – закріплена вздовж бічної сторони..... | 148 |
| 3.6. Напружений стан з'єднання пластин, навантажених дотичними зусиллями..... | 157 |
| 3.7. Напружений стан двох склеєних внапуск коаксіальних труб при нерівномірному осьовому навантаженні..... | 172 |
| Висновки за розділом..... | 184 |
| ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ..... | 185 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 188 |

ВСТУП

Клейові з'єднання відомі з давніх часів. Клеї природнього походження на основі рослинних і мінеральних смол, желатину, казеїну тощо люди застосовували починаючи з кам'яного та бронзового віків. Однак широкого застосування технології склеювання набули з середини 20-го сторіччя внаслідок стрімкого розвитку хімії полімерів. Сьогодні склеювання є найбільш поширеним, а часто й безальтернативним методом з'єднання композитних і полімерних конструкцій, а також набуває поширення при з'єднанні металів, конкуруючи з класичними для металів видами з'єднань.

Будь-яка складна механічна конструкція, така як корпус літака, ракети або автомобіля, являє собою систему багатьох конструктивних елементів. Розбиття конструкції на окремі елементи зумовлено як диференціацією частин конструкції за функціональними цілями, так і внаслідок технологічних причин. Об'єднання елементів конструкції в єдине ціле потребує введення з'єднань, які мають забезпечити узгоджену роботу різних елементів конструкції та передавання зусиль між ними. Зазвичай передавання зусиль від одного елемента конструкції до іншого потребує введення в конструкцію певних перехідних елементів (клейовий шар, зварювальний шов, болти, заклепки тощо) і часто супроводжується зміненням у просторі напрямків силових потоків. Це, своєю чергою, призводить до концентрації напружень. Інакше кажучи, напружений стан типових елементів конструкції (таких як брус, пластина) зазвичай є достатньо простим і являє собою, наприклад, розтягування-стискання, згинання, кручення, і його можна описати із застосуванням моделей опору матеріалів і структурної механіки. Але напружений стан з'єднань є більш складним, з'єднання може містити зони концентрації напружень і потребує для опису напруженого стану застосування спеціальних математичних моделей.

З'єднання зазвичай поділяють на рознімні й нерознімні. Клейові з'єднання належать до нерознімних з'єднань. З іншого боку, поява термопластичних клеїв дає змогу створювати рознімні з'єднання, але такі клеї

за міцністю досі поступаються термореактивним клеям. За ознакою розмірності з'єднання можна поділити на точкові (болтові, заклепкові, точкове зварювання), лінійні (зварювальні шви) і поверхневі (клейові та паяні з'єднання) [150]. Відомі також комбіновані (гібридні) з'єднання, наприклад клеєзаклепкові та клеєболтові. Збільшення розмірності з'єднання за цією класифікацією відповідно супроводжується збільшенням площі, через яку передаються зусилля. Наслідком цього зазвичай є зменшення напружень у з'єднанні та зростання його несної здатності.

З погляду на геометрію клейові з'єднання можна поділити на з'єднання стикові (торцеві), Т-подібні і внапуск (напускні) [29], схеми яких показано на рис. 1.

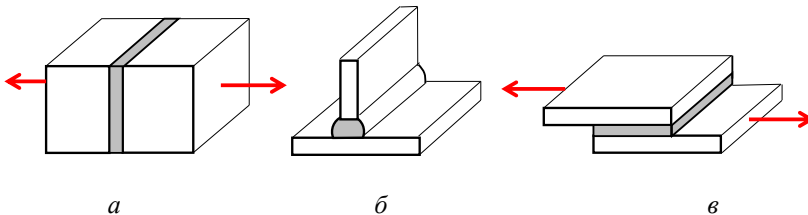


Рис. 1. Основні типи клейових з'єднань:

а – стикове (торцеве), *б* – Т-подібне, *в* – внапуск (напускне)

У стиковому з'єднанні клей працює на розтягання-стискання, а у з'єднанні внапуск – переважно на зсув. З'єднання типу Т виникає, наприклад, при приклеюванні стільникового заповнювача до зовнішніх несних пластин. Клей змочує стінки заповнювача і з'єднує їх із несними шарами [59].

У цій роботі описано аналітичні математичні моделі напруженого стану з'єднань внапуск. Це найбільш поширений тип клейових з'єднань. З'єднання внапуск характеризуються малою масою, герметичністю, високою аеродинамічною ефективністю, високою технологічністю тощо, не потребують створення отворів, наприклад, під заклепки або болти. Цей тип з'єднань найбільш часто застосовується при з'єднанні конструкцій із композиційних

матеріалів (КМ), оскільки при склеюванні не порушується суцільність волокон композиту [28]. Але клейові з'єднання чутливі до порушень технологічного процесу склеювання. Будь-які порушення технології, наприклад недостатня обробка поверхонь склеювання, порушення температури й часу склеювання, порушення рецептури або придатності клею, недостатнє стискання поверхонь при склеюванні тощо, можуть значно зменшити міцність з'єднання або знизити його ресурс.

Зазвичай з'єднуються елементи конструкції плоскої форми. Це зумовлено необхідністю забезпечити малу товщину клейового шару між поверхнями, щоб гарантувати високу міцність клею. А плоскі поверхні обробити із заданою точністю значно простіше, ніж криволінійні.

Руйнування з'єднань зазвичай відбувається у формі руйнування клейового шару. Досвід показує, що тріщина може поширюватися або всередині клейового шару, або по межі клею зі склеюваною поверхнею. Останній випадок свідчить про низьку адгезію поверхні з клеєм. Руйнування з'єднань шаруватих композитів в умовах слабкого зв'язку між шарами композиту може відбуватися у формі розшарування композиту й відриву окремих шарів [29].

Основними факторами, які впливають на міцність з'єднань внапуск, є властивості матеріалів, що з'єднуються, і клею та геометрія з'єднання (товщина з'єднання та клейового шару, довжина напуску). Слід також урахувати залишкові внутрішні напруження внаслідок температурного впливу під час склеювання. Розподіл напружень у клейових з'єднаннях є нерівномірним (про це більш детально буде сказано нижче), тому середнє напруження зсуву (тобто навантаження, поділеного на площу з'єднання) може бути значно меншим за локальні максимальні напруження. Руйнування з'єднання завжди починається з області концентрації напружень, і тому важливо зменшити ці піки напружень, якщо потрібно покращити міцність з'єднання. Існують загальні рекомендації щодо підвищення міцності з'єднання шляхом мінімізації концентрації напружень [13, 29, 28, 150]:

- використання клею з низьким модулем пружності;
- використання однакових з'єднуваних елементів, або, якщо це неможливо, однакової жорсткості;
- зменшення згинального моменту в з'єднанні;
- використання тонкого клейового шару;
- використання великої площі склеювання.

Міцність з'єднання можна додатково підвищити, використовуючи напливи клею, фаски та більш еластичний клей уздовж межі напуску або застосовуючи гібридні з'єднання. Огляд цих конструктивних рішень буде наведено нижче.

Загалом, склеювання – це сучасний спосіб з'єднання, який застосовується в тому числі при виробництві конструкцій із нових композитних матеріалів. Гнучкість технології склеювання дає змогу створювати високонавантажені конструкції складної форми. Розвиток хімії полімерів, а також технологій 3D-друку і методів топологічної оптимізації відкриває нові можливості щодо створення високоефективних конструкцій аерокосмічної техніки. Існує багато напрямів підвищення міцності клейових з'єднань, і тому можна стверджувати, що можливості склеювання ще далеко не вичерпані і ми ще побачимо нові матеріали, нові технології склеювання й нові конструктивні рішення з'єднань.

Розділ 1

ОСНОВИ МЕХАНІКИ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК.

МОДЕЛІ ФОЛЬКЕРСЕНА І ГОЛАНДА – РЕЙССНЕРА.

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРАЮ КЛЕЙОВОГО ШАРУ

1.1. Особливості напруженого стану клейового шару в з'єднанні

Розглянемо з'єднання двох однакових пластин, яке зображено на рис. 1.1.1. З'єднання навантажене поздовжнім зусиллям F . Довжина з'єднання $2L$. Вісь x спрямована вздовж з'єднання.

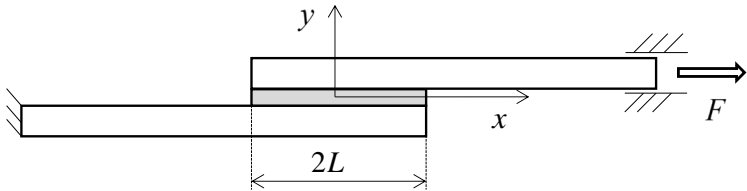


Рис. 1.1.1. Схема типового з'єднання

Клейовий шар позначено сірим кольором. Зазвичай клейовий шар є відносно тонким (завтовшки $0,01..0,1$ мм) і тому може розглядатися не як двовимірний континуум, а як одновимірний об'єкт. Різні компоненти тензора напружень у клейовому шарі відрізняються один від одного на кілька порядків. Найбільш великими за модулем з них є τ_{xy} і σ_y . Іншими компонентами тензора напружень зазвичай можна знехтувати. Напруження τ_{xy} і σ_y залежать як від поздовжньої координати x , так і від поперечної координати y в межах клейового шару. Але, як було вище зазначено, можна припустити, що внаслідок малої товщини клейового шару ці напруження розподілені по товщині рівномірно. Ця гіпотеза є найбільш простою, але вона дає змогу побудувати аналітичні моделі напруженого стану й оцінити ступінь напружень і виявити основні особливості розподілу напружень у з'єднанні. Уводячи інші гіпотези,

наприклад про лінійну залежність напружень у клейовому шарі по товщині, можна отримати більш точні, але водночас і більш складні математичні моделі напруженого стану з'єднання.

Розподіл напружень τ_{xy} і σ_y у симетричному з'єднанні, зображеному на рис. 1.1.1, є симетричним і має вигляд, показаний на рис. 1.1.2 [13, 28].

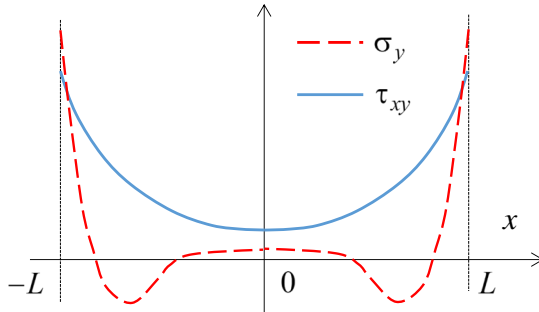


Рис. 1.1.2. Типовий розподіл дотичних τ_{xy} і нормальних σ_y напружень у симетричному з'єднанні внапуск

Як бачимо, найбільш навантаженими зонами клейового шару є його кінці, де спостерігається концентрація напружень. У симетричному з'єднанні обидва кінці клейового шару мають однакові напруження. Якщо ж склеюванні шари мають різну жорсткість на розтяг-стиск і на згин, то напружений стан на кінцях з'єднання буде різним.

Збільшення довжини з'єднання може дещо зменшити напруження у клейовому шарі, але (це важливо!) навіть у нескінченному з'єднанні біля кінців області склеювання напруження будуть суттєво відрізнятися від нуля, тоді як у середині з'єднання напруження будуть дорівнювати нулю. Отже, лише збільшуючи довжину з'єднання, неможливо позбавитися від концентрації напружень на краях області склеювання. На рис. 1.1.3 схематично показано розподіл напружень у з'єднанні завдовжки $2R$, де $R \rightarrow \infty$.

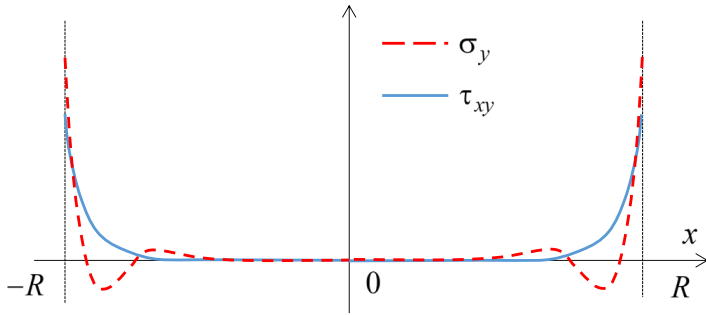


Рис. 1.1.3. Напруження у з'єднанні нескінченної довжини

Ще одне спостереження – нормальні напруження в клейовому шарі в цьому випадку мають такий же ступінь, що й дотичні. Але ми можемо вибрати різні конструктивні рішення з'єднань, які дають змогу мінімізувати нормальні напруження. Нормальні напруження в напрямку відриву зумовлені згином з'єднання, який своєю чергою, є наслідком ексцентриситету доданого навантаження (див. рис. 1.1.1). Але навіть у збалансованому з'єднанні (наприклад, двосторонньому симетричному) неможливо повністю позбавитися від нормальних напружень. Це зумовлено тим фактом, що дотичні навантаження з боку клейового шару діють на зовнішню поверхню шару (яка віддалена від нейтральної осі) і спричиняють тим самим згинання. Це згинання парирується нормальними напруженнями з боку клейового шару (рис. 1.1.4).

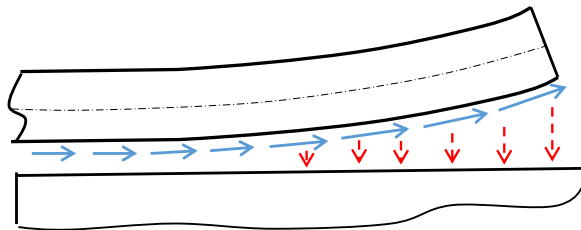


Рис. 1.1.4. Вигин зовнішнього шару внаслідок дії дотичних напружень

Як було зазначено вище, за більшістю математичних моделей напруженого стану з'єднань дотичні напруження у клейовому шарі мають

максимуми на його межі. І це збігається з практичним досвідом, який свідчить про те, що руйнування з'єднання починається з його краю. Але, з іншого боку, це суперечить закону парності дотичних напружень. Клейовий шар має вільну від навантаження зовнішню межу, де дотичні напруження дорівнюють нулю! На рис. 1.1.5 позначено область, де порушується закон парності дотичних напружень.

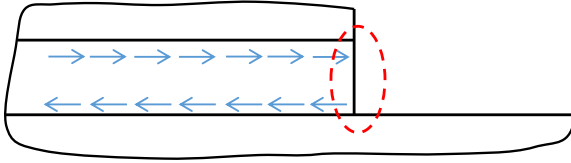


Рис 1.1.5. Проблемна область біля краю клейового шва

Для усунення вказаної суперечності у математичних моделях застосовуються різні підходи, у т. ч. моделювання клейового шару двовимірним пружним континуумом [96, 99]. На жаль, такий підхід є достатньо громіздким і в інженерній практиці неприйнятним. Інший підхід – це вдосконалення одновимірної моделі завдяки відмові від гіпотези про рівномірний розподіл нормальних напружень по товщині клейового шару. У цьому випадку для опису напруженого стану клейового з'єднання використовуються не дві, а три функції: τ_{xy} , $\sigma_y^{(1)}$ і $\sigma_y^{(2)}$. Тут $\sigma_y^{(1)}$ і $\sigma_y^{(2)}$ – нормальні напруження на верхній і нижній поверхнях клейового шару, які межують із пластинами, що з'єднуються. Розподіл же дотичних напружень по товщині клейового шару зазвичай вважають рівномірним, бо це добре узгоджується з результатами скінченно-елементного моделювання та фізичних експериментів. Зв'язок між нормальними напруженнями може постулюватися декількома способами. Наприклад, може розглядатися лінійна залежність нормальних напружень по товщині [139]. Ще один напрям удосконалення моделі напруженого стану клейового шару – застосування двопараметричної моделі пружної основи для опису напружень у клейовому шарі [128].

Типові графіки τ_{xy} , $\sigma_y^{(1)}$ і $\sigma_y^{(2)}$ біля краю з'єднання показано на рис. 1.1.6.

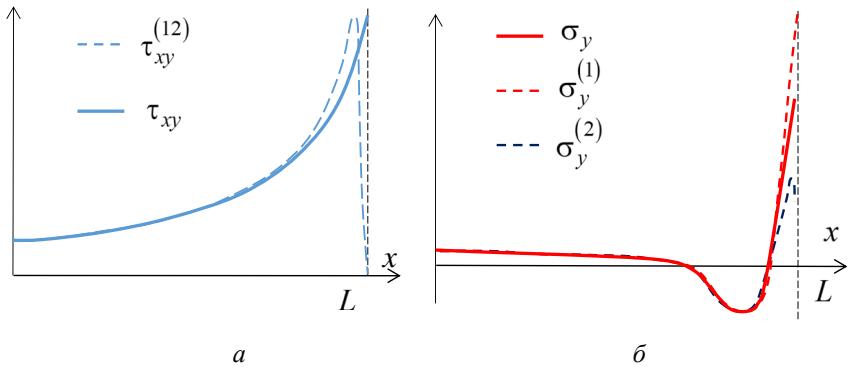


Рис. 1.1.6. Дотичні (а) і нормальні (б) напруження біля краю шва за різними моделями

Як бачимо, більш складні математичні моделі дають змогу усунути суперечності і задовольнити умову рівності нулю дотичних напружень на краю клейового шва. При цьому дотичні напруження, розраховані за класичною моделлю τ_{xy} і за вдосконаленою $\tau_{xy}^{(12)}$, різняться лише в малій області (завдовжки 2-3 товщини клейового шару) біля краю шва. За вдосконаленою моделлю дотичні напруження набувають максимуму на відстані близько однієї товщини клейового шару від його краю. Але значення максимальних дотичних напружень за двома моделями відрізняються одне від одного мало. Нормальні напруження також на більшій частині довжини з'єднання збігаються, відрізняючись лише в тій самій області біля краю шва. Але при цьому $\sigma_y^{(1)}$ і $\sigma_y^{(2)}$ можуть відрізнитися одне від одного навіть знаком, а максимальне з них значно перевищує нормальні напруження, що розраховані із міркувань про рівномірний розподіл напружень по товщині клейового шару.

Ці результати добре узгоджуються як із результатами фізичних експериментів, у т. ч. з траєкторією руху тріщини в клейовому шарі при його руйнуванні, так і з числовими розрахунками (рис. 1.1.7).

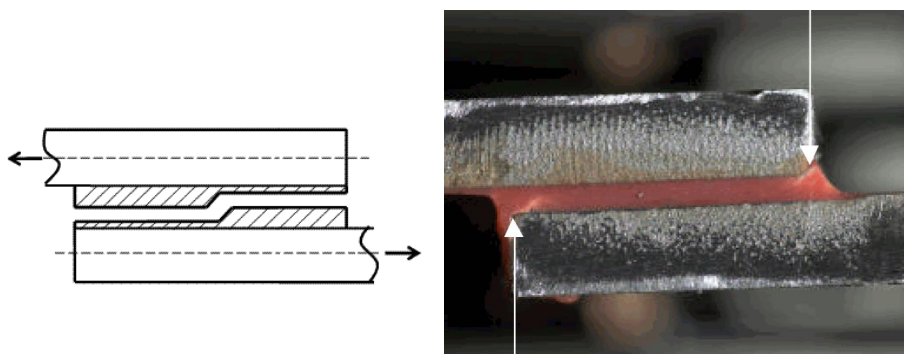


Рис. 1.1.7. Схема руйнування клейового шару

Різниця в значеннях нормальних напружень, що є наслідком вільної межі клейового шару, і великі значення нормальних напружень у клейовому шарі при цьому спонукають конструкторів шукати конструктивні рішення, спрямовані на зменшення концентрації напружень біля краю з'єднання.

Індекси напрямків напружень зазвичай опускають, вважаючи що дотичні напруження у з'єднанні це саме τ_{xy} , не вказуючи напрямок, тобто $\tau = \tau_{xy}$. Так само оперують нормальними напруженнями в з'єднанні, не вказуючи напрямок, маючи на увазі саме відривні напруження $\sigma = \sigma_y$.

1.2. Конструктивні заходи щодо зменшення напружень у клейовому шарі та підвищення несної здатності з'єднань внапуск

Особливості напруженого стану з'єднань внапуск, розглянуті в попередньому підрозділі, стосуються з'єднань шарів постійної товщини, у яких товщина клейового шару також є постійною. Вочевидь, існує можливість надати іншої форми елементам конструкції, змінити внутрішню структуру композиту та змінити пружні властивості елементів з'єднання і тим самим вплинути на розподіл напружень у з'єднанні таким чином, щоб зменшити

концентрацію напружень у ньому і тим самим підвищити несну здатність з'єднання.

Розглянемо основні заходи щодо підвищення несної здатності з'єднань:

1. Застосування симетричних двозрізних з'єднань або з'єднань, позбавлених ексцентриситету сил при передаванні зусиль [5, 13] (рис. 1.2.1).

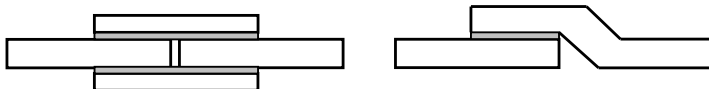


Рис. 1.2.1. Конструктивні рішення, спрямовані на зменшення згинальних моментів у з'єднанні

2. Для більш рівномірного розподілу дотичних напружень у з'єднанні товщина з'єднуваних шарів може змінюватися вздовж з'єднання.

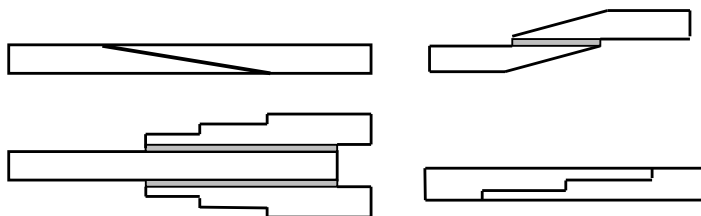


Рис. 1.2.2. Змінна товщина з'єднуваних шарів

З'єднання «на вус» (перше на рис. 1.2.2) забезпечує рівномірний розподіл напружень у з'єднанні й позбавляє його від ексцентриситету сил. Але недоліком такого з'єднання є важкість забезпечення точності виготовлення деталей, тому частіше з'єднання зі змінною товщиною реалізуються за другим варіантом; зображеним на рисунку [36]. З'єднання зі ступінчастим змінням товщини застосовуються при з'єднанні виробів із шаруватих композитів, шарувата структура яких унеможливує або ускладнює з'єднання «на вус» [122].

3. Керування властивостями й параметрами клейового шару може реалізовуватися у формі змінення товщини клейового шару по довжині з'єднання або у формі застосування двох і більше типів клею у з'єднанні. У цьому випадку більш жорсткий клей розташовується у середині з'єднання, а більш піддатливі – на його краях (рис. 1.2.3). Сучасні технології дають змогу також гнучко змінювати склад клею під час нанесення його на з'єднувані деталі [41, 90, 94, 100].

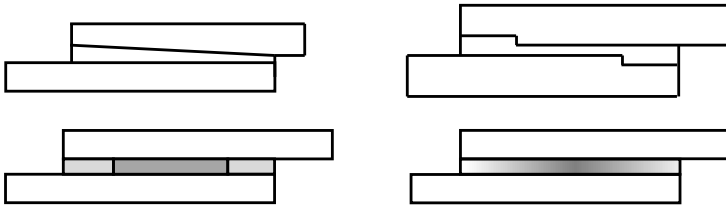


Рис. 1.2.3. Керування параметрами клейового шару

Застосування декількох видів клею в з'єднанні дає змогу збільшити не тільки несну здатність з'єднання, а і його теплостійкість.

4. Оскільки напруження в клейовому шарі набувають найбільших значень на кінцях області склеювання, виправданим є застосування конструктивно-технологічних заходів щодо саме цих невеликих зон без змінення параметрів з'єднання на більшій його площині. Такими заходами можуть бути фаски різного розміру [36], напливи клею [40], виточки тощо (рис. 1.2.4).

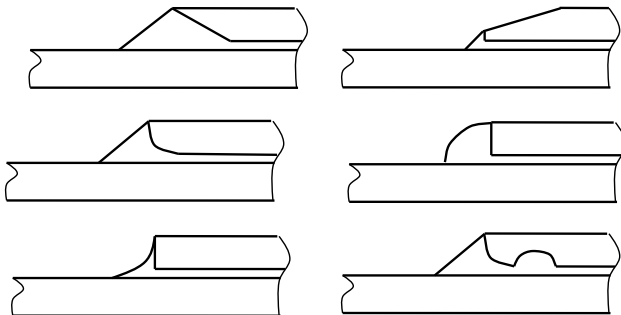


Рис. 1.2.4. Деякі варіанти оформлення кінців з'єднання

5. Застосування додаткових механічних з'єднувальних елементів. Цей захід може бути реалізований у формі комбінованих клеєболтових або клеєзаклепкових з'єднань або у формі мікроштифтового з'єднання [150]. В останньому випадку металева накладка, що приєднується до композитної деталі, містить мікроштифти, які на етапі формування вдавлюються у ще м'який композит. Наявність поперечних зв'язків підвищує міцність з'єднання на відрив.

1.3. Найпростіші класичні математичні моделі напруженого стану з'єднань внапуск

1. Модель рівномірних дотичних напружень

За цією найпростішою моделлю розподіл напружень у з'єднанні вважається рівномірним по довжині, тобто

$$\tau = \frac{F}{2L},$$

де F – додане навантаження, Н/м; $2L$ – довжина з'єднання.

Схему деформування з'єднання та графік розподілу дотичних напружень показано на рис. 1.3.1.

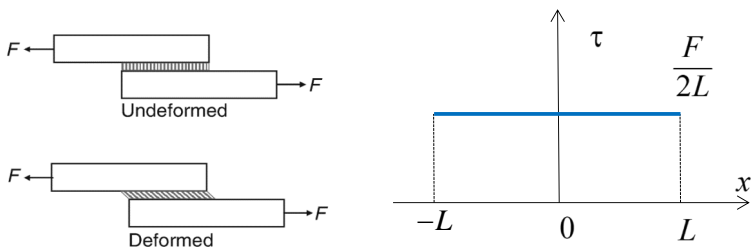


Рис. 1.3.1. Напруження в з'єднанні з рівномірним розподілом

Такий спосіб знаходження напружень є найпростішим і має достатньо обмежену область застосування. Він дає лише приблизну оцінку напружень у з'єднанні і може бути застосованим при суттєвих обмеженнях – для з'єднань малої довжини або за умов пружно-текучої поведінки клею.

Напруження, розраховані за цією моделлю можна інтерпретувати як середнє значення дотичних напружень у з'єднанні.

2. Модель Фолькертена (модель дотичних напружень)

1938 року було запропоновано математичну модель напруженого стану з'єднання внапуск, яка дала змогу висвітлити концентрацію напружень у з'єднанні біля кінців клейового шва [126]. За цією моделлю з'єднані шари моделюються пружними стрижнями, а клейовий шар – пружиною зсуву. Схему деформування з'єднання показано на рис. 1.3.2, *a*. Диференціальний елемент з'єднання зображено на рис 1.3.2, *б*.

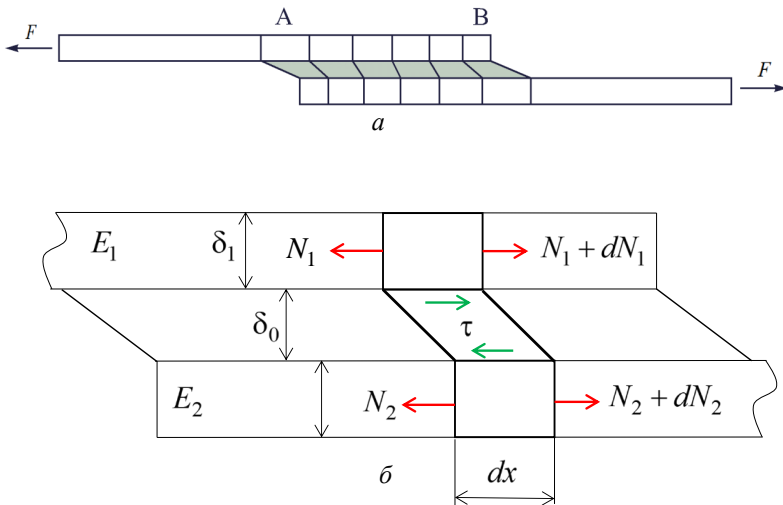


Рис. 1.3.2. Модель Фолькертена: *a* – схема деформування; *б* – рівновага диференціального елемента з'єднання

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$\frac{dN_1}{dx} + \tau = 0, \quad \frac{dN_2}{dx} - \tau = 0.$$

Напруження у клейовому шарі визначаються за формулою

$$\tau = G_0 \gamma = G_0 \frac{U_2 - U_1}{\delta_0},$$

де U_1, U_2 – поздовжні переміщення з'єднаних шарів; G_0 – модуль зсуву клею; δ_0 – товщина клейового шару.

Зусилля у несних шарах визначають так:

$$N_1 = E_1 \delta_1 \frac{dU_1}{dx}, \quad N_2 = E_2 \delta_2 \frac{dU_2}{dx}.$$

Систему наведених рівнянь можна звести до диференціального рівняння відносно дотичних напружень у клейовому шарі:

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{1}{E_1 \delta_1} + \frac{1}{E_2 \delta_2} \right) \tau = 0.$$

Розв'язок цього рівняння можна подати, наприклад, у такому вигляді:

$$\tau = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x, \quad \text{де } \lambda = \sqrt{\frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{1}{E_1 \delta_1} + \frac{1}{E_2 \delta_2} \right)},$$

де C_1, C_2 – константи, які знаходять із крайових умов. Для цього треба інтегрувати τ , знайти $N_1(x)$ і $N_2(x)$ і забезпечити виконання умов на кінцях з'єднання.

Детальний аналіз наведених формул дає можливість зробити такі важливі висновки:

- дотичні напруження набувають максимальних значень на краях клейового шва;
- збільшення довжини з'єднання не усуває концентрації напружень на кінцях області склеювання;
- при передаванні зусиль з одного шару на інший значення максимумів дотичних напружень на обох кінцях з'єднання будуть однаковими при

умові $E_1\delta_1 = E_2\delta_2$. Відмінність у жорсткості шарів призведе до того, що напруження біля одного з кінців з'єднання будуть більшими, ніж біля іншого, тобто концентрація напружень зросте ще більше;

- чим менше значення λ , тим більш рівномірним є розподіл напружень у з'єднанні, у випадку $\lambda = 0$ маємо рівномірний розподіл напружень. Щоб зменшити λ , необхідно застосовувати піддатливий клей (чим менше модуль зсуву G_0 , тим краще), збільшувати товщину клейового шару δ_0 і з'єднувати шари великої жорсткості ($\frac{1}{E_1\delta_1} \rightarrow 0, \frac{1}{E_2\delta_2} \rightarrow 0$).

Можна помітити, що висновок про краще значення великої товщини клейового шару суперечить оголошеній вище рекомендаційній тезі про перевагу малих значень товщини клейового шару. Це зумовлено насамперед тим, що границя міцності клею суттєво залежить від товщини клейового шару. Чим менше товщина, тим міцніше клей.

У моделі Фолькерсена не враховуються згинання конструкції й нормальні напруження в клейовому шарі. Крім того, за моделлю Фолькерсена розподіл деформацій по товщині з'єднаних шарів уважається рівномірним, що призводить до певного завищення значень дотичних напружень порівняно з реальними значеннями, особливо в області кінців з'єднання [28, 32].

3. Модель Голанда – Рейсснера (балкова модель, зсув та відрив)

1944 року було запропоновано більш досконалу модель напруженого стану клейового з'єднання, яка й сьогодні є актуальною і є основою для створення нових більш досконалих (але водночас і більш складних) математичних моделей [44].

За моделлю Голанда – Рейсснера склеюванні шари розглядаються як балки у наближенні Бернуллі, а клейовий шар – як пружина зсуву та розтягу-стиску (пружна основа Вінклера). У цій моделі враховуються вигин несних шарів і відривні напруження в клейовому шарі. За сукупністю гіпотез модель

достатньо близька до класичних моделей тришарових балок. Відмінність полягає в тому, що в моделі тришарової балки поперечні переміщення всіх шарів вважаються однаковими. Ця гіпотеза спрощує модель і добре описує напружений стан конструкції в регулярній зоні, на віддаленні від кріплень шарів. Але з'єднання зазвичай є достатньо короткими, а несні шарі мають різні крайові умови, тому що з'єднання найчастіше має забезпечити передавання зусиль з одного шару на іншій. Тому моделювання напруженого стану з'єднань потребує більш складних моделей, ніж моделі тришарових балок.

На рис. 1.3.3 показано диференціальний елемент з'єднання та діючі на нього силові фактори.

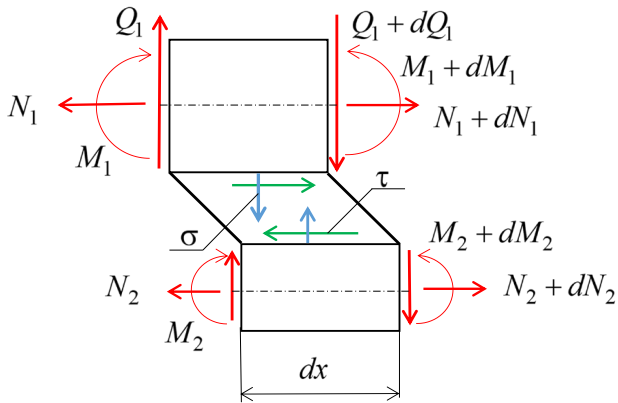


Рис. 1.3.3. Рівновага диференціального елемента з'єднання

Рівняння рівноваги несних шарів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \tau &= 0, & \frac{dN_2}{dx} - \tau &= 0; \\ \frac{dQ_1}{dx} + \sigma &= 0, & \frac{dQ_2}{dx} - \sigma &= 0; \\ \frac{dM_1}{dx} - Q_1 + s_1\tau &= 0, & \frac{dM_2}{dx} - Q_2 + s_2\tau &= 0, \end{aligned}$$

де s_1, s_2 – відстані від зовнішньої поверхні несного шару, що межує з клейовим шаром, до нейтральної осі (якщо структура несного шару – однорідна або симетрична, то $s_1 = \frac{\delta_1}{2}, s_2 = \frac{\delta_2}{2}$).

Напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці поздовжніх переміщень сторін несних шарів обернених до клейового шару. Ці поздовжні переміщення зовнішніх шарів складаються із поздовжніх переміщень нейтральної осі U_1, U_2 та переміщень, зумовлених поворотом перерізу несного шару внаслідок його поперечних переміщень W_1, W_2 :

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left(U_2 - U_1 + s_1 \frac{dW_1}{dx} + s_2 \frac{dW_2}{dx} \right).$$

Поперечні переміщення залежать лише від різниці поперечних переміщень несних шарів

$$\sigma = \frac{E_0}{\delta_0} (W_2 - W_1),$$

де E_0 – модуль пружності клейового шару.

Ці рівняння доповнюються рівняннями теорії стрижнів

$$N_1 = B_1 \frac{dU_1}{dx}, \quad N_2 = B_2 \frac{dU_2}{dx};$$

$$M_1 = D_1 \frac{d^2 W_1}{dx^2}, \quad M_2 = D_2 \frac{d^2 W_2}{dx^2},$$

де B_1, B_2 – жорсткості шарів (стрижнів) на розтяг-стиск (якщо матеріали є однорідними, то $B_1 = E_1 \delta_1, B_2 = E_2 \delta_2$); D_1, D_2 – жорсткості на згин (якщо матеріали шарів є однорідними, то $D_1 = \frac{E_1 \delta_1^3}{12}, D_2 = \frac{E_2 \delta_2^3}{12}$).

Систему цих рівнянь можна звести до системи двох диференціальних рівнянь відносно напружень у клейовому шарі:

$$\begin{cases} \frac{d^3 \tau}{dx^3} + \alpha_1 \frac{d\tau}{dx} + \alpha_2 \sigma = 0, \\ \frac{d^4 \sigma}{dx^4} + \beta_1 \sigma + \beta_2 \frac{d\tau}{dx} = 0. \end{cases}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{s_2^2}{D_2} + \frac{s_1^2}{D_1} - \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right), \quad \alpha_2 = \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{s_1}{D_1} - \frac{s_2}{D_2} \right),$$

$$\beta_1 = -\frac{E_0}{\delta_0} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right), \quad \beta_2 = \frac{E_0}{\delta_0} \left(\frac{s_2}{D_2} - \frac{s_1}{D_1} \right).$$

Зазначимо, що якщо з'єднуються однакові шари, то $\alpha_2 = 0$ і $\beta_2 = 0$, унаслідок чого система розпадається на два незалежних рівняння, розв'язок яких – тривіальний. Знайшовши аналітичний розв'язок цієї системи двох диференціальних рівнянь, можна легко знайти зусилля в несних шарах, згинальні моменти й переміщення. Дванадцять констант, що виникають при розв'язанні системи диференціальних рівнянь та інтегруванні, визначаються відповідною кількістю крайових умов. До крайових умов належать умови спряження з'єднання з продовженнями несних шарів, які розглядаються як балки. Таким чином, на відміну від моделі Фолькерсена, на напружений стан з'єднання в цьому випадку впливає деформування всієї конструкції, у т. ч. і за межами області склеювання. Схематично це зображено на рис. 1.3.4, де показано схеми з'єднання до і після навантаження.

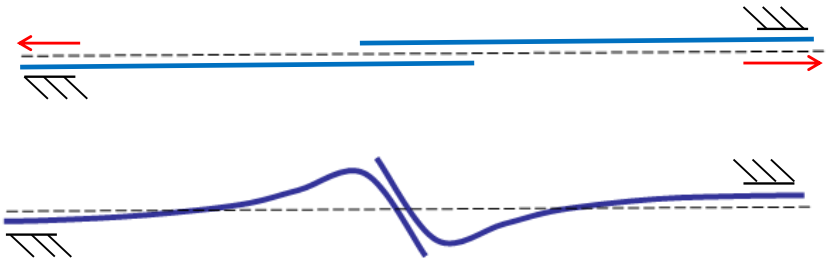


Рис. 1.3.4. Деформування з'єднання при розтягуванні

Вочевидь, крайові умови на кінцях стрижнів і довжина стрижнів впливають на напружений стан клейового шару. Наприклад, у випадку шарнірного, а не зображеного на рисунку ковзного, закріплення кінців поперечні переміщення стрижнів зростають, що, своєю чергою, впливає на напруження в клейовому шарі. Симетричні з'єднання, де поперечних переміщень немає, дають змогу розглядати лише окіл з'єднання.

4. Подальший розвиток одновимірних математичних моделей з'єднань

Подальший розвиток спрямовано на уточнення математичних моделей кожного з елементів з'єднання:

- застосування моделі балки Тимошенко для моделювання напружено-деформованого стану несних шарів [77, 87, 139] є доцільним у випадку низьких значень модуля зсуву шарів у трансверсальному напрямку, що є характерним для шаруватих композитів;
- уточнення моделі напруженого стану клейового шару, наприклад, урахування нерівномірності розподілу напружень по товщині шару [5, 6, 139] або опис клейового шару як двовимірного континууму [96, 99];
- уточнення рівнянь рівноваги, на яких базується модель напруженого стану. Наприклад, клейові напруження можуть уважатися такими, що діють не на межі клейового шару із несними шарами, а в серединній поверхні клейового шару. У формулу дотичних напружень клейового шару може бути додано доданок, що відповідає за напруження, зумовлені зсувом у вертикальному напрямку [86, 131]. У наведених нижче математичних моделях зсув зосереджений лише в клейовому шарі, тоді як і несні шари також піддаються зсуву. Для врахування цього ефекту формула розрахунку жорсткості клейового шару на зсув G_0 / δ_0 , яка дає завищені результати, може бути скорегована з урахуванням товщини з'єднуваних шарів та їх жорсткості на зсув;

- у формули закону Гука (Robert Hooke) можуть додаватися складові, що відповідають за температурне розширення або інші дилатаційні ефекти (наприклад, набухання під час знаходження конструкції у воді або в іншій рідині) [78];
- узагальнення математичних моделей на ступінчасті з'єднання, на з'єднання, у яких використовується більше одного типу клею, на з'єднання із порушеннями суцільності клейового шару (по всій ширині з'єднання, щоб модель залишилась одновимірною);
- уточнення напруженого стану конструкції шляхом урахування фізичної нелінійності насамперед стосується врахування нелінійної залежності напружень від деформацій у клейовому шарі. Існує широкий спектр пружних властивостей клеїв. Крім того, пружні властивості рідких клеїв можна змінювати, додаючи до складу клею пластифікатори або модифікатори. Пластична деформація клею в навантажених зонах спричиняє перерозподіл напружень від кінців області склеювання до внутрішньої менш навантаженої області. З часом стає можливою релаксація напружень унаслідок повзучості клею. Обидва ефекти показано на рис. 1.3.5 на прикладі дотичних напружень у клейовому шарі;

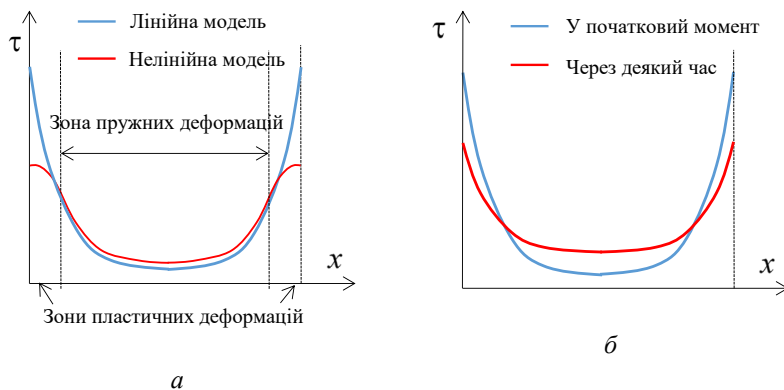


Рис. 1.3.5. Нелінійні ефекти в з'єднанні: *а* – вплив пластичних деформацій у клейовому шарі; *б* – релаксація напружень унаслідок повзучості клею

- наведені вище лінійні моделі описують напружено-деформований стан з'єднання із задовільною точністю лише в умовах малих переміщень. Якщо ж переміщення при навантаженні є великими, то це потребує застосування геометрично нелінійних рівнянь деформування балок. Крім того, у наведених формулах з розрахунку напруженого стану в клейовому шарі не враховується його стиснення. Геометрично нелінійні моделі описують напружено-деформований стан з'єднання за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь, що не мають аналітичних розв'язків і потребують застосування числових методів розв'язання.

1.4. Інші типи з'єднань (огляд)

1. З'єднання труб

Клейове з'єднання є дуже зручним для склеювання труб. Навантаження найчастіше може бути осьовим або крутильним. У разі осьового навантаження на кінцях напуску виникають концентрації напружень, як і в плоских з'єднаннях внапуск. Але на відміну від плоских з'єднань вигин в цьому випадку частково парирується коловими напруженнями в трубах. З іншого боку, деформація труб в осьовому напрямку спричиняє зміння діаметра труб унаслідок ефекту Пуассона. Існують аналітичні моделі напруженого стану з'єднання, у яких ураховуються напруження й деформації в трубах в осьовому й коловому напрямках [2, 15, 34, 37, 76, 93].

Забезпечити необхідну малу товщину клейового шару в трубчастому з'єднанні складніше, ніж в плоскому, де достатньо просто стиснути з'єднання заданим тиском. Тому частіше поверхням з'єднання надають форми конусів [29] (рис. 1.4.1).

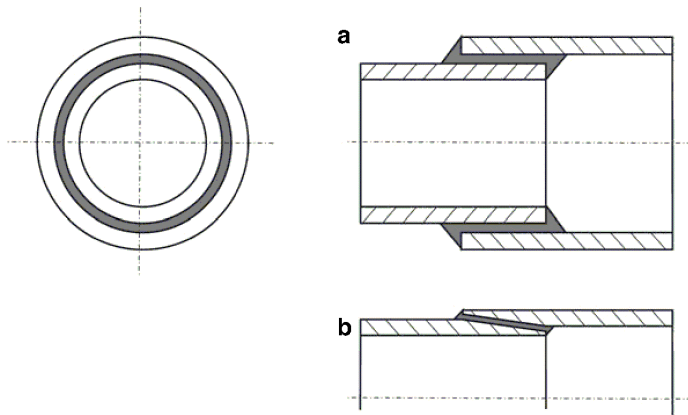


Рис. 1.4.1. З'єднання труб: *a* – циліндричне; *b* – конічне

На рис 1.4.2 зображено деякі циліндричні з'єднання, що зазвичай використовуються в прутках і трубах. Ці рішення є переважними порівняно зі стиковими з'єднаннями, оскільки виходить більша площа з'єднання та зменшуються напруження відриву. Однак більшість рішень, показаних на рис 1.4.2, потребують важкого механічного оброблення, що, очевидно, підвищує вартість конструкції.

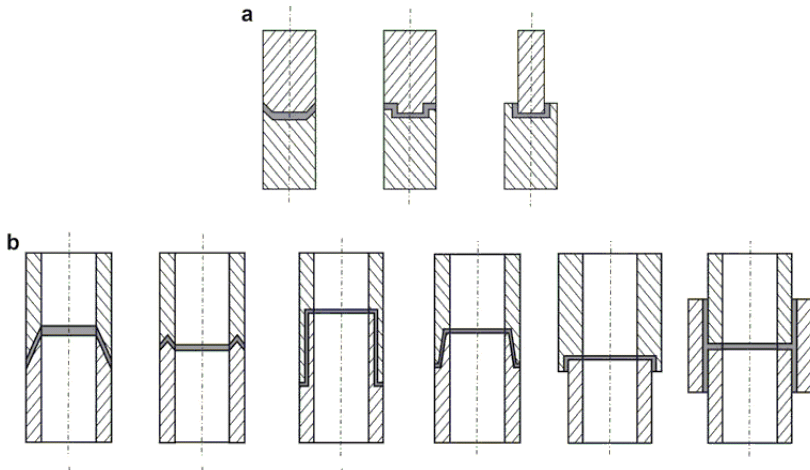


Рис. 1.4.2. Циліндричні з'єднання: *a* – стрижнів; *b* – труб

2. Кутові та Т-подібні з'єднання

З'єднання плоских елементів конструкції у вигляді букви «Т» застосовується, наприклад, при підсиленні обшивки поздовжніми несними елементами (стрингерами). Зусилля, якими навантажено трансверсальний елемент, можна розкласти на дві компоненти, одна з яких є паралельною до основної пластини (T), а інша – перпендикулярною до неї (N). Різні конструктивні рішення з'єднань краще або гірше сприймають ці навантаження (рис. 1.4.3).

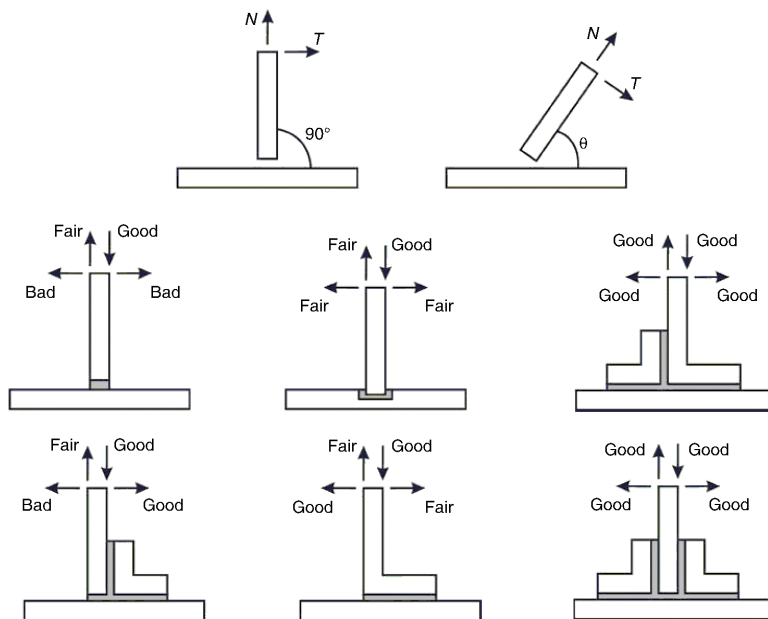


Рис. 1.4.3. Конструктивні рішення Т-подібних з'єднань

Кутові з'єднання можна розглядати як окремий випадок Т-подібного з'єднання. На рис. 1.4.4 показано деякі конструктивні рішення цих з'єднань і вказано напрямки можливого навантаження із зазначенням, добре чи погано працює з'єднання в цьому напрямку [29].

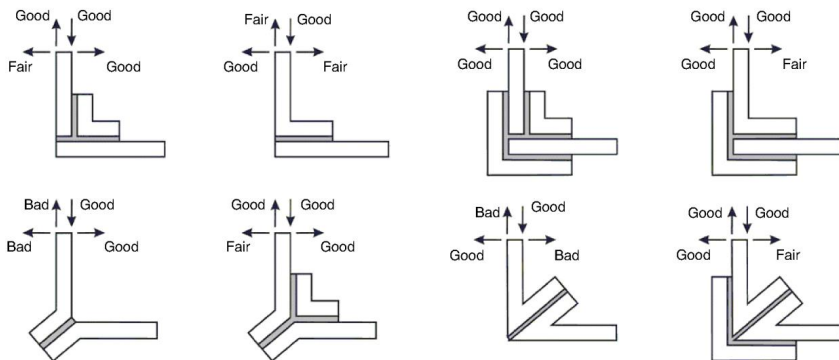


Рис. 1.4.4. Кутлові з'єднання

Висновки за розділом

1. Існує значна кількість конструктивних рішень з'єднань і заходів щодо зниження напружень у клейовому шарі, які можна комбінувати, створюючи нові типи конструкцій.

2. Показано, що біля краю з'єднання внапуск спостерігається концентрація напружень. На величину напружень у з'єднанні впливає багато факторів: розміри конструкції, пружні властивості матеріалів, конструктивні рішення тощо.

3. Напружений стан клейового шару в найбільш навантаженій області, біля краю з'єднання, є складним, а його визначення потребує застосування достатньо розвинених математичних моделей, які є значно складнішими, ніж класичні моделі стрижнів і балок. Основною проблемою є коректний опис напружено-деформованого стану клейового шару.

4. Розвиток наявних математичних моделей напруженого стану з'єднань внапуск може відбуватися в декількох напрямках, серед яких збільшення розмірності моделей, застосування нових моделей напруженого стану клейового шару тощо.

Розділ 2

УДОСКОНАЛЕНІ ОДНОВИМІРНІ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З'ЄДНАНЬ

Розглядаються розвинені математичні моделі напруженого стану з'єднань, які хоча і є одновимірними, але дають змогу дослідити напружений стан з'єднань у багатошаровому з'єднанні та з високою точністю описати напружений стан у найбільш навантаженій зоні – біля краю клейового шва. Також наведено нові математичні моделі напруженого стану з'єднань циліндричної та кільцевої форми, що зводяться до одновимірних моделей. Застосування нових підходів дає змогу визначити критерій міцності клею в умовах складного напруженого стану.

2.1. Узагальнення моделі Голанда – Рейсснера на довільну кількість шарів

Узагальнення теорії з'єднань Голанда – Рейсснера на довільну кількість шарів обумовлено двома причинами. З одного боку, збільшення кількості поверхонь склеювання в рази зменшує навантаження на один клейовий шар і, отже, напруження в клеї, тим самим підвищуючи міцність з'єднання. І застосування багатозрізних з'єднань може підвищити несну здатність конструкції. З іншого боку, вивчення напруженого стану з'єднань шаруватих КМ потребує створення моделей з'єднань, що враховують багатошарову будову композитів.

Про це свідчать результати експериментів [42, 133] та досвід експлуатації з'єднань багатошарових композитів [29], згідно з якими одним із механізмів руйнування з'єднань є розшарування композиту по з'єднувальному шару та відрив шарів (рис. 2.1.1).

Недолік числових підходів, що базуються на дискретизації конструкції [150, 160], полягає в тому, що КМ моделюється системою паралельних стрижнів, які працюють тільки на розтяг-стиск і розділяються піддатливими

шарами. Міжшарові зв'язки в піддатливих шарах працюють лише на зсув. При цьому не враховуються нормальні напруження між шарами.



Рис. 2.1.1. Руйнування шаруватого КМ: *a* – розшарування композиту; *б* – відрив шару

Розвиток програмних комплексів комп'ютерної техніки дав змогу використовувати метод скінченних елементів (МСЕ) для дослідження напружено-деформованого стану з'єднань, урахуваючи шарувату структуру КМ [9, 73].

Для побудови моделі розглянемо багатшаровий стрижень, що складається з m окремих стрижнів, які розглядаються як балки Бернуллі. Балки зв'язані з'єднувальними шарами, що працюють тільки на зсув і розтяг-стиск у трансверсальному напрямку. Дотичні й нормальні напруження в з'єднувальних шарах вважаються пропорційними різниці поздовжніх і поперечних переміщень зовнішніх сторін стрижнів. У стрижнях діють поздовжні зусилля та згинальні моменти. Зусилля, що діють на елементи стрижня, зображено на рис. 2.1.2.

Запропонована модель близька до моделі, описаної в працях [150, 152–154]. Однак у цьому випадку дискретизація конструкції за поперечною координатою є наслідком фізичної структури композиту, а не результатом застосування методу скінченних різниць. Крім того, окремі шарі розглядаються як балки, що здатні працювати на згин, а не лише на розтяг-стиск.

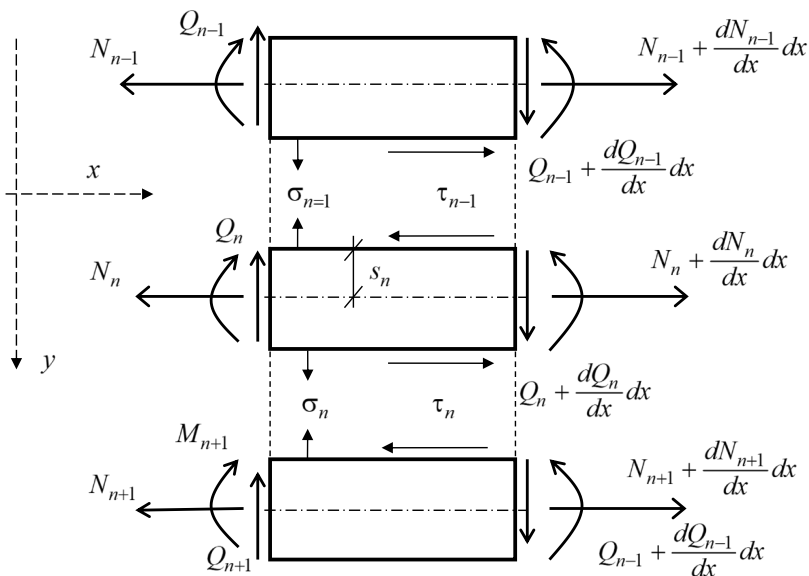


Рис. 2.1.2. Рівновага елементів багатошарового з'єднання

Зовнішні межі стрижнів з номерами 1 і m вважаються вільними від розподілених навантажень. Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \tau_1 = 0; \quad \frac{dN_n}{dx} - \tau_{n-1} + \tau_n = 0; \quad \frac{dN_m}{dx} - \tau_{m-1} = 0; \\ \frac{dQ_1}{dx} + \sigma_1 = 0; \quad \frac{dQ_n}{dx} - \sigma_{n-1} + \sigma_n = 0; \quad \frac{dQ_m}{dx} - \sigma_{m-1} = 0; \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\frac{dM_1}{dx} + s_1\tau_1 - Q_1 = 0; \quad \frac{dM_m}{dx} + s_m\tau_{m-1} - Q_m = 0; \quad \frac{dM_n}{dx} + s_n\tau_{n-1} + s_n\tau_n - Q_n = 0, \quad (2.1.2)$$

де $n=2,3,\dots,m-1$; N_n, Q_n, M_n – відповідно поздовжні, поперечні зусилля та погонний згинальний момент у стрижні n ; τ_n, σ_n – дотичні й нормальні напруження, що діють у з'єднувальному шарі n ; s_n – половина товщини стрижня n .

Напруження у з'єднувальних шарах

$$\tau_n = \frac{1}{P_n} \left(u_{n+1} - u_n + s_n \frac{dw_n}{dx} + s_{n+1} \frac{dw_{n+1}}{dx} \right), \quad \sigma_n = K_n (w_{n+1} - w_n), \quad (2.1.3)$$

де P_n – піддатливість з’єднувального шару на зсув, $P_n = \delta_n G_n^{-1}$; G_n – модуль зсуву відповідного з’єднувального шару; u_n , w_n – поздовжні й поперечні переміщення n -го стрижня; K_n – жорсткість відповідного з’єднувального шару на розтяг-стиск, $K_n = E_n^{(g)} \delta_n^{-1}$; $E_n^{(g)}$ – модуль пружності з’єднувального шару; δ_n – товщина з’єднувального шару.

Рівняння вигинання й розтягування стрижня мають вигляд

$$N_n = B_n \frac{du_n}{dx}; \quad M_n = -D_n \frac{d^2 w_n}{dx^2}; \quad (n=1, 2, \dots, m), \quad (2.1.4)$$

де B_n і D_n – відповідно жорсткості стрижня на розтяг-стиск і на вигин, $B_n = 2s_n E_n$, $D_n = E_n (2s_n)^3 / 12$; E_n – модуль пружності стрижня у поздовжньому напрямку.

Рівняння (2.1.1)–(2.1.4) зводяться до системи лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку відносно переміщень

$$\mathbf{A}^{(4)} \frac{d^4 \vec{\mathbf{X}}}{dx^4} + \mathbf{A}^{(2)} \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}^{(1)} \frac{d \vec{\mathbf{X}}}{dx} + \mathbf{A}^{(0)} \vec{\mathbf{X}} = 0, \quad (2.1.5)$$

де $\vec{\mathbf{X}} = (u_1, w_1, u_2, w_2, \dots, u_m, w_m)^T$; $\mathbf{A}^{(4)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(0)}$ – симетричні діагональні ($\mathbf{A}^{(4)}$) і тридіагональні матриці розміром $2m \times 2m$.

$$\mathbf{V}_{4,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_{2,n} = \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & -\frac{s_n^2}{P_n} - \frac{s_n^2}{P_{n-1}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}_{2,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s_n s_{n+1}}{P_n} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s_n}{P_n} - \frac{s_n}{P_{n-1}} \\ \frac{s_n}{P_n} - \frac{s_n}{P_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s_{n+1}}{P_n} \\ -\frac{s_n}{P_n} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{0,n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}} & 0 \\ 0 & K_n + K_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V}_{0,n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_n} & 0 \\ 0 & -K_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{k,1} & \mathbf{V}_{k,1} & & \dots \\ \mathbf{V}_{k,1}^T & \mathbf{W}_{k,2} & \mathbf{V}_{k,2} & \dots \\ & \mathbf{V}_{k,2}^T & \mathbf{W}_{k,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{V}_{k,m-1} \\ & & & \mathbf{V}_{k,m-1}^T & \mathbf{W}_{k,m} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_{4,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки шарів з номерами 0 і $m+1$ немає, то $P_0 = P_{m+1} = \infty$, $K_0 = K_{m+1} = 0$. Частинний розв'язок системи (2.1.5) шукаємо у вигляді $\vec{\mathbf{X}} = e^{\lambda x} \vec{\mathbf{h}}$, де $\vec{\mathbf{h}}$ – деякий вектор. Підставивши цей вираз у (2.1.5), отримаємо

$$\left(\mathbf{A}^{(4)} \lambda^4 + \mathbf{A}^{(2)} \lambda^2 + \mathbf{A}^{(1)} \lambda + \mathbf{A}^{(0)} \right) \vec{\mathbf{h}} = 0, \quad (2.1.6)$$

звідки впливає характеристичне рівняння

$$\det \mathbf{A}(\lambda) = 0, \quad (2.1.7)$$

де $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}^{(4)} \lambda^4 + \mathbf{A}^{(2)} \lambda^2 + \mathbf{A}^{(1)} \lambda + \mathbf{A}^{(0)}$.

Рівняння (2.1.7) має корінь $\lambda = 0$ кратності шість. Загальна кількість ненульових розв'язків рівняння (2.1.7) становить $6(m-1)$. Отже, загальний розв'язок системи (2.1.5) має вигляд

$$\vec{\mathbf{X}} = (u_1, w_1, \dots, u_m, w_m)^T = \sum_{k=1}^{6(m-1)} C_k \vec{\mathbf{h}}_k e^{\lambda_k x} + \sum_{n=0}^3 x^n \vec{\mathbf{H}}_n. \quad (2.1.8)$$

Вектори $\vec{\mathbf{h}}_k$ – нетривіальні розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\mathbf{A}(\lambda_k) \vec{\mathbf{h}}_k = 0.$$

Вектор $\vec{\mathbf{h}}_k$ визначається з точністю до довільного множника C_k , оскільки дефект матриці $\mathbf{A}(\lambda_k)$ при всіх коренях $\lambda_k \neq 0$ дорівнює одиниці.

Вектори $\vec{\mathbf{H}}_n$ містять шість констант інтегрування S_1, \dots, S_6 і можуть бути

подані, наприклад, у такому вигляді:

$$\bar{\mathbf{H}}_3 = S_1 \bar{\mathbf{I}}_1, \quad \bar{\mathbf{H}}_2 = S_2 \bar{\mathbf{I}}_1 + 3S_1 \bar{\mathbf{V}}_2, \quad \bar{\mathbf{H}}_1 = S_3 \bar{\mathbf{I}}_2 + S_4 \bar{\mathbf{I}}_1 - 2S_2 \bar{\mathbf{V}}_1,$$

$$\bar{\mathbf{H}}_0 = S_5 \bar{\mathbf{I}}_2 + S_6 \bar{\mathbf{I}}_1 - 6S_1 \bar{\mathbf{V}}_0 - S_4 \bar{\mathbf{V}}_1,$$

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = (0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1)^T; \quad \bar{\mathbf{I}}_2 = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0)^T;$$

$$R_{i,j} = -s_i - s_j + 2 \sum_{k=j}^i s_k, \quad (i > j), \quad \varphi_{i,j} = \begin{cases} R_{i,j} B_j, & i > j; \\ -R_{j-1,i} B_{j-1}, & i \leq j; \end{cases}$$

$$\xi_i = \sum_{k=2}^m \varphi_{i,k}, \quad \psi_i = \sum_{k=1}^i \sum_{j=i+1}^m R_{k,j} B_k B_j; \quad \theta_i = \sum_{k=1}^i P_k \psi_k; \quad \beta = \sum_{k=1}^m B_k;$$

$$\bar{\mathbf{V}}_2 = \beta^{-1} (\xi_1 \ 0, \ \xi_2 \ 0, \ \dots, \ \xi_m, \ 0)^T;$$

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = (0, \ 0, \ R_{1,2}, \ 0, \ R_{1,3}, \ 0, \ \dots, \ R_{1,m}, \ 0)^T;$$

$$\bar{\mathbf{V}}_0 = \beta^{-1} (0, \ 0, \ \theta_1, \ 0, \ \theta_2, \ 0, \ \dots, \ \theta_{m-1}, \ 0)^T.$$

Константи C_k , $k=1,2,\dots,6(m-1)$ і S_1, S_2, \dots, S_6 визначаються з $6m$ крайових умов. На кожному з двох кінців окремого стрижня задаються три крайові умови: поздовжнє переміщення або поздовжнє зусилля; поперечне переміщення, кут повороту, згинальний момент або поперечна сила. Урахування крайових умов приводить до системи лінійних рівнянь відносно перелічених констант, яку тут не наводимо.

Розглянемо клейове з'єднання багат шарового композиту з металевою закінцівкою. Багат шаровий композит розглядатимемо згідно з викладеною вище моделлю, а закінцівку – як однорідну балку. Метал має відносно високий модуль міжшарового зсуву, і модель балки добре описує напружений стан металевої закінцівки. Для певності вважатимемо, що композитний стрижень,

виконаний з вуглепластику, складається з десяти моношарів. А закінцівку вважатимемо виготовленою з алюмінію. Схему з'єднання зображено на рис. 2.1.3. Початок координат помістимо на межі області склеювання.

Очевидно, що якщо довжина композитного шару, що виступає за межі області склеювання L_1 , набагато перевищує його товщину, то відмінності в крайових умовах окремих стрижнів на кінці $x = L_1$ не впливають на напружений стан з'єднання, оскільки локальні неоднорідності напруженого стану швидко (експоненціально) згасають на віддаленні від кінця стрижня. Тому при дослідженні напружень в області з'єднання крайові умови для моношарів КМ на кінці $x = L_1$ є неважливими.

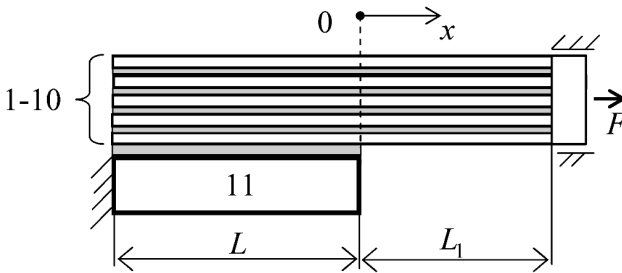


Рис. 2.1.3. Схема з'єднання

На ділянці $x \in (0, L_1)$ задача розв'язується для 10 шарів, а на ділянці склеювання – для 11 шарів.

Переміщення й зусилля в моношарах композиту за межами області склеювання ($x \in [0; L_1]$) позначимо u_n, w_n, N_n, Q_n, M_n , ($n=1, \dots, 10$), усередині області склеювання ($x \in [-L; 0]$) – $\bar{u}_n, \bar{w}_n, \bar{N}_n, \bar{Q}_n, \bar{M}_n$ ($n=1, \dots, 10$), а для закінцівки – $\bar{u}_{11}, \bar{w}_{11}, \bar{N}_{11}, \bar{Q}_{11}, \bar{M}_{11}$. Крайові умови мають такий вигляд:

$$\bar{N}_n(-L) = \bar{M}_n(-L) = \bar{Q}_n(-L) = 0;$$

$$\bar{u}_{11}(-L) = \bar{w}_{11}(-L) = \left. \frac{d\bar{w}_{11}}{dx} \right|_{x=-L} = 0; \quad \bar{N}_{11}(0) = \bar{M}_{11}(0) = \bar{Q}_{11}(0) = 0;$$

$$\bar{u}_n(0) = u_n(0); \quad \bar{w}_n(0) = w_n(0); \quad \bar{N}_n(0) = N_n(0); \quad N_n(L_1) = F_n;$$

$$\bar{M}_n(0) = M_n(0); \quad \bar{Q}_n(0) = Q_n(0); \quad w_n(L_1) = \left. \frac{dw_n}{dx} \right|_{x=L_1} = 0.$$

Довжини ділянок $L = 25$ мм і $L_1 = 100$ мм.

Властивості моношару вуглепластику візьмемо із роботи [9]:

$\delta = 0,28$ мм, тобто $s_n = \frac{\delta}{2} = 0,14$ мм, $E_0 = 141,6$ ГПа, $E_{90} = 10,7$ ГПа (тут нижні індекси 0 і 90 означають кут укладання моношару в градусах). Характеристики з'єднувального шару між моношарами вуглепластику: $\delta_n = 0,1$ мм, $G_n = 0,8$ ГПа, $E_n^{(g)} = 2,32$ ГПа. Загальна товщина пакета із десяти моношарів становить 3,71 мм. Характеристики алюмінієвої закінцівки: $\delta = 3$ мм ($s_{11} = 1,5$ мм), $E = 72$ ГПа. Параметри клейового шару між композитною балкою й алюмінієвою закінцівкою: $\delta = 0,25$ мм, $G = 0,9$ ГПа, $E = 2,65$ ГПа.

Для ілюстрації впливу структури композиту на напружений стан з'єднання розглянемо чотири модельні задачі:

I. Структура КМ: $[0]_{10} = 0/0/0/0/0/0/0/0/0/0$;

II. $[0/90]_5 = 0/90/0/90/0/90/0/90/0/90$;

III. $[90/0]_5 = 90/0/90/0/90/0/90/0/90/0$;

IV. $0/0/90/0/90/90/0/90/0/0$;

На рис 2.1.4 схематично зображено перелічені структури КМ.

Припустимо, що з'єднання навантажено поздовжнім розтягувальним погонним зусиллям F . Оскільки на віддаленні від правого краю балки напруження й переміщення швидко вирівнюються (згідно з принципом Сен-Венана) і на НДС з'єднання локальні особливості крайових умов не впливають, для простоти вважатимемо, що до кожного моношару композиту прикладено поздовжнє зусилля $F_n = 0,1 F$ Н/м.

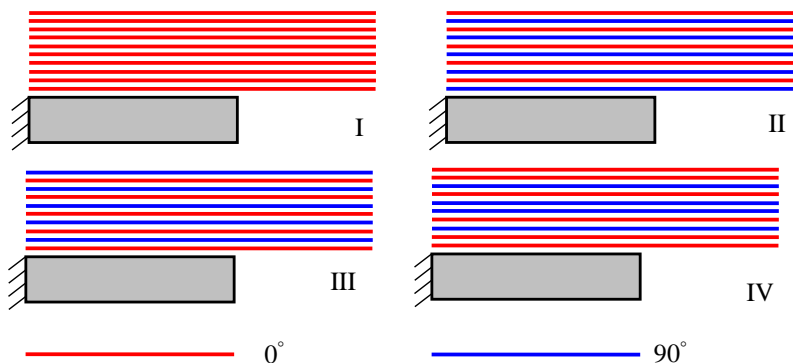


Рис. 2.1.4. Схеми укладання КМ

Відмінність між варіантами II і III полягає в тому, що в першому випадку до закінцівки приклеюється шар з кутом армування 0° , а в другому – 90° .

Дотичні напруження τ_n у з'єднувальних шарах композиту в околі області з'єднання та в клейовому шарі зображено на рис. 2.1.5.

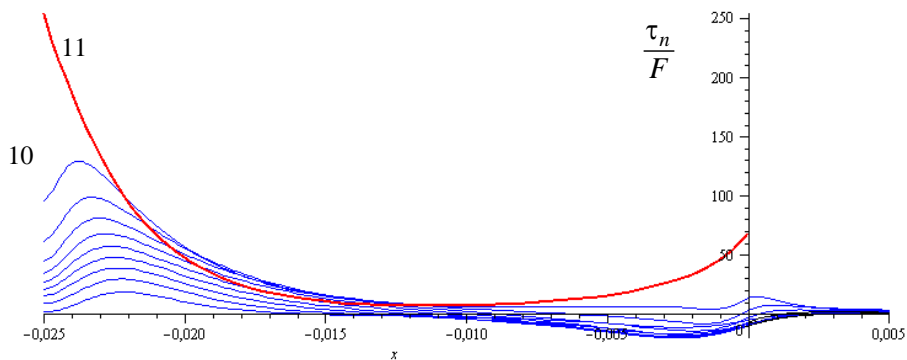


Рис. 2.1.5. Дотичні напруження в з'єднувальних шарах (варіант I)

З графіка видно, що дотичні напруження є максимальними біля лівого краю з'єднання, в околі закладення. Це ж спостерігається і для трьох інших розглянутих структур КМ. Тому виправдано вивчення впливу структури КМ на

НДС з'єднання насамперед в біля краю області склеювання ($x = -L$). Докладніше розподіл дотичних напружень у цій області ілюструє рис. 2.1.6.

Як видно із рис. 2.1.6, дотичні напруження в з'єднувальних шарах КМ поза область склеювання швидко згасають і прагнуть до нуля. Від'ємні значення дотичних напружень в околі $x = 0$ обумовлені згином з'єднання і у разі відсутності згинання мають додатне значення. Крім того, цікаво, що на деякій ділянці всередині області склеювання дотичні напруження в глибині товщини несного шару перевершують напруження в клейовому шарі.

Нормальні напруження в трансверсальному напрямку з'єднувальних шарів також набувають максимуму біля кінців з'єднання, тоді як на більшій частині з'єднання ці напруження близькі до нуля. Ці напруження набувають максимуму в точці $x = -L$ і в декілька разів перевищують напруження біля іншого кінця з'єднання ($x = 0$).

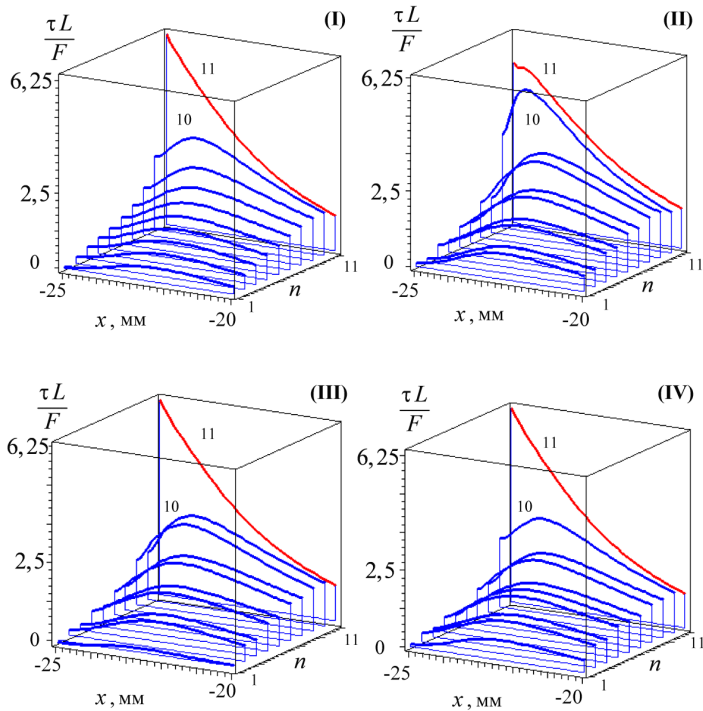


Рис. 2.1.6. Дотичні напруження в околі закладення

На рис. 2.1.7 зображено графіки відривних напружень у шарах КМ і в клейовому шві біля краю з'єднання для чотирьох варіантів структури шаруватого КМ.

З графіків видно, що напруження в найближчому до клейового шару з'єднувальному шарі багат шарового стрижня (τ_{10} і σ_{10}) хоча й поступаються за величиною напруження в клейовому шарі, однак вони – відносно великі, що є особливо характерним для випадку **II**, коли до закінцівки клеїться шар з кутом укладення 90° , більш піддатливий у поздовжньому напрямку.

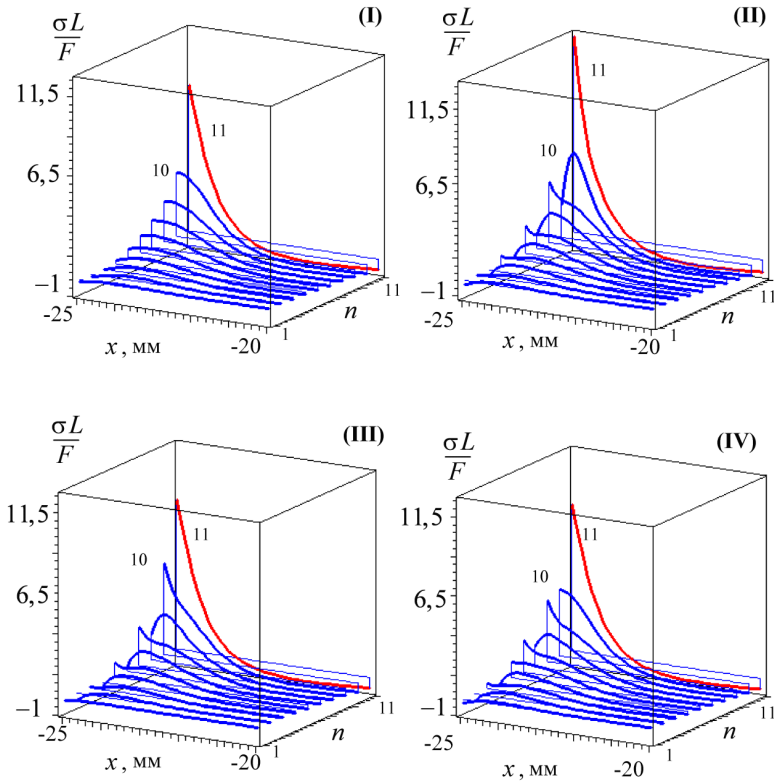


Рис. 2.1.7. Нормальні напруження в околі закладення

Отже, у разі низької міжшарової міцності багат шарового композиту руйнування з'єднання може статися у формі розшарування композиту по

40

з'єднувальному шару, найближчому до склеювального.

Розподіл поздовжніх зусиль у моношарах КМ у першому розрахунковому випадку показано на рис. 2.1.8. На графіку наведено відношення поздовжніх зусиль у шарах КМ до заданих у крайових умовах зусиль біля правого краю композитного стрижня $F_n = 0,1 F$.

З рис. 2.1.8 видно, що поздовжні зусилля поза область з'єднання розподіляються по товщині практично рівномірно, що обумовлено вигиним консольної ділянки. А в області з'єднання зусилля в нижньому (10) шарі в 2,3 раза перевищують середнє значення по шарах, що також може призвести до відривання нижнього шару від КМ.

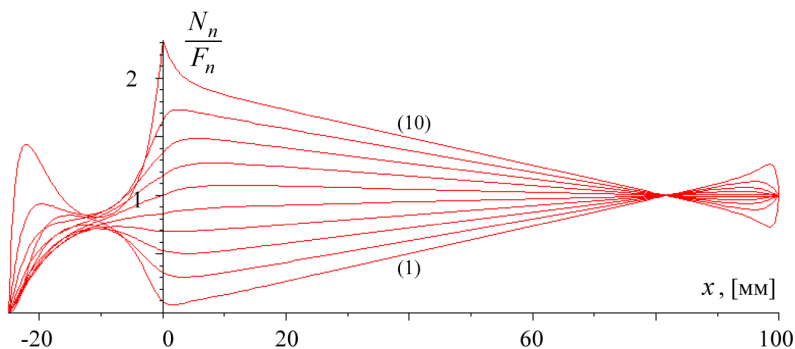


Рис. 2.1.8. Поздовжні зусилля в несних шарах (варіант I)

Якщо порівняти результати розрахунків із розрахунками за класичною моделлю Голанда – Рейсснера, розглядаючи композитний стрижень як суцільну балку, то можна зазначити, що напруження в клейовому шарі, розраховані за запропонованою методикою, відрізняються від напружень, розрахованих за класичною моделлю Голанда – Рейсснера лише на кілька відсотків. Розподіл дотичних напружень по товщині деталей, що з'єднуються в однорідному стрижні, має квадратичну залежність [136, 137] (узагальнення формули Журавського), дуже близьку до лінійної, і помітно відрізняється від результатів, показаних на рис. 2.1.6. Однак розподіл нормальних напружень по товщині у

трансверсальному напрямку, якщо вважати композитний стрижень однорідним, не може бути визначений унаслідок гіпотез, що є основою теорії балок. Отже, запропонований підхід дає змогу дослідити напружений стан композитного стрижня більш повно, завдяки чому можна оцінити несну здатність з'єднання. Крім того, запропонований підхід є нечутливим до відношення товщини пакета до довжини з'єднання, на відміну від класичної балкової теорії, тому може застосовуватися для проектування й розрахунку НДС з'єднань деталей з відносно великою товщиною.

Цей підхід можна використовувати для розрахунку з'єднань елементів конструкцій з шаруватих композитів зі ступінчастим змінням товщини з'єднання, з'єднань з поздовжніми силовими елементами та багатозрізних з'єднань з довільною кількістю клейових шарів. До складу моделі можуть бути включені температурні напруження.

2.2 Уточнення моделі напруженого стану клейового шару.

Двопараметрична модель пружної основи. Дослідження критерію міцності клею в умовах складного навантаження

Як було зазначено вище, у класичних моделях напускного з'єднання Фолькерсена та Голанда – Рейсснера дотичні напруження в клеї набувають максимуму на краях з'єднання, що часто фізично неможливо, оскільки зовнішній край з'єднувального шару може мати вільну межу. Щоб виключити цю суперечність, у роботі [139] було запропоновано вважати нормальні напруження в клеї лінійно змінними по товщині клейового шару, а не постійними, як у попередніх моделях. У роботах [5, 6] напружений стан з'єднувального шару описується за допомогою двопараметричної моделі пружної основи.

Дослідити НДС клейового шару експериментальними методами досить важко через його малу товщину. Однак відомо, що клейовий шар біля краю шва перебуває в складному НДС, і його руйнування найчастіше починається з

кінців з'єднання. Вплив форми видавлених за межі шва надлишків клею на напружений стан клейового шару вивчено за допомогою числових методів, наприклад, у роботах [3, 40, 72, 88, 138]. Показано, що за їх відсутності дотичні напруження на краю шва дорівнюють нулю згідно з законом парності дотичних напружень (рис. 2.2.1, *a*). Якщо утворився облой з видавлених надлишків клею, товщина якого є значно більшою за товщину клейового шару, то дотичні напруження на краю шва набувають максимуму (рис. 2.2.1, *б*).

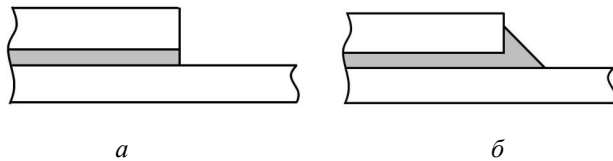


Рис. 2.2.1. Варіанти оформлення краю клейового шва

Граничні умови на краю клейового шару впливають лише локально. На відстані від краю шва, що становить приблизно кілька товщин клейового шару, у глибині області склеювання напруження в клейовому шарі не залежать від крайових умов на його межі. Обидва випадки є граничними й утворюють «вилку», у межах якої лежать значення напружень на краю клейового шару. Створення аналітичної моделі, що дає змогу враховувати зазначені типи крайових умов і з високою точністю оцінити НДС клейового шару біля краю шва, є актуальною задачею. Окрім того, становить інтерес експериментальне визначення критерію міцності клею в з'єднаннях внапуск. Проведене в роботі експериментальне дослідження, безумовно, не є повним і вичерпним. Його мета – перевірка адекватності запропонованої моделі й ілюстрація актуальності вивчення міцнісних характеристик клею в умовах складного НДС.

Розглянемо клейове з'єднання двох стрижнів, які розглядаються як балки в наближенні Тимошенка (рис. 2.2.2).

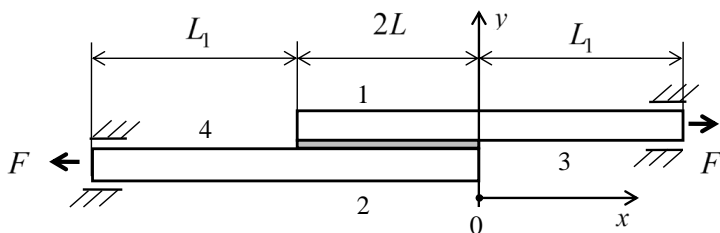


Рис. 2.2.2. Схема клейового з'єднання: 1, 2 – несні шари в області склеювання;
3, 4 – вільні від клею ділянки

Початок системи координат розмістимо на краю клейового шва.

Розглянемо ділянку шва $x \in (-2L, 0)$. Диференціальний елемент області й силові фактори в шарах зображено на рис. 2.2.3.

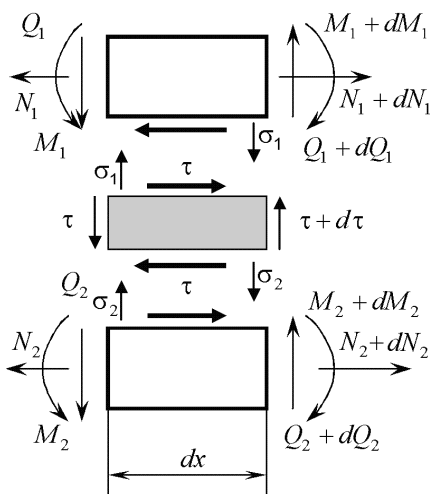


Рис. 2.2.3. Елемент з'єднання

Рівняння рівноваги шарів запишемо у вигляді

$$\frac{dN_1}{dx} = -\tau; \quad \frac{dQ_1}{dx} = \sigma_1; \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \frac{\delta_1}{2}\tau; \quad (2.2.1)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \tau; \quad \frac{dQ_2}{dx} = -\sigma_2; \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \frac{\delta_2}{2} \tau; \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad (2.2.3)$$

де N_i, Q_i, M_i – поздовжні й поперечні зусилля та погонний згинальний момент в i -му несному шарі, ($i=1, 2$); τ, σ_i – дотичні й нормальні напруження в клейовому шарі; δ_1, δ_2 – товщина першого й другого несних шарів; δ_0 – товщина клейового шару.

Співвідношення теорії пружності для балок Тимошенка мають вигляд

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{B_i}; \quad D_i \frac{d\varphi_i}{dx} = M_i; \quad \frac{dw_i}{dx} + \varphi_i = \frac{Q_i}{H_i}, \quad (2.2.4)$$

де u_i, w_i, φ_i – поздовжні й поперечні переміщення та кут повороту перерізу i -го несного шару; B_i, D_i, H_i – відповідно жорсткості при розтягу-стиску, згині і зсуві, для однорідних шарів маємо $B_i = E_i \delta_i$, $D_i = \delta_i^3 E_i / 12$, $H_i = 5G_i \delta_i / 6$ (E_i і G_i – модулі пружності й модулі зсуву несних шарів).

З'єднувальний шар моделюється багатопараметричною пружною основою в мембранній інтерпретації Філоненка-Бородича, тобто клейовий шар моделюється мембраною, розташованою посередині товщини шару (поперечні переміщення якої w_0), і пружними елементами між нею та несними шарами. Нормальні напруження за цією моделлю визначаються таким чином:

$$\sigma_i = (-1)^i k_1 (w_0 - w_i) - (-1)^i k_2 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right), \quad (2.2.5)$$

де k_1, k_2 – перший і другий коефіцієнти постелі, $k_1 = 2E_0 [\delta_0 (1 - \mu_0^2)]^{-1}$; $k_2 = E_0 \delta_0 [12(1 + \mu_0)]^{-1}$ [163] (тут E_0 і μ_0 – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона клею).

Дотичні напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці поздовжніх переміщень внутрішніх сторін несних шарів і відносному зсуву клейового шару:

$$\tau = P_0 \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 \frac{dw_0}{dx}, \quad (2.2.6)$$

де P_0 – жорсткість клейового шару при зсуві; G_0 – модуль зсуву клею.

Жорсткість клейового шару в найпростішому випадку, якщо вважати несні шари абсолютно жорсткими при зсуві, визначається формулою $P_0 = G_0 / \delta_0$. Але така модель дає дещо завищені значення дотичних напружень, тому часто застосовується підхід, згідно з яким уважають, що дотичні напруження розподіляються рівномірно по товщині в клейовому шарі й лінійно в несних шарах. У цьому разі маємо $P_0 = \left(\frac{\delta_0}{G_0} + \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{G_1} + \frac{1}{2} \frac{\delta_2}{G_2} \right)^{-1}$.

Систему рівнянь (2.2.1)–(2.2.6) можна скоротити за допомогою співвідношення рівноваги $N_1(x) + N_2(x) = F$, де $F = \text{const}$ – прикладене до з'єднання поздовжнє зусилля (рис. 2.2.2). Її можна звести до системи трьох диференціальних рівнянь відносно M_1, M_2, N_1 :

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{\mathbf{X}}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{R}}, \quad (2.2.7)$$

де

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta_1 P_0 + G_0}{G_0 D_1} & -\frac{\delta_2 P_0 + G_0}{G_0 D_1} & \frac{2P_0}{G_0} \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \\ \frac{k_1}{D_1} & -\frac{k_1}{D_2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \delta_0 + \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ -g_1 & g_2 & \frac{k_1}{2} \left(\frac{\delta_2}{H_2} - \frac{\delta_1}{H_1} \right) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2F}{\delta_2 B_2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{k_1 H_1} & -\frac{k_2}{k_1 H_2} & \left[\frac{\delta_0}{k_1} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_2} - \frac{4}{G_0} \right) \right] \\ 1 + \frac{k_2}{H_1} & -1 - \frac{k_2}{H_2} & \frac{1}{2} \left[\delta_1 - \delta_2 + k_2 \left(\frac{\delta_1}{H_1} - \frac{\delta_2}{H_2} \right) \right] \end{pmatrix};$$

$$f_i = \frac{k_2}{k_1 D_k} \frac{\delta_i P_0 + G_0}{G_0 D_i} + \frac{1}{H_i}; \quad g_i = \frac{k_1}{H_i} + \frac{k_2}{D_i}; \quad i = 1, 2;$$

$$f_3 = \frac{\delta_1}{2H_1} + \frac{\delta_2}{2H_2} - \frac{2}{G_0} - \frac{2k_2 P_0}{k_1 G_0} \cdot \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2}.$$

Загальний розв'язок системи однорідних диференційних рівнянь (2.2.7) має вигляд суперпозиції частинних розв'язків $\bar{\mathbf{X}}_0 = C e^{\lambda x} \bar{\mathbf{h}}$, де λ задовольняє характеристичному рівнянню

$$\det(\mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_0) = 0. \quad (2.2.8)$$

Рівняння (2.2.8) є рівнянням десятого степеня відносно λ з парними степенями λ , починаючи з другого степеня. Отже, $\lambda = 0$ є коренем кратності два та існує вісім відмінних від нуля коренів λ_j , $j = 1, 2, \dots, 8$. Таким чином, загальний розв'язок системи (7) має вигляд

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ N_1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^8 C_j e^{\lambda_j x} \bar{\mathbf{h}}_j + C_9 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + C_{10} x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.2.9)$$

$$\text{де } a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{D_2}{D_1}; \quad a_3 = \frac{B_1 B_2 (2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{2D_1 (B_1 + B_2)}; \quad b = \frac{B_1 F}{B_1 + B_2}.$$

Вектори \vec{h}_j , що відповідають ненульовим кореням λ_j (2.2.8), знаходимо із системи лінійних однорідних рівнянь

$$(\mathbf{A}_4 \lambda_j^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_j^2 + \mathbf{A}_0) \vec{h}_j = 0.$$

Указані вектори являють собою нетривіальні розв'язки системи лінійних однорідних рівнянь, які визначаються з точністю до довільного множника C_j , оскільки дефект матриці $\mathbf{A}_4 \lambda_j^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_j^2 + \mathbf{A}_0$ дорівнює одиниці.

Таким чином, отримавши M_1, M_2, N_1 (9) і $N_2 = F - N_1$, із формул (2.2.1) і (2.2.2) знаходимо напруження τ , σ_i у клейовому шарі й поперечні зусилля Q_i . Інтегрування (2.2.4) і додавання відповідних констант інтегрування визначить переміщення несних шарів u_i, w_i, φ_i . Переміщення w_0 знайдемо інтегруванням (2.2.6):

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{j=1}^8 C_j \lambda_j \left(\frac{\delta_i}{2} h_{j,3} + h_{j,i} \right) e^{\lambda_j x} + C_{10} \left(a_i + \frac{\delta_i}{2} a_3 \right); \\ \sigma_i &= \sum_{j=1}^8 C_j \lambda_j^2 \left(\frac{\delta_i}{2} h_{j,3} + h_{j,i} \right) e^{\lambda_j x}; \quad \tau = \sum_{j=1}^8 C_j \lambda_j e^{\lambda_j x} h_{j,3} + C_{10} a_3; \\ \varphi_i &= \sum_{j=1}^8 \frac{C_j}{\lambda_j} e^{\lambda_j x} h_{j,i} + C_9 a_i x + C_{10} a_i \frac{x^2}{2} + S_i; \\ w_i &= \sum_{j=1}^8 C_j \left(\frac{\delta_i h_{j,3} + 2h_{j,i}}{2H_i} - \frac{h_{j,i}}{D_i \lambda_j^2} \right) e^{\lambda_j x} + \frac{C_9 a_i x^2}{2D_i} - \frac{C_{10} a_i x^3}{6D_i} + \\ &\quad + \left(a_i + \frac{\delta_i a_3}{2} \right) \frac{C_{10}}{H_i} - S_i x + S_{i+2}; \\ u_i &= \frac{(-1)^{i+1}}{B_i} \left(\sum_{j=1}^8 C_j \frac{h_{j,3}}{\lambda_j} e^{\lambda_j x} + C_9 a_3 x + C_{10} a_3 \frac{x^2}{2} \right) + S_{i+4}; \end{aligned}$$

$$w_0 = \sum_{j=1}^8 C_j \left(\frac{h_{j,3}}{G_0} + \frac{1}{\lambda_j^2 \delta_0} \left(\frac{\delta_1 h_{j,1}}{2 D_1} + \frac{\delta_2 h_{j,2}}{2 D_2} - \frac{h_{j,3}}{B_1} - \frac{h_{j,3}}{B_2} \right) \right) e^{\lambda_j x} -$$

$$- \frac{C_9 x^2}{2D_1} - C_{10} \left(\frac{x^3}{6D_1} - a_2 x \right) + \frac{x}{\delta_0} \left(S_6 - S_5 + \frac{\delta_1 S_1}{2} + \frac{\delta_2 S_2}{2} \right) + S_7,$$

де $h_{j,i}$ – i -та координата вектора \vec{h}_j ; S_1, S_2, \dots, S_7 – константи інтегрування.

Підставимо ці вирази в (2.2.5) та отримаємо додаткові співвідношення між константами:

$$\left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{a_3 B_1 + B_2}{\delta_0 B_1 B_2} - \left(\frac{2a_i + \delta_1 a_3}{2H_i} - \frac{a_3}{2G_0} \right) - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2D_1 \delta_0} - \frac{1}{D_1} \right) \right) C_{10} +$$

$$+ \left(\frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} + \frac{\delta_1}{2\delta_0} \right) S_1 + \left(\frac{1 + (-1)^i}{2} + \frac{\delta_1}{2\delta_0} \right) S_2 - \frac{S_5}{\delta_0} + \frac{S_6}{\delta_0} = 0,$$

$$S_{2+i} - S_7 = 0; \quad i = 1, 2. \quad (2.2.10)$$

Невідомі коефіцієнти S_1, S_2, \dots, S_7 і C_1, C_2, \dots, C_{10} знаходимо з крайових умов та умов спряження на межі зони склеювання й ділянок 3 і 4 (рис. 2.2.2), які також розглядаються як балки в наближенні Тимошенка.

Покажемо це на прикладі симетричної склеєної конструкції, припустивши, що $\delta_1 = \delta_2$, $E_1 = E_2$ і $G_1 = G_2$ (рис. 2.2.2). З огляду на симетрію можна розглянути половину конструкції, а саме: половину довжини з'єднання $x \in [-L; 0]$ та одну з ділянок $x \in (0; L_1]$. Переміщення балки описуються рівняннями (2.2.4), при цьому $i=3$, а поперечні й поздовжні зусилля є постійними:

$$u_3 = \frac{F}{B_1} x + s_1; \quad M_3 = s_2 x + s_3; \quad \varphi_3 = \frac{s_2 x^2}{2D_1} + \frac{s_3}{D_1} x + s_4;$$

$$w_3 = -\frac{s_2 x^3}{6D_1} - \frac{s_3 x^2}{2D_1} - \left(s_4 - \frac{s_2}{H_1} \right) x + s_5,$$

де s_1, s_2, \dots, s_5 – невідомі константи.

Крайові умови мають такий вигляд:

$$u_1(-L) = -u_2(-L); \quad w_1(-L) = -w_2(-L); \quad \varphi_1(-L) = \varphi_2(-L); \quad N_1(-L) = N_2(-L);$$

$$Q_1(-L) = Q_2(-L); \quad M_1(-L) = -M_2(-L); \quad N_1(0) = F; \quad Q_1(0) = Q_3(0);$$

$$u_1(0) = u_3(0); \quad w_1(0) = w_3(0); \quad \varphi_1(0) = \varphi_3(0); \quad M_1(0) = M_3(0);$$

$$w_0(-L) = 0; \quad Q_2(0) = M_2(0) = 0; \quad w_3(L_1) = 0; \quad \left. \frac{dw_3}{dx} \right|_{x=L_1} = 0.$$

Якщо клейовий шар не має видавлених надлишків клею на межі (див. рис. 2.2.1, а), то згідно з законом парності дотичних напружень крайові умови мають вигляд

$$\tau(0) = 0, \tag{2.2.11}$$

оскільки зовнішній край клейового шару є вільним від навантаження.

Якщо на краю клейового шару є видавлені надлишки клею (рис. 2.2.1, б), то дотичні напруження в клеї досягатимуть максимуму на краю області склеювання, і відповідна гранична умова матиме вигляд

$$\left. \frac{d\tau}{dx} \right|_{x=0} = 0. \tag{2.2.12}$$

Отже, маємо двадцять два лінійні рівняння, включаючи чотири рівняння (2.2.10), відносно двадцяти двох невідомих констант $S_1, S_2, \dots, S_7, C_1, C_2, \dots, C_{10}$ і s_1, s_2, \dots, s_5 .

За допомогою запропонованої моделі з'єднання оцінювали критерій міцності клею. Для розрахунку НДС з'єднання необхідно мати інформацію про пружні властивості несних шарів і клейового шару. Властивості сплаву Д16 є відомими ($E = 71$ ГПа, $G = 27$ ГПа), а властивості клею необхідно визначити експериментально.

Проводилися випробування з визначення модуля зсуву згідно з ГОСТ 25717–83 і границі міцності при розриві згідно з ГОСТ 14760–69 та випробування на розрив зразків з'єднання внапуск, у яких клейовий шар перебуває в умовах складного НДС (зсув і відрив).

Випробування проводилися в Проблемній науково-дослідній лабораторії «Міцність» Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут». Зразки виготовлялися з алюмінієвого сплаву Д16 і склеювалися клеєм ВК-36 згідно з ТУ 1-596-389-96 на клей. Полімеризація клею проводилася при температурі 175 °С і тиску 0,05...0,1 МПа протягом трьох годин.

Модуль зсуву клею визначався методом Б, що передбачає встановлення модуля зсуву клею одношарових клеєних металевих (у цьому випадку з матеріалу Д16) зразків в умовах нормальної температури. Вимірювалися відносні переміщення точок у середині з'єднання на бічних поверхнях з'єднаних пластин. Однак в описаному в ГОСТі підході не враховано поздовжні переміщення точок, зумовлені поворотом перерізу внаслідок згину зразка. Тому значення G_0 , розраховане за наведеними в стандарті формулами, є заниженим. Якщо задати коефіцієнт Пуассона $\mu_0 = 0,4$ і обчислити переміщення за запропонованою математичною моделлю, то отримаємо середні значення $E_0 = 760$ МПа і $G_0 = 260$ МПа.

Для визначення границі міцності клею при розриві випробовували зразки у вигляді алюмінієвих циліндрів діаметром 25 мм, склеєних по торцях. Отримали середнє значення границі міцності $\sigma_0 = 66,7$ МПа, що дещо перевищує значення, наведене в роботі [164], – 50 МПа.

Для дослідження критерію руйнування в умовах складного напруженого стану випробовували на розрив зразки з'єднання внапуск (рис. 2.2.3). Зразки до руйнування показано на рис. 2.2.4. Пластини для виготовлення зразків вирізали з одного листа алюмінієвого сплаву Д16 завтовшки 5 мм. Ширина зразків становить 20 мм, довжина області склеювання – 20 мм, довжина ділянок 3, 4

(див. рис. 2.2.2), що виступають за межі області склеювання – 65 мм, середня товщина клейового шару 0,03 мм. Установлено, що зразки зруйнувалися під час розтягування силою 7840, 7940, 7645 Н. Її середнє значення дорівнює 7808 Н, тобто середнє значення зусилля буде таким: $F = \frac{7808}{0,02} = 0,392 \cdot 10^6$ Н/м, де 0,02 – ширина зразків, м.

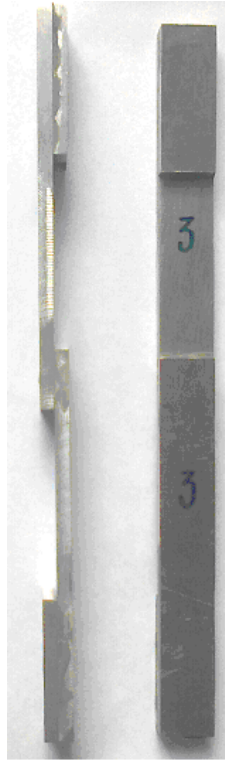


Рис. 2.2.4. Зразки до руйнування

Розрахуємо НДС клейового з'єднання, застосувавши крайові умови (2.2.11) і (2.2.12). Напруження в клейовому шарі в обох розрахункових випадках показано на рис. 2.2.5. Оскільки зразки є симетричними, графіки напружень зображено на половині ділянки склеювання, $x \in [-L; 0]$.

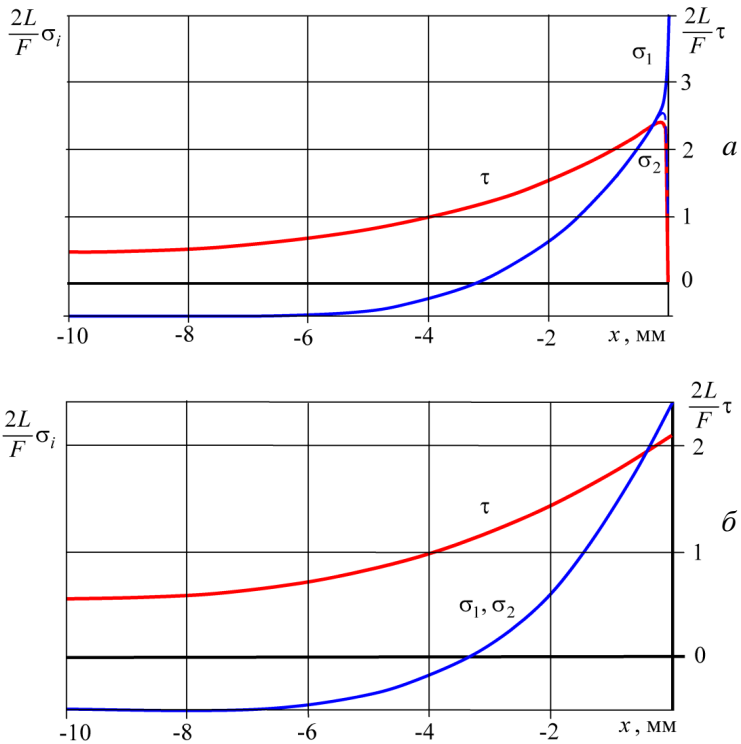


Рис. 2.2.5. Напруження в клейовому шарі за відсутності a і за наявності b на краю шва надлишків клею

Із рис. 2.2.5 видно, що в першому розрахунковому випадку (рис. 2.2.1, a) дотичні напруження набувають максимуму на відстані від краю шва, яка близька до товщини клейового шару. Нормальні (відривні) напруження σ_1 і σ_2 у глибині області склеювання є досить близькими, але біля краю шва вони значно різняться, причому можуть мати навіть різний знак. Це дає змогу пояснити відомі з літератури [3, 19] особливості лінії (поверхні) руйнування клейового шва при розтягуванні з'єднання (рис. 2.2.6).

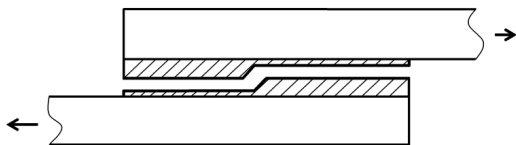


Рис. 2.2.6. Лінія руйнування клейового шару

Зразки мали наплив з видавлених надлишків клею завтовшки близько 1 мм, що істотно більше за товщину клейового шару, тому для визначення критерію руйнування клею використано другий розрахунковий випадок із крайовою умовою (2.2.12).

На рис. 2.2.7 зображено максимальні головні напруження в клейовому шарі $\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau^2})$, еквівалентні напруження за Мізесом $\sigma_M = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau^2}$ і відривні напруження σ_1 на межі клейового й несного шарів, які виникають у з'єднанні при розтягуванні силою 7808 Н.

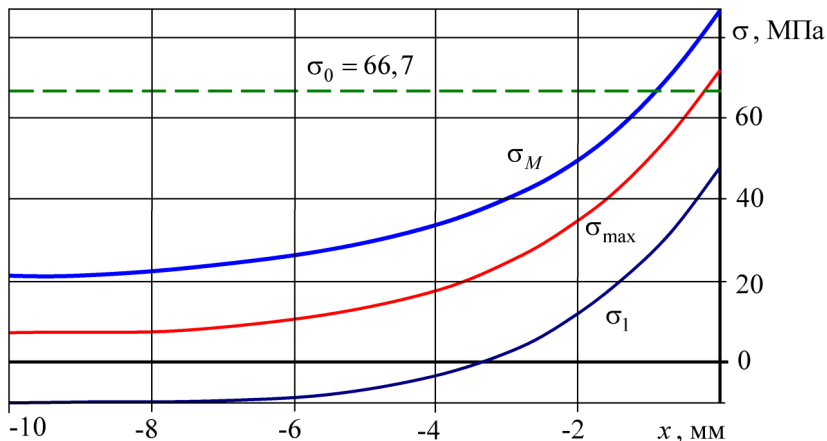


Рис. 2.2.7. Напруження в клейовому шарі: σ_M – еквівалентні напруження за Мізесом; σ_{\max} – максимальні головні напруження; σ_1 – максимальні відривні напруження на межі клейового й несного шарів (штрихова лінія – напруження експериментально встановленої границі міцності клею при розриві)

Максимальні головні напруження на краю клейового шва відрізняються від отриманої експериментально границі міцності клею при розриві $\sigma_0 = 66,7$ МПа менш ніж на 8 % (71,9 МПа). Критерій максимальних дотичних напружень має похибку понад 40 %, що значно вище за похибку згідно з критерієм максимальних головних напружень.

Для верифікації запропонованої моделі проведено розрахунок напруженого стану зразків з'єднань, які використовувалися для визначення модуля зсуву згідно з ГОСТ 25717–83. Їх розміри відрізнялися від розмірів зразків, показаних на рис. 2.2.4. Середнє зусилля їх руйнування дорівнює 8330 Н. Розрахунок напруженого стану показує, що максимальні головні напруження становлять 73,1 МПа, що менш ніж на 10 % відрізняється від $\sigma_0 = 66,7$ МПа. Унаслідок випробувань двох типів зразків різною довжиною напуску й різними крайовими умовами встановлено, що руйнування відбувається при близьких напруженнях, і як критерій руйнування можна брати критерій максимальних головних напружень.

Зробимо висновки:

1. Запропоновано нову математичну модель напускового клейового з'єднання, у якій для моделювання напруженого стану клейового шару використовується багатопараметрична модель пружної основи. Модель дає можливість урахувати різні граничні умови для визначення дотичних напружень у клеї на краю клейового шва.

2. Сформульовано два типи граничних умов на краю клейового шва, які відповідають відсутності надлишків клею на межі зони склеювання (дотичні напруження в клеї на межі дорівнюють нулю) і наявності значного обсягу на краю шва (дотичні напруження в клеї на межі шва є максимальними). Ці умови утворюють «вилку» для напружень у клейовому шарі й дають змогу оцінити напружений стан з'єднання.

3. Проведено випробування клею ВК-36 на міцність (на розрив). Визначено модуль зсуву й проведено випробування на розрив однозрізного напускного з'єднання.

4. Під час експериментального визначення критерію міцності клею в умовах складного НДС виявлено, що найкраще наближення дає критерій максимальних головних напружень.

5. З розрахунків видно, що наявність напливу клею на межі шва істотно знижує нормальні (відривні) напруження в клеї. Таке конструктивне рішення є кращим, ніж шов без напливу. Цей ефект також можна реалізувати шляхом створення фаски на краю склеюваної деталі з боку клейового шару й заповнення цієї області клеєм.

2.3. З'єднання внапуск коаксіальних труб. Осесиметрична модель

Одновимірні моделі напруженого стану охоплюють достатньо широкий клас задач і дають змогу визначити напружений стан не лише плоских конструкцій, а й з'єднань коаксіальних циліндричних оболонок [76, 103]. Клейові з'єднання циліндричних труб або тонкостінних оболонок є достатньо поширеними в техніці. Якщо такі конструкції мають осесиметричне навантаження, то зміною напруженого стану за коловою координатою можна знехтувати, і задача зводиться до одновимірної. Найбільш поширені види навантажень такої конструкції – крутний момент [2, 60, 75, 84, 93] або (та) поздовжня осьова сила [15], які передаються через з'єднання. У класичних моделях напруженого стану з'єднань циліндричних оболонок [34, 76, 103] розподіл дотичних напружень по товщині клейового шару вважається рівномірним. З огляду на те, що зовнішня і внутрішня поверхні клейового шару мають різні площі, можна зробити висновок, що ця гіпотеза призводить до певної суперечності в рівновазі елементів з'єднання. Тому така модель потребує деякого покращання й уточнення. Наприклад, можна вважати, що дотичні напруження діють у серединній поверхні клейового шару.

Розглянемо схему з'єднання, основні розміри якого показано на рис. 2.3.1.

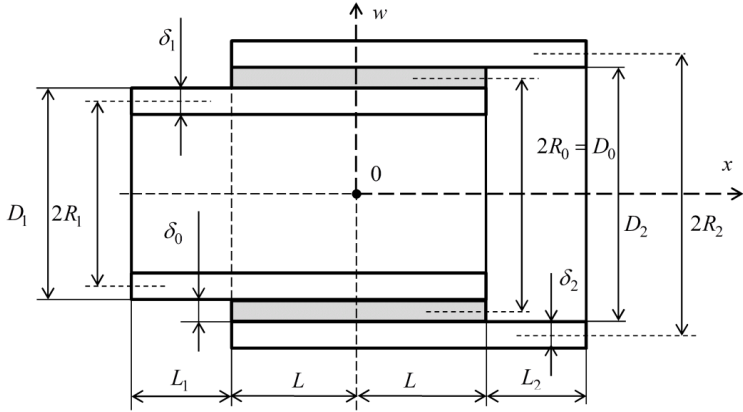


Рис. 2.3.1. Схема з'єднання

Початок координат помістимо в середину області склеювання. Радіуси серединних поверхонь циліндричних оболонок позначимо R_1 і R_2 відповідно. Зовнішній і внутрішній діаметри труб, що звернені до клейового шару, – D_1 і D_2 . Радіус серединної поверхні клейового шару – R_0 . Товщини несних шарів і клейового шару позначимо δ_1 , δ_2 і δ_0 .

Розглянемо більш докладно область склеювання. Диференціальні елементи з'єднання та діючі зусилля показано на рис. 2.3.2.

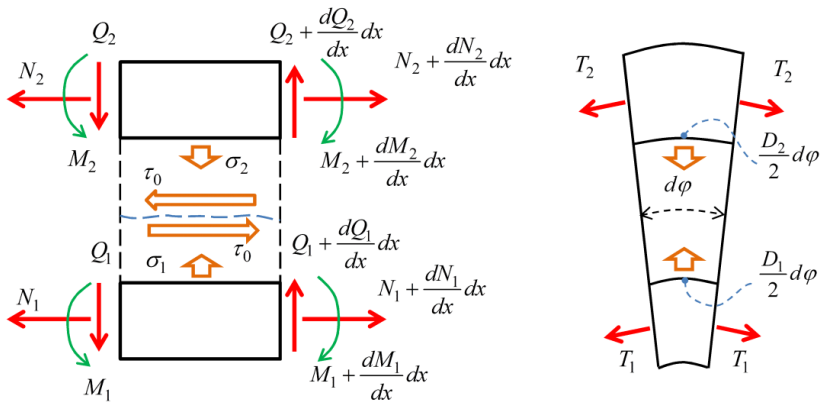


Рис. 2.3.2. Рівновага диференціального елемента з'єднання

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання:

$$R_1 \frac{dN_1}{dx} + R_0 \tau_0 = 0; \quad R_2 \frac{dN_2}{dx} - R_0 \tau_0 = 0, \quad (2.3.1)$$

$$R_1 \frac{dQ_1}{dx} + \frac{D_1}{2} \sigma_1 - T_1 = 0; \quad R_2 \frac{dQ_2}{dx} - \frac{D_2}{2} \sigma_2 - T_2 = 0, \quad (2.3.2)$$

$$R_1 \frac{dM_1}{dx} - R_1 Q_1 + R_0 \left(s_1 + \frac{\delta_0}{2} \right) \tau_0 = 0; \quad R_2 \frac{dM_2}{dx} - R_2 Q_2 + R_0 \left(s_2 + \frac{\delta_0}{2} \right) \tau_0 = 0, \quad (2.3.3)$$

де величини s_1, s_2 – відстані від нейтральної осі при згині до зверненої до клейового шару зовнішньої поверхні несного шару. У разі симетричних (однорідних) шарів ця відстань дорівнює половині товщини несного шару.

Рівняння фізичного закону має вигляд

$$N_i = B_x^{(i)} \frac{du_i}{dx} + B_y^{(i)} \mu_{yx}^{(i)} \frac{w_i}{R_i}; \quad T_i = B_y^{(i)} \frac{w_i}{R_i} + B_x^{(i)} \mu_{xy}^{(i)} \frac{du_i}{dx}; \quad (2.3.4)$$

де $i=1, 2$; $B_x^{(i)} = \frac{E_x^{(i)} \delta_i}{1 - \mu_{xy}^{(i)} \mu_{yx}^{(i)}}$, $B_y^{(i)} = \frac{E_y^{(i)} \delta_i}{1 - \mu_{xy}^{(i)} \mu_{yx}^{(i)}}$ – мембранні жорсткості несних

шарів у поздовжньому й коловому напрямках; $E_x^{(i)}$ і $E_y^{(i)}$ – модулі пружності несного шару з номером $i=1, 2$ у відповідному напрямку.

У цьому випадку вважаємо, що матеріали з'єднуваних циліндричних оболонок – ортотропні.

Вигин оболонок визначається співвідношенням

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = - \frac{M_i}{J_i}, \quad (2.3.5)$$

де в разі однорідних несних шарів згинальна жорсткість $J_i = \frac{E_x^{(i)}}{1 - \mu_{xy}^{(i)} \mu_{yx}^{(i)}} I_i$ і,

свою чергою, $I_i = \delta_i^3 / 12$ – момент інерції відповідного несного шару.

Рівняння рівноваги диференціального елемента клею в радіальному напрямку має вигляд

$$\frac{d\tau_0}{dx} = \frac{D_2\sigma_2 - D_1\sigma_1}{\delta_0 D_0}. \quad (2.3.6)$$

Нормальні напруження в клеї подамо у вигляді

$$\sigma_2 = \frac{D_0}{D_2} \left(\sigma_0 + \frac{\delta_0}{2} \frac{d\tau_0}{dx} \right); \quad \sigma_1 = \frac{D_0}{D_1} \left(\sigma_0 - \frac{\delta_0}{2} \frac{d\tau_0}{dx} \right). \quad (2.3.7)$$

Така форма дає змогу перетворити рівняння рівноваги (2.3.6) на тотожність. При цьому напруження будемо вважати пропорційними різниці поперечних переміщень несних шарів:

$$\sigma_0 = K(w_2 - w_1), \quad (2.3.8)$$

де $K = E_0\delta_0^{-1}$ – жорсткість клейового шару на розтяг-стиск у трансверсальному напрямку.

Дотичні напруження в клеї будемо вважати пропорційними різниці поздовжніх переміщень внутрішніх сторін несних шарів, повернутих до клейового шару:

$$\tau_0 = P \left(u_2 - u_1 + s_2 \frac{dw_2}{dx} + s_1 \frac{dw_1}{dx} \right), \quad (2.3.9)$$

де $P = \left(\frac{\delta_0}{G_0} + \frac{\delta_1}{2G_1} + \frac{\delta_2}{2G_2} \right)^{-1}$ – уточнена жорсткість клейового шару на зсув [158].

Система рівнянь (2.3.1)–(2.3.9) може бути зведена до системи чотирьох диференціальних рівнянь відносно поздовжніх і поперечних (радіальних) переміщень несних шарів, яку в матричній формі можна записати так:

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{\mathbf{V}}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{V}}}{dx^2} + \mathbf{A}_1 \frac{d \vec{\mathbf{V}}}{dx} + \mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{V}} = 0, \quad (2.3.10)$$

де $\vec{\mathbf{V}} = (u_1; u_2; w_1; w_2)^T$ – вектор-функція переміщень шарів;

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{R_1 B_x^{(1)}}{R_0 P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 B_x^{(2)}}{R_0 P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1^2 & -s_1 s_2 \\ 0 & 0 & -s_1 s_2 & -s_2^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_y^{(1)}}{R_0 R_1 P} + \frac{K}{P} & -\frac{K}{P} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{P} & \frac{B_y^{(2)}}{R_0 R_2 P} + \frac{K}{P} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{yx}^{(1)} + s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & -s_1 & \beta_{yx}^{(2)} - s_2 \\ \beta_{xy}^{(1)} + s_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & \beta_{xy}^{(2)} - s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1 J_1}{R_0 P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_2 J_2}{R_0 P} \end{pmatrix},$$

де $\beta_{yx}^{(i)} = \frac{\mu_{yx}^{(i)} B_y^{(i)}}{R_0 P}$; $\beta_{xy}^{(i)} = \frac{\mu_{xy}^{(i)} B_x^{(i)}}{R_0 P}$. Відповідно до теорії пружності ортотропного тіла має місце співвідношення $\mu_{xy} E_x = \mu_{yx} E_y$. Отже, матриці рівняння (2.3.10) – симетричні.

Розв'язок рівняння (2.3.10) шукаємо у вигляді $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{h}} e^{\lambda x}$. Підставивши замість $\vec{\mathbf{V}}$ вираз $\vec{\mathbf{h}} e^{\lambda x}$ у (2.3.10) і спростивши, отримаємо рівняння

$$\mathbf{A}_s \vec{\mathbf{h}} = 0, \quad (2.3.11)$$

де $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_0$.

Характеристичне рівняння $\det(\mathbf{A}_s) = 0$ має корінь $\lambda = 0$ другого ступеня кратності і десять відмінних від нуля коренів. Вектори $\vec{\mathbf{h}}_k$ знаходимо з рівняння (2.3.11) з точністю до довільного множника C_k . Тому загальний розв'язок (2.3.10) можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{k=1}^{10} C_k \vec{\mathbf{h}}_k e^{\lambda_k x} + \vec{\mathbf{H}}_0 + \vec{\mathbf{H}}_1 x,$$

де $\vec{\mathbf{H}}_0$ і $\vec{\mathbf{H}}_1$ – власні вектори, що відповідають $\lambda = 0$; $\vec{\mathbf{h}}_k$ – власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda \neq 0$;

$$\vec{\mathbf{H}}_1 = \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{H}}_0 = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{11} \\ C_{12}\alpha_1 \\ C_{12}\alpha_2 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = -R_1 \frac{KR_0 R_2 (\mu_{xy}^{(1)} B_x^{(1)} + \mu_{xy}^{(2)} B_x^{(2)}) + B_x^{(1)} \mu_{xy}^{(1)} B_y^{(2)}}{KR_0 (R_2 B_y^{(1)} + R_1 B_y^{(2)}) + B_y^{(1)} B_y^{(2)}},$$

$$\alpha_2 = -R_2 \frac{KR_0 R_1 (\mu_{xy}^{(1)} B_x^{(1)} + \mu_{xy}^{(2)} B_x^{(2)}) + B_y^{(1)} \mu_{xy}^{(2)} B_x^{(2)}}{KR_0 (R_2 B_y^{(1)} + R_1 B_y^{(2)}) + B_y^{(1)} B_y^{(2)}}.$$

Таким чином, у формули для переміщень входить дванадцять констант C_k . З формул (2.3.1)–(2.3.9) знаходимо зусилля N_i , Q_i і T_i у несних шарах, згинальні моменти M_i і напруження τ_0 і σ_i у клейовому шарі.

Поздовжні й поперечні переміщення закінцівок позначимо u_3 , w_3 ($x \in [-L_1 - L; -L]$) і u_4 , w_4 ($x \in [L; L + L_2]$). Поза область склеювання переміщення будуть описуватися класичними рівняннями осесиметричної циліндричної оболонки

$$\frac{R_1^2 J_1}{B_y^{(1)}} \frac{d^4 w_3}{dx^4} + \left(1 - \mu_{xy}^{(1)} \mu_{yx}^{(1)}\right) w_3 = -\frac{\mu_{xy}^{(1)} F_0}{2\pi B_y^{(1)}};$$

$$\frac{R_2^2 J_2}{B_y^{(2)}} \frac{d^4 w_4}{dx^4} + \left(1 - \mu_{xy}^{(2)} \mu_{yx}^{(2)}\right) w_4 = -\frac{\mu_{xy}^{(2)} F_0}{2\pi B_y^{(2)}};$$

$$N_3 = B_x^{(1)} \frac{du_3}{dx} + B_y^{(1)} \mu_{yx}^{(1)} \frac{w_3}{R_1}; \quad T_3 = B_y^{(1)} \frac{w_3}{R_1} + B_x^{(1)} \mu_{xy}^{(1)} \frac{du_3}{dx};$$

$$N_4 = B_x^{(2)} \frac{du_4}{dx} + B_y^{(2)} \mu_{yx}^{(2)} \frac{w_4}{R_2}; \quad T_4 = B_y^{(2)} \frac{w_4}{R_2} + B_x^{(2)} \mu_{xy}^{(2)} \frac{du_4}{dx},$$

де F_0 – поздовжня сила, прикладена до з'єднання; $N_3 = \frac{F_0}{2\pi R_1} = const$ і

$$N_4 = \frac{F_0}{2\pi R_2} = const.$$

Розв'язавши диференціальні рівняння (2.3.12) і (2.3.13), знайдемо залежності, що описують переміщення на зовнішніх ділянках конструкції. Зусилля в оболонках описуються залежностями

$$\frac{dQ_3}{dx} = \frac{T_3}{R_1}, \quad \frac{dQ_4}{dx} = \frac{T_4}{R_2}, \quad \frac{dM_3}{dx} = Q_3, \quad \frac{dM_4}{dx} = Q_4, \quad \frac{d^2w_3}{dx^2} = -\frac{M_3}{J_1}, \quad \frac{d^2w_4}{dx^2} = -\frac{M_4}{J_2}.$$

Крайові умови й умови спряження:

$$u_3|_{x=-L-L_4} = \frac{dw_3}{dx} \Big|_{x=-L-L_4} = Q_3|_{x=-L-L_4} = 0; \quad N_2|_{x=-L} = Q_2|_{x=-L} = M_2|_{x=-L} = 0; \quad u_3|_{x=-L} = u_1|_{x=-L};$$

$$w_3|_{x=-L} = w_1|_{x=-L}; \quad \frac{dw_3}{dx} \Big|_{x=-L} = \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=-L}; \quad N_3|_{x=-L} = N_1|_{x=-L}; \quad Q_3|_{x=-L} = Q_1|_{x=-L};$$

$$M_3|_{x=-L} = M_1|_{x=-L};$$

$$N_1|_{x=L} = Q_1|_{x=L} = M_1|_{x=L} = 0; \quad u_4|_{x=L} = u_2|_{x=L}; \quad w_4|_{x=L} = w_2|_{x=L}; \quad \frac{dw_4}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{dw_2}{dx} \Big|_{x=L};$$

$$N_4|_{x=L} = N_2|_{x=L};$$

$$Q_4|_{x=L} = Q_2|_{x=L}; \quad M_4|_{x=L} = M_2|_{x=L}; \quad Q_4|_{x=L+L_2} = M_4|_{x=L+L_2} = 0.$$

Крайові умови призводять до системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів C_k і коефіцієнтів, що виникають при інтегруванні диференціальних рівнянь (2.3.12), (2.3.13).

З метою перевірки наведених результатів і висвітлення особливостей математичної моделі й області її застосування проведемо розрахунки напруженого стану деякої конструкції й порівняємо результати зі скінченно-елементним моделюванням напруженого стану. До скінченно-елементної моделі додамо фаски на межі краю клейового шва та напливи із надлишків клейового шару. Ці внесення, з одного боку, є реальними елементами конструкції з'єднання, а з іншого – це дасть змогу уникнути описаного в попередньому розділі суттєвого змінення нормальних напружень по товщині клейового шару в околі краю клейового шва. Іншими словами, наявність фаски й напливу з надлишків клею є одним зі способів зниження напружень біля краю

клеєвого шва, що, своєю чергою, дає змогу застосовувати відносно прості математичні моделі напруженого стану клеєвого шару.

Розглянемо конструкцію, що має такі параметри: $E_x^{(i)} = E_y^{(i)} = 70$ ГПа; $\mu_{xy}^{(i)} = \mu_{yx}^{(i)} = 0,3$; $i = 1, 2$; $L = 30$ мм; $L_1 = L_2 = 50$ мм; $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм; $G_0 = 0,36$ ГПа; $E_0 = 0,9$ ГПа; $\delta_0 = 0,1$ мм; радіуси $R_1 = 50$ мм; $R_0 = R_1 + 0,5\delta_1 + 0,5\delta_0$; $R_2 = R_0 + 0,5\delta_2 + 0,5\delta_0$. До з'єднання прикладається поздовжня сила F_0 , рівномірно розподілена по коловій координаті.

На рис. 2.3.3 показано фрагмент двовимірної осесиметричної скінченно-елементної моделі.

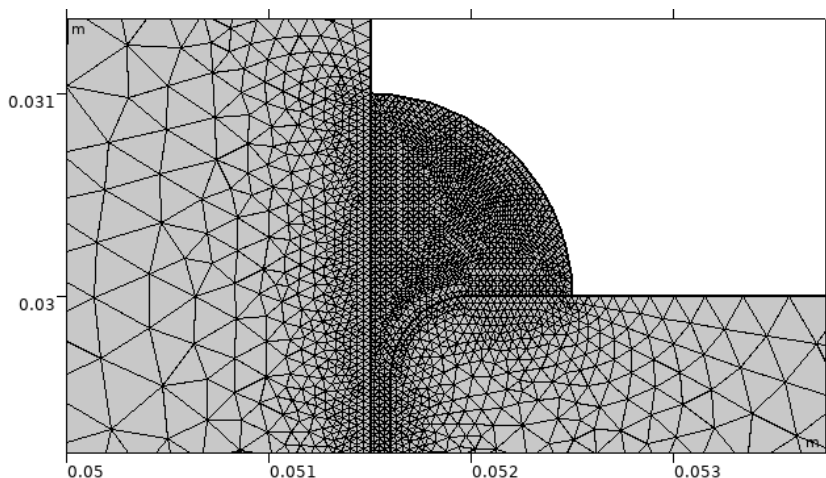


Рис. 2.3.3. Фрагменти сітки скінченно-елементної моделі

У клеєвому шарі сітку створено більш дрібною з тією метою, щоби мати можливість дослідити НДС клеєвого шару біля краю з'єднання. Скінченно-елементна модель конструкції доповнюється напливом клею в обох кінцях шва у формі чверті круга радіусом $5\delta_0$. Характерний розмір скінченного елемента в клеєвому шарі становить $0,2\delta_0$.

На рис. 2.3.4 зображено графіки дотичних (а) і нормальних (b) напружень у серединній поверхні клейового шару, які розраховано за запропонованою аналітичною моделлю. Напруження наведено в безрозмірній формі як відношення діючих напружень τ_0 і σ_0 до дотичних напружень $\frac{F_0}{4\pi R_0 L}$, які мали б місце при рівномірному розподілі напружень по серединній поверхні клейового шару. Напруження σ_1 і σ_2 у цьому випадку мало відрізняються від напружень σ_0 і майже не відрізняються на графіку, і тому на рисунку їх не показано, а показано їх середнє значення σ_0 .

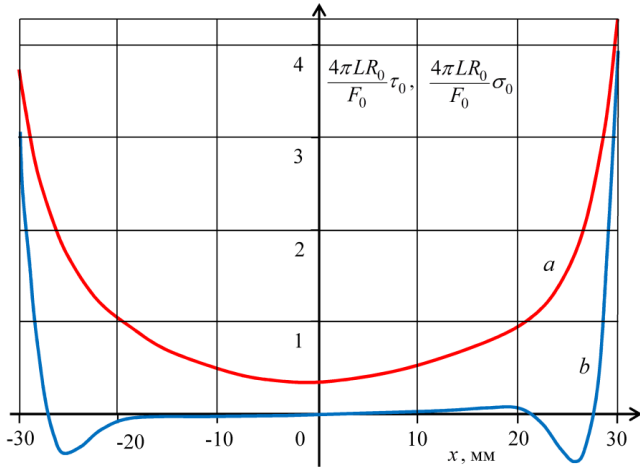


Рис. 2.3.4. Напруження в клейовому шарі

На рис. 2.3.5. показано напруження в околі одного з країв шва. Безперервними лініями показано графіки дотичних (а) і нормальних (b) напружень у серединній поверхні клейового шару, які обчислено за запропонованою моделлю. Пунктирними лініями показано графіки напружень τ_0 , σ_1 і σ_2 , які обчислено за допомогою МСЕ. Напруження τ_0 розраховувалися в серединній поверхні клейового шару, а напруження σ_1 і σ_2 – на поверхнях з'єднаних деталей.

Стрибки напружень за межами області склеювання обумовлені зміненням геометрії клейового шару, такими як фаска й наплив клею. Стрибки на графіках мають локальний характер і не перевищують значень на краю клейового шару.

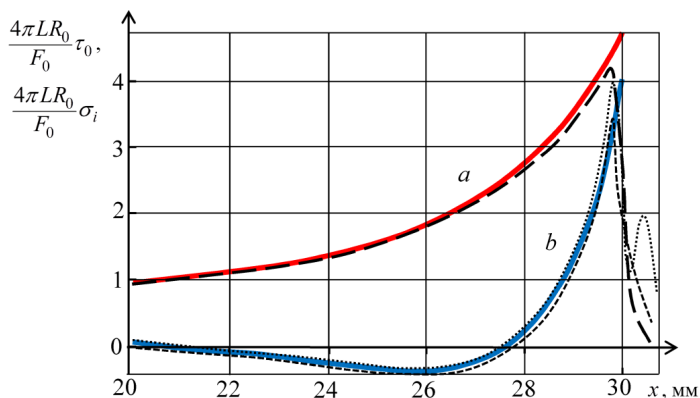


Рис. 2.3.5. Напруження в клейовому шарі біля краю шва

Якщо клейового напливу немає, то, відповідно до умов парності дотичних напружень, дотичні напруження на краю шва дорівнюють нулю й набувають максимуму на відстані близько товщини клейового шару від краю клейового шва. При цьому нормальні напруження в клеї σ_1 і σ_2 значною мірою різняться (навіть знаком) біля країв клейового шва, але практично збігаються в глибині області. При наявності напливу клею, товщина якого є більшою за товщину клейового шару в кілька разів, як у цьому випадку, дотичні напруження набувають максимуму на краю клейового шва, а напруження σ_1 і σ_2 відрізняються незначно одне від одного. Отже, можна зробити висновок про те, що запропонована модель краще описує НДС клейового шару при наявності клейового напливу.

На рис. 2.3.6 зображено розподіл напружень у клейовому шарі біля краю шва в моделі з фаскою. Для ілюстрації складної картини розподілу вибрано перші головні напруження.

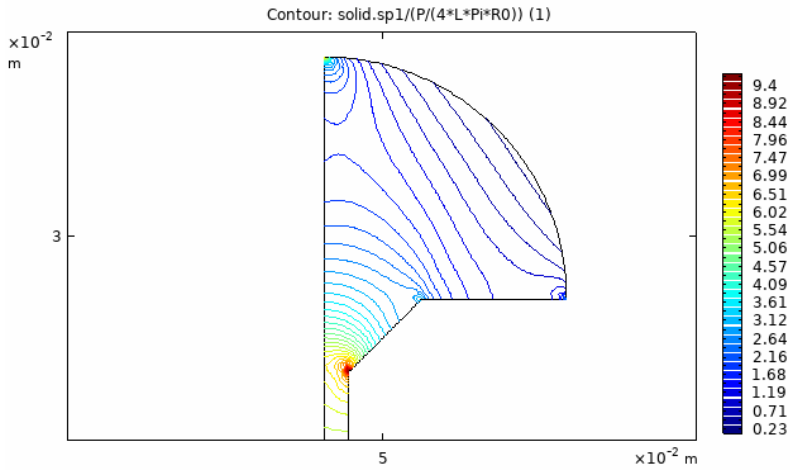


Рис. 2.3.6. Розподіл перших головних напружень у клеї біля краю шва у випадку гострої фаски

Як бачимо, наявність фаски суттєво впливає на розподіл напружень у крайовій зоні. Для порівняння розглянемо розподіл перших головних напружень у моделі зі скругленням кромки несного шару, що показано на рис. 2.3.7.

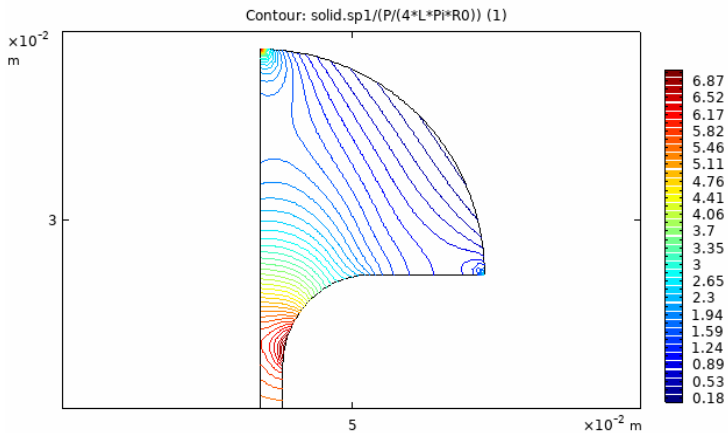


Рис. 2.3.7. Розподіл перших головних напружень у клеї біля краю шва у випадку скруглення

Зробимо висновки:

1. Запропоновано модель осесиметричного напруженого стану клейового з'єднання двох коаксіальних циліндричних оболонок. Розв'язок отримано в аналітичній формі. Розрахунки показали, що запропонована модель має хорошу точність і може бути використана для розв'язання задач проектування конструкцій.

2. Подальший розвиток цієї моделі може бути спрямований на уточнення моделі НДС клейового шару, використання теорії оболонок Тимошенка для опису НДС несних шарів, розрахунку сил інерції, температурних деформацій та ін. Одним з можливих напрямів узагальнення цього підходу є створення моделі напруженого стану так званого двозрізного з'єднання, тобто з'єднання трьох несних шарів, у якому центральний несний шар з зовнішньої і внутрішньої сторін з'єднується з двома накладками. Таке конструктивне рішення дає змогу значно зменшити згинальні моменти й відривні напруження в клейовому шарі.

2.4. З'єднання круглої накладки з пластиною, що містить круглий виріз.

Узагальнення моделей Фолькерсена і Голанда – Рейсснера на області з круговою симетрією

Тонкостінні конструкції, у тому числі й тонкі пластини, можуть містити дефекти у вигляді отворів і тріщин, які виникають у процесі експлуатації, наприклад унаслідок механічних пошкоджень. Ремонт локальних пошкоджень авіаційних конструкцій зазвичай проводиться за допомогою створення накладок. При цьому для зменшення концентрації напружень в околі отвору при виконанні ремонтних робіт отвору надають зазвичай круглої форми. Накладка бере на себе частину навантаження, розвантажуючи пошкоджену ділянку. З'єднання накладки з основною пластиною можна реалізувати по всій поверхні накладки (клеєві з'єднання внапуск [12, 22, 112]), лініями (зварні шви [135]) або в системі точок (заклепкові з'єднання). З'єднання накладки з

основною пластиною за допомогою клею забезпечує герметичність та аеродинамічну ефективність конструкції. Напружений стан подібних клеєних конструкцій зазвичай розраховується за допомогою МСЕ [56]. Зумовлено це в тому числі тим, що класичні аналітичні моделі напруженого стану з'єднань внапуск описують з'єднання прямокутної форми й припускають рівномірний розподіл напружень по ширині з'єднання [5, 13, 28]. У наявних двовимірних математичних моделях клейових з'єднань, де враховується нерівномірність напружень по ширині з'єднання [78, 95], також передбачається прямокутна форма області склеювання. Але осьова симетрія круглого отвору й концентричної накладки конструкції дає змогу використовувати полярну систему координат і зводити задачу до одновимірної.

2.4.1. Осесиметричне узагальнення моделі Фолькерсена

Розглянемо клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини, що показано на рис. 2.4.1. Основна пластина навантажена симетричним двоосьовим розтягом. Радіус отвору в основній пластині – R_1 , радіус накладки – R_2 . Основна пластина має товщину δ_1 , накладка має товщину δ_2 . Основу й накладку виконано з ізотропних матеріалів, модулі пружності яких – E_1 і E_2 , коефіцієнти Пуассона – μ_1 і μ_2 . Пластини з'єднано за допомогою з'єднувального шару, товщина якого – δ_0 , а модуль зсуву – G_0 .

Зазначимо, що на практиці найчастіше ремонт проводиться за допомогою того ж самого листового матеріалу, з якого зроблено основну конструкцію, тобто товщина і властивості накладки збігаються з товщиною і властивостями основи. Крім того, для зменшення вигину конструкції ремонт може здійснюватися за допомогою двох однакових накладок, що приклеюються до основи з двох сторін. У цьому випадку використовуються накладки, товщина яких у два рази менша від товщини основи, і внаслідок симетрії задачу можна звести до задачі, що розв'язується. Завдяки симетрії з'єднання в такому випадку

згинальні моменти в з'єднанні також є мінімальними і не впливають на НДС конструкції.

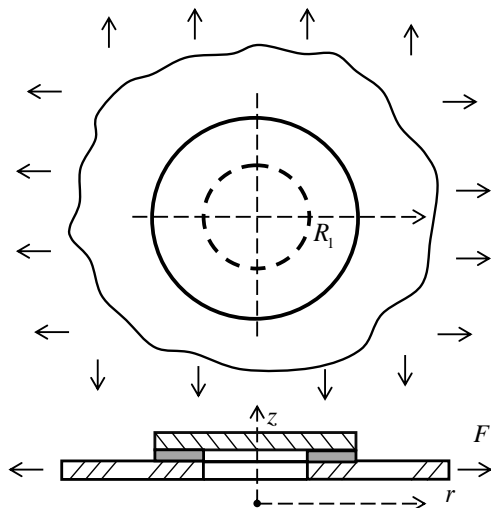


Рис. 2.4.1. Схема клейового з'єднання пластини з накладкою

Унаслідок осової симетрії тангенціальні зусилля в несних шарах Q_1 і Q_2 не залежать від кутової координати, дотичних зусиль у несних шарах немає. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині, а індекс «2» – круглій накладці в межах області склеювання $r \in [R_1; R_2]$.

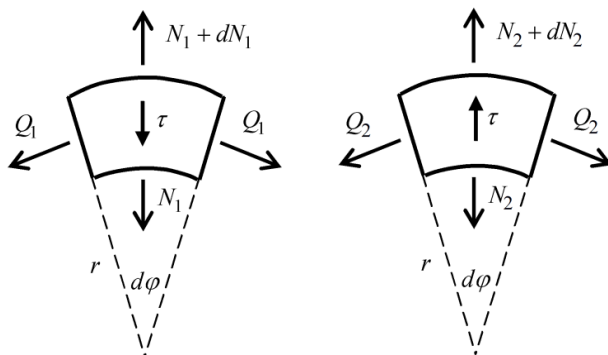


Рис. 2.4.2. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Задавши напрямок дотичних напружень у клейовому шарі, запишемо рівняння рівноваги елементів несних шарів у такому вигляді:

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \quad (2.4.1)$$

де N_k , Q_k – радіальні й тангенціальні зусилля в несному в шарі k , $k = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в радіальному напрямку.

Покладемо, що напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці переміщень сторін обох пластин, що прилягають до клейового шару:

$$\tau = P(U_1 - U_2), \quad (2.4.2)$$

де P – жорсткість клейового шару на зсув, $P = \frac{G_0}{\delta_0}$; U_k – радіальні переміщення шарів, $k = 1, 2$.

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд

$$N_k = B_k(\varepsilon_{k,r} + \mu_k \varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B_k(\varepsilon_{k,\varphi} + \mu_k \varepsilon_{k,r}), \quad (2.4.3)$$

де $B_k = \frac{\delta_k E_k}{1 - \mu_k^2}$ – мембранна жорсткість пластин; $\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ – радіальна й тангенціальна деформація шару k .

Кінематичні співвідношення теорії пружності визначають співвідношеннями

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \quad (2.4.4)$$

Рівняння (2.4.1) з використанням (2.4.4) і (2.4.2) можна подати в такому вигляді:

$$\frac{\tau}{B_1} + \frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} = 0, \quad -\frac{\tau}{B_2} + \frac{d^2 U_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} = 0. \quad (2.4.5)$$

Диференціюючи (2.4.2) і використовуючи наведені вище рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dr} - \left(\frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2} + \frac{1}{r^2} \right) \tau = 0. \quad (2.4.6)$$

Позначимо $\lambda = \sqrt{\frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2}}$, тоді рівняння (2.4.6) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) \tau = 0. \quad (2.4.7)$$

Якщо зробити заміну $t = \lambda r$, то рівняння (2.4.7) перетвориться на модифіковане рівняння Бесселя

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\xi}{dt} - \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \xi = 0, \quad (2.4.8)$$

де $\xi = \xi(t) = \tau\left(\frac{t}{\lambda}\right)$.

Загальний розв'язок модифікованого рівняння Бесселя (2.4.8) має вигляд

$$\xi(t) = C_1 I_1(t) + C_2 K_1(t),$$

де $I_1(t)$, $K_1(t)$ – модифіковані функції Бесселя; C_1, C_2 – довільні сталі.

Тоді розв'язок рівняння (2.4.6) можна подати у вигляді

$$\tau(r) = C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r). \quad (2.4.9)$$

Можна зазначити, що в задачі про напружений стан клейового з'єднання пластин прямокутної форми дотичні напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій [28]. У простій постановці задачі, у так званій моделі Фолькерсена [126], дотичні напруження в клеї можна подати у вигляді суперпозиції гіперболічного синуса й гіперболічного косинуса. У розглянутій осесиметричній задачі про кругову накладку аналогом цих гіперболічних та експоненціальних функцій є необмежені й неперіодичні модифіковані функції Бесселя.

Підставивши дотичні напруження (2.4.9) у рівняння (2.4.5), отримаємо лінійні диференціальні неоднорідні рівняння Ейлера

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} = -\frac{C_1}{B_i} I_1(\lambda r) - \frac{C_2}{B_i} K_1(\lambda r), \quad (2.4.10)$$

де $i=1,2$.

Спочатку знайдемо розв'язок однорідного рівняння Ейлера

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{U_i}{r^2} = 0. \quad (2.4.11)$$

Зробивши заміни $r = e^t$, $t = \ln r$ і $U_i(r) = \tilde{U}_i(t)$, зводимо рівняння (2.4.11)

до вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{U}_i}{dt^2} - \tilde{U}_i = 0.$$

Знаходимо розв'язок цього рівняння:

$$\tilde{U}_i(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}.$$

Тоді розв'язок рівняння (2.4.11) матиме вигляд

$$U_i^0(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r}.$$

Для знаходження розв'язку рівняння (2.4.10) використаємо метод варіації довільної сталої, тобто будемо шукати загальний розв'язок рівняння (2.4.10) у вигляді

$$U_i^*(r) = C_1(r)r + \frac{C_2(r)}{r}. \quad (2.4.12)$$

Запишемо систему

$$\begin{cases} C_1'(r)r + \frac{C_2'(r)}{r} = 0, \\ C_1'(r) - \frac{C_2'(r)}{r^2} = -\frac{C_1}{B_i} I_1(\lambda r) - \frac{C_2}{B_i} K_1(\lambda r). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо

$$\begin{cases} C_1'(r) = -\frac{C_1}{2B_i} I_1(\lambda r) - \frac{C_2}{2B_i} K_1(\lambda r), \\ C_2'(r) = \frac{C_1 r^2}{2B_i} I_1(\lambda r) + \frac{C_2 r^2}{2B_i} K_1(\lambda r). \end{cases}$$

Інтегруючи отримані співвідношення за змінною r , отримаємо

$$\begin{cases} C_1(r) = -\frac{C_1}{2B_i \lambda} I_0(\lambda r) + \frac{C_2}{2B_i \lambda} K_0(\lambda r), \\ C_2(r) = \frac{C_1 r^2}{2B_i \lambda} I_2(\lambda r) - \frac{C_2 r^2}{2B_i \lambda} K_2(\lambda r). \end{cases}$$

Тоді розв'язок рівняння (2.4.12) запишемо у вигляді

$$U_i^*(r) = \frac{C_1 r}{2B_i \lambda} [I_2(\lambda r) - I_0(\lambda r)] - \frac{C_2 r}{2B_i \lambda} [K_2(\lambda r) - K_0(\lambda r)].$$

Використовуючи рекурентні співвідношення для функцій Бесселя, отримаємо

$$U_i^*(r) = -\frac{C_1}{B_i \lambda^2} I_1(\lambda r) - \frac{C_2 r}{B_i \lambda^2} K_1(\lambda r).$$

Таким чином загальний розв'язок рівняння (2.4.10) набуває вигляду

$$\begin{aligned} U_1(r) &= -C_1 g_{1,1}(r) - C_2 g_{2,1}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\ U_2(r) &= C_1 g_{1,2}(r) + C_2 g_{2,2}(r) + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\text{де } g_{1,k}(r) = \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}, \quad g_{2,k}(r) = \frac{K_1(\lambda r)}{\lambda^2 B_k}.$$

Переміщення у внутрішній ($r < R_1$) і зовнішній ($r > R_2$) областях, тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями деформації круглих пластин

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0.$$

Позначимо радіальні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання U_3 , а радіальні переміщення основної пластини за межами з'єднання – U_4 . Наведені вище рівняння Ейлера мають такі розв'язки:

$$U_3(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, U_4(r) = c_3 r + \frac{c_4}{r}. \quad (2.4.14)$$

Переміщення (2.4.13) і (2.4.14), а також співвідношення (2.4.4) і (2.4.3) дають можливість знайти зусилля в основній пластині й накладці як в області склеювання, так і за її межами:

$$N_k = B_k \left[\frac{dU_k}{dr} + \mu_1 \frac{U_k}{r} \right], Q_k = B_k \left[\frac{U_k}{r} + \mu_k \frac{dU_k}{dr} \right], \text{ де } B_k = \frac{\delta_k E_k}{1 - \mu_k^2}, k = 1, 2, 3, 4;$$

$$N_1(r) = -C_1 f_{1,1}(r) + C_2 f_{2,1}(r) + C_3 f_{3,1} + C_4 f_{4,1}(r);$$

$$N_2(r) = C_1 f_{1,2}(r) - C_2 f_{2,2}(r) + C_3 f_{3,2} + C_4 f_{4,2}(r);$$

$$N_3(r) = c_1 f_{3,3} + c_2 f_{4,3}(r);$$

$$N_4(r) = c_3 f_{3,4} + c_4 f_{4,4}(r);$$

$$Q_1(r) = C_1 \tilde{f}_{1,1}(r) + C_2 \tilde{f}_{2,1}(r) + C_3 f_{3,1} - C_4 f_{4,1}(r);$$

$$Q_2(r) = -C_1 \tilde{f}_{1,2}(r) - C_2 \tilde{f}_{2,2}(r) + C_3 f_{3,2} - C_4 f_{4,2}(r);$$

$$Q_3(r) = c_1 f_{3,3} - c_2 f_{4,3}(r);$$

$$Q_4(r) = c_3 f_{3,4} - c_4 f_{4,4}(r),$$

де

$$f_{1,k}(r) = \frac{r \lambda I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r}, \quad f_{2,k}(r) = \frac{r \lambda K_0(\lambda r) + K_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r},$$

$$f_{3,k} = B_k(1 + \mu_k), \quad f_{4,k}(r) = -\frac{B_k(1 - \mu_k)}{r^2},$$

$$\tilde{f}_{1,k}(r) = \frac{-\mu_k r \lambda I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r}, \quad \tilde{f}_{2,k}(r) = \frac{\mu_k r \lambda K_0(\lambda r) - K_1(\lambda r)(1 - \mu_k)}{\lambda^2 r}.$$

Сталі C_1, C_2, C_3, C_4 і c_1, \dots, c_4 знаходимо з крайових умов та умов сполучення переміщень і зусиль на межах областей.

Уважатимемо, що основна пластина має радіус R_3 . Крайові умови на зовнішній межі основної пластини мають вигляд

$$N_4(R_3) = F.$$

Умови на межі області склеювання й основної пластини мають такий вигляд:

$$U_1(R_2) - U_4(R_2) = 0; \quad N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0; \quad N_2(R_2) = 0.$$

Умови на межі області склеювання й отвору мають вигляд

$$U_2(R_1) - U_3(R_1) = 0; \quad N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \quad N_1(R_1) = 0.$$

Ще одну сталу знаходимо з умов рівності нулю поздовжніх переміщень накладки на початку координат ($r = 0$):

$$c_2 = 0.$$

Отримаємо систему з семи лінійних рівнянь відносно семи невідомих сталих C_1, C_2, C_3, C_4 , і c_1, c_3, c_4 :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{3,4} & f_{4,4}(R_3) \\ -g_{1,1}(R_2) & -g_{2,1}(R_2) & R_2 & \frac{1}{R_2} & 0 & -R_2 & -\frac{1}{R_2} \\ -f_{1,1}(R_2) & f_{2,1}(R_2) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_2) & 0 & -f_{3,4} & -f_{4,4}(R_2) \\ f_{1,2}(R_2) & -f_{2,2}(R_2) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_2) & 0 & 0 & 0 \\ g_{1,2}(R_1) & g_{2,2}(R_1) & R_1 & \frac{1}{R_1} & R_1 & 0 & 0 \\ f_{1,2}(R_1) & -f_{2,2}(R_1) & f_{3,2} & f_{4,2}(R_1) & f_{3,3} & 0 & 0 \\ -f_{1,1}(R_1) & f_{2,1}(R_1) & f_{3,1} & f_{4,1}(R_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ c_1 \ c_3 \ c_4)^T, \quad \mathbf{V} = (F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

З метою перевірки й верифікації запропонованої математичної моделі та виявлення особливостей напруженого стану конструкції розглянемо модельну задачу. Задаючи геометрію області, покладемо, що основна пластина має дуже великий радіус R_3 .

Параметри задачі: $R_1 = 30$ мм, $R_2 = 50$ мм, $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм, $\delta_0 = 0,1$ мм, $E = 70$ ГПа (алюмінієвий сплав), $\mu = 0,28$, $E_0 = 0,8$ ГПа, $G_0 = 0,3125$ ГПа. Погонні розтяжні зусилля F прикладені по периметру основної пластини, зовнішній радіус якої будемо вважати нескінченно великим ($R_3 = \infty$). Для верифікації було створено скінченно-елементну модель (рис. 2.4.3). Фрагмент скінченно-елементної сітки біля краю з'єднання показано на рис. 2.4.4.

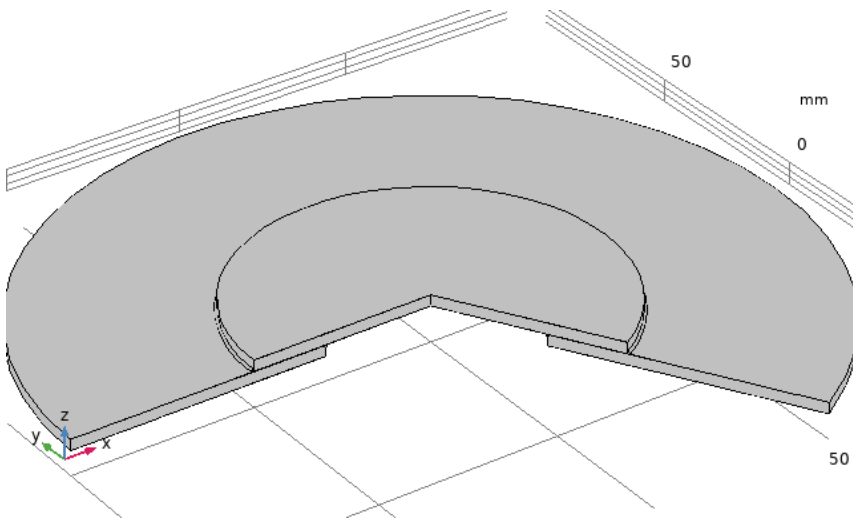


Рис. 2.4.3. Схема конструкції

На рис. 2.4.5 зображено графіки дотичних напружень у клейовому шарі, розрахованих за запропонованою моделлю (а), а також за допомогою МСЕ (б). Напруження на графіках показано в безрозмірній формі.

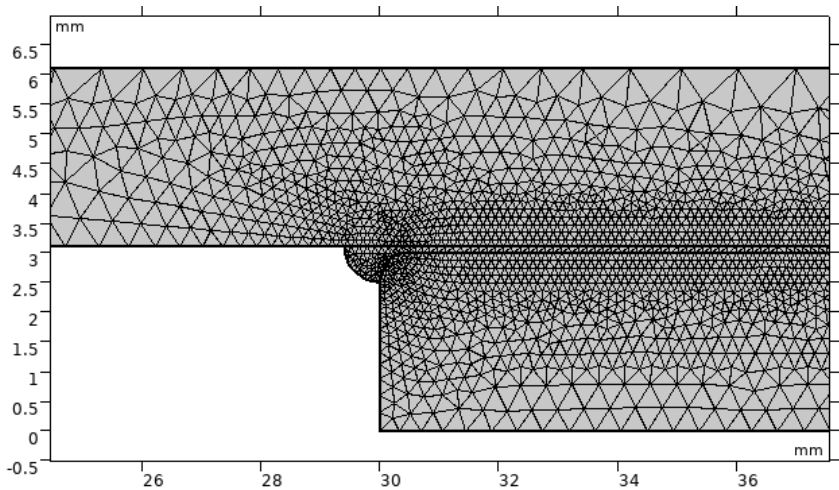


Рис. 2.4.4. Фрагмент скінченно-елементної моделі

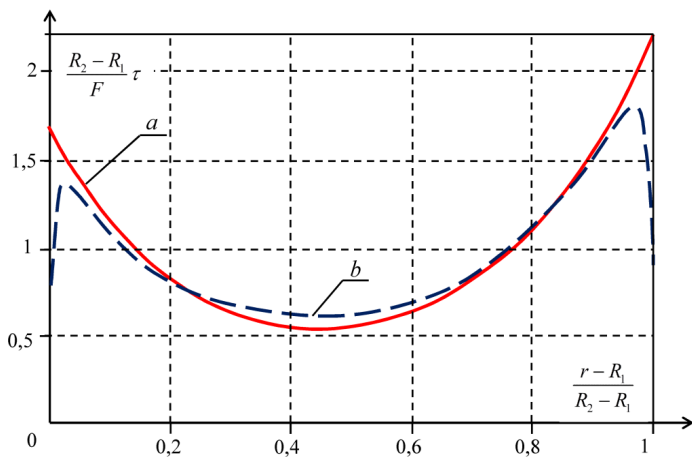


Рис. 2.4.5. Дотичні напруження в клеї

Обчислення показали, що напруження, розраховані за допомогою запропонованої моделі й за допомогою скінченно-елементного моделювання, збігаються майже у всій області склеювання. Відмінності спостерігаються лише в невеликих областях біля країв клейового шва, причому довжина цієї області –

порядку товщини клейового шару. Виявлені відмінності не перевищують кількох відсотків, і на графіках результати практично збігаються. При цьому запропонований у роботі підхід дає дещо завищені результати, що є прийнятним для задач проектування. Описані невеликі відмінності між результатами можна пояснити тим, що зовнішній край клейового шва має вільну від навантаження межу, унаслідок чого дотичні напруження на краю клейового шару мають дорівнювати нулю, що не може відобразити запропонована модель. Ця особливість моделювання напруженого стану клею залежностями (4.4) є добре відомою, і її можна подолати використанням точніших підходів до опису напруженого стану клейового шару [5, 6, 139].

Для ілюстрації того, як накладка розвантажує отвір, розглянемо графіки відношень радіальних і тангенціальних зусиль в основній пластині. На рис. 2.4.6 радіальні й тангенціальні зусилля показано в безрозмірній формі в деякому околі отвору. Очевидно, що на нескінченності маємо рівномірний напружений стан $N_4 = Q_4 = F$. Відношення радіальних зусиль до F позначено на графіку літерою «а», а відношення тангенціальних зусиль до F – літерою «b».

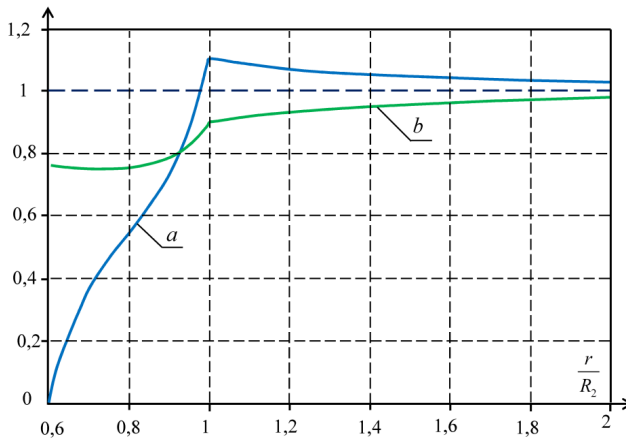


Рис. 2.4.6. Напруження в основній пластині в околі отвору:

$$a = \frac{N}{F}, \quad b = \frac{Q}{F}$$

Злам на графіках відповідає межі накладки. У випадку відсутності накладки на межі отвору нормальні зусилля були б нульовими, а тангенціальні дорівнювали б $2F$. У цьому випадку маємо лише незначне збільшення радіальних зусиль до $1,1F$. Тобто, як і слід було очікувати, накладка істотно розвантажує отвір. Розрахунки показують, що в накладці над отвором $Q_3 = N_3 < 0,9F$.

Зробимо висновки:

1. Запропоновано модель осесиметричного напруженого стану пластини, що має круглий отвір, який внапуск закрито приклеєною коаксіальною круглою накладкою. Задачу зведено до лінійного диференціального рівняння відносно дотичних напружень у клейовому шарі. Це рівняння має аналітичний розв'язок у функціях Бесселя.

2. Особливістю задачі є те, що, на відміну від з'єднань балок при однонапрявленому навантаженні, не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку через клейовий шар. Накладка дещо розвантажує отвір, знижуючи тангенціальні напруження в основній пластині в околі отвору. Ступінь розвантаження, вочевидь, залежить від геометричних і пружних параметрів елементів конструкції.

2.4.2. Осесиметричне узагальнення моделі Голанда – Рейсснера

У задачі, розглянутій у попередньому підрозділі, не враховуються згин конструкції й відривні напруження в клейовому шарі. Тут опишемо більш загальну модель, у якій урахуються перелічені фактори. За сукупністю гіпотез цю модель можна вважати узагальненням класичної моделі Голанда – Рейсснера на область із круговою симетрією.

Розглянемо клейове з'єднання двох круглих пластин однакової товщини, зображене на рис. 2.4.1. Основна пластина навантажена симетричним двоосьовим розтягом. Радіус отвору в основній пластині дорівнює R_1 , радіус

накладки – R_2 . Уважатимемо, що обидві пластини (основна й накладка) мають однакову товщину δ , і їх вироблено з однакового ізотропного матеріалу. Між пластинами знаходиться з'єднувальний (клеювий) шар, товщина якого δ_0 .

Завдяки осевій симетрії тангенціальні зусилля в пластинах Q_1 і Q_2 не залежать від кутової координати, дотичних зусиль немає. Нижній індекс «1» відповідає основній пластині, а індекс «2» – накладці в межах області склеювання $r \in [R_1; R_2]$.

На рис. 2.4.7 показано зусилля, напруження й розподілені згинальні моменти, які діють на диференціальний елемент основної пластини в області склеювання.

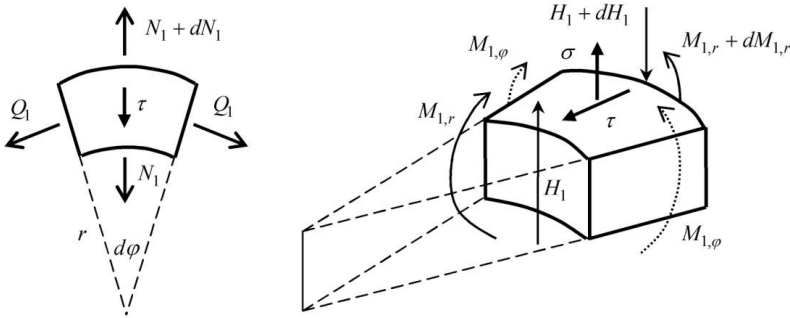


Рис. 2.4.7. Рівновага диференціальних елементів з'єднання

Рівняння рівноваги сил, що діють на елементи пластин у межах області склеювання в напрямку радіальної осі, мають вигляд

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0, \quad (2.4.15)$$

де N_k , Q_k – відповідно радіальні й тангенціальні нормальні зусилля в пластині k , $k = 1, 2$; τ – дотичні напруження в клеювому шарі в радіальному напрямку.

Рівняння рівноваги моментів мають вигляд

$$\frac{M_{1,r} - M_{1,\phi}}{r} + \frac{dM_{1,r}}{dr} - H_1 + \tau \frac{\delta}{2} = 0, \quad \frac{M_{2,r} - M_{2,\phi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \tau \frac{\delta}{2} = 0, \quad (2.4.16)$$

де $M_{k,r}$ і $M_{k,\varphi}$ – розподілені згинальні моменти в шарі k (див. рис. 2.4.7.); H_k – перерізувальне зусилля в пластині k .

Рівняння рівноваги диференціальних елементів у напрямку осі z :

$$-\sigma + \frac{H_1}{r} + \frac{dH_1}{dr} = 0, \quad \sigma + \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} = 0, \quad (2.4.17)$$

де σ – нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі.

Напруження в клейовому шарі будемо вважати пропорційними різниці переміщень сторін обох пластин, що прилягають до клейового шару:

$$\tau = P \left(U_1 - U_2 - \frac{\delta}{2} \frac{dW_2}{dr} - \frac{\delta}{2} \frac{dW_1}{dr} \right), \quad \sigma = K(W_2 - W_1), \quad (2.4.18)$$

де P і K – жорсткості клейового шару на зсув та на відрив, які обчислюються за формулами $P = \frac{G_0}{\delta_0}$, $K = \frac{E_0}{\delta_0}$, де відповідно E_0 і G_0 – модуль пружності й модуль зсуву клею; W_k – переміщення пластин у напрямку осі z ; U_k – поздовжні (радіальні) переміщення пластин, $k = 1, 2$.

Рівняння фізичного закону для пластин мають вигляд

$$N_k = B(\varepsilon_{k,r} + \mu\varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B(\varepsilon_{k,\varphi} + \mu\varepsilon_{k,r}), \quad (2.4.19)$$

де $B = \frac{\delta E}{1 - \mu^2}$ – мембранна жорсткість пластин; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластин; E – модуль пружності матеріалу пластин; $\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ – деформації пластини k у радіальному й тангенціальному напрямках.

Кінематичні співвідношення теорії пружності:

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \quad (2.4.20)$$

Рівняння згину круглих пластин мають вигляд

$$M_{k,r} = D \left(\frac{d^2 W_k}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW_k}{dr} \right), \quad M_{k,\varphi} = D \left(\mu \frac{d^2 W_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_k}{dr} \right), \quad (2.4.21)$$

де $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ – жорсткість пластин на згін.

Систему рівнянь (2.4.15)–(2.4.21) можна звести до двох рівнянь відносно напружень у клейовому шарі:

$$\frac{d^3\tau}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2\tau}{dr^2} - \left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r} \left(\frac{2P}{B} + \frac{P\delta^2}{2D} \right) \right) \tau = 0; \quad (2.4.22)$$

$$\frac{d^4\sigma}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\sigma}{dr} + \frac{2K}{D} \sigma = 0. \quad (2.4.23)$$

Ці рівняння мають аналітичні розв’язки

$$\tau = \frac{C_1}{r} + C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r); \quad (2.4.24)$$

$$\sigma = S_1 J_0(\lambda r) + S_2 Y_0(\lambda r) + S_3 I_0(\lambda r) + S_4 K_0(\lambda r), \quad (2.4.25)$$

де $\beta = \sqrt{\frac{P(\delta^2 B + 4D)}{2BD}}$; $\lambda = \sqrt[4]{-\frac{2K}{D}}$; I_1 , K_1 , I_0 , K_0 – модифіковані функції

Бесселя; J_0 , Y_0 – функції Бесселя і Неймана відповідно; C_1, C_2, C_3 і S_1, \dots, S_4 – довільні константи.

Можна зазначити, що в задачі про напружений стан клейового з’єднання пластин прямокутної форми напруження в клеї описуються лінійною комбінацією експоненціальних функцій, які мають у т. ч. комплексні аргументи. У осесиметричній задачі аналогом цих функцій є функції Бесселя.

Із рівнянь (2.4.15) з використанням (2.4.19) і (2.4.20) отримаємо рівняння

$$\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} - \frac{\tau}{B} = 0, \quad \frac{d^2 U_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{\tau}{B} = 0. \quad (2.4.26)$$

Підставивши в (2.4.26) дотичні напруження (2.4.24) і розв’язавши отримані неоднорідні диференціальні рівняння Ейлера, отримаємо

$$U_1(r) = g_1(r)C_1 + g_2(r)C_2 + g_3(r)C_3 + C_4 r + \frac{C_5}{r},$$

$$U_2(r) = -g_1(r)C_1 - g_2(r)C_2 - g_3(r)C_3 + C_6r + \frac{C_7}{r}, \quad (2.4.27)$$

де

$$g_1(r) = \frac{r(2\ln r - 1)}{4B}; \quad g_2(r) = \frac{I_1(\beta r)}{\beta^2 B}; \quad g_3(r) = \frac{K_1(\beta r)}{\beta^2 B}.$$

Підставивши (2.4.25) у друге рівняння (2.4.18), знайдемо різницю поперечних переміщень $W_2 - W_1$. Підставивши (2.4.27) у перше рівняння (2.4.18) і зінтегрувавши його, знайдемо суму поперечних переміщень $W_2 + W_1$. Це дає змогу знайти поперечні переміщення пластин в області склеювання:

$$\begin{aligned} W_1(r) = & C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) + C_3 f_3(r) + (C_4 - C_6) \frac{r^2}{2\delta} + (C_5 - C_7) \frac{\ln r}{\delta} + \\ & + C_8 - S_1 \frac{J_0(\lambda r)}{2K} - S_2 \frac{Y_0(\lambda r)}{2K} - S_3 \frac{I_0(\lambda r)}{2K} - S_4 \frac{K_0(\lambda r)}{2K}; \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

$$\begin{aligned} W_2(r) = & C_1 f_1(r) + C_2 f_2(r) + C_3 f_3(r) + (C_4 - C_6) \frac{r^2}{2\delta} + (C_5 - C_7) \frac{\ln r}{\delta} + \\ & + C_8 + S_1 \frac{J_0(\lambda r)}{2K} + S_2 \frac{Y_0(\lambda r)}{2K} + S_3 \frac{I_0(\lambda r)}{2K} + S_4 \frac{K_0(\lambda r)}{2K}, \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(r) = & \frac{r^2}{2\delta B} (\ln r - 1) - \frac{\ln r}{\delta P}; \quad f_2(r) = \left(\frac{2}{\delta \beta^2 B} - \frac{1}{\delta P} \right) \frac{I_0(\beta r)}{\beta}; \\ f_3(r) = & \left(\frac{1}{\delta P} - \frac{2}{\delta \beta^2 B} \right) \frac{K_0(\beta r)}{\beta}. \end{aligned}$$

Знаючи радіальні переміщення (2.4.27), поперечні переміщення (2.4.28), (2.4.29) пластин та напруження в клейовому шарі (2.4.24) і (2.4.25), знайдемо погонні згинальні моменти, а також радіальні й тангенціальні зусилля в пластинах зі співвідношень (2.4.21), (2.4.19) і (2.4.16).

Переміщення у внутрішній ($r < R_1$) і зовнішній ($r > R_2$) областях, тобто за межами області склеювання, описуються відомими рівняннями згину круглих пластин за відсутності перерізувальних сил

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = 0, \quad \frac{d^3W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} = 0.$$

Позначимо радіальні й поперечні переміщення накладки у внутрішній частині з'єднання (над отвором) як U_3 і W_3 , а переміщення основної пластини за межами області склеювання як U_4 і W_4 . Наведені вище рівняння мають загальні розв'язки

$$U_3(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad U_4(r) = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \quad (2.4.30)$$

$$W_3(r) = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2, \quad W_4(r) = s_4 + s_5 \ln r + s_6 r^2. \quad (2.4.31)$$

Підставивши (2.4.27) і (2.4.30) у (2.4.20) і (2.4.17), знаходимо радіальні й тангенціальні нормальні зусилля:

$$\begin{aligned} N_1(r) &= C_1 h_1(r) + C_2 h_2(r) + C_3 h_3(r) + C_4 h_4(r) + C_5 h_5(r), \\ N_2(r) &= -C_1 h_1(r) - C_2 h_2(r) - C_3 h_3(r) + C_6 h_4(r) + C_7 h_5(r), \\ N_3(r) &= c_1 h_4(r), \\ N_4(r) &= c_3 h_4(r) + h_5(r) c_4; \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

$$\begin{aligned} Q_1(r) &= C_1 \tilde{h}_1(r) + C_2 \tilde{h}_2(r) + C_3 \tilde{h}_3(r) + C_4 h_4(r) - C_5 h_5(r), \\ Q_2(r) &= -C_1 \tilde{h}_1(r) - C_2 \tilde{h}_2(r) - C_3 \tilde{h}_3(r) + C_6 h_4(r) - C_7 h_5(r), \\ Q_3(r) &= c_1 h_4(r), \\ Q_4(r) &= c_3 h_4(r) - h_5(r) c_4, \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

де

$$h_1(r) = \frac{(1+\mu) \ln r}{2} + \frac{1-\mu}{4}, \quad h_2(r) = \frac{I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{(1-\mu) I_1(\beta r)}{\beta^2 r},$$

$$h_3(r) = -\frac{K_0(\beta r)}{\beta} - \frac{(1-\mu)K_1(\beta r)}{\beta^2 r}, \quad h_4(r) = B(1+\mu), \quad h_5(r) = -\frac{B(1-\mu)}{r^2},$$

$$\tilde{h}_1(r) = \frac{(1+\mu)\ln r}{2} - \frac{1-\mu}{4}, \quad \tilde{h}_2(r) = \frac{\mu I_0(\beta r)}{\beta} + \frac{(1-\mu)I_1(\beta r)}{\beta^2 r},$$

$$\tilde{h}_3(r) = -\frac{\mu K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{(1-\mu)K_1(\beta r)}{\beta^2 r}.$$

Підставивши (2.4.29) і (2.4.31) у (2.4.21), знаходимо згинальні моменти:

$$M_{1,r}(r) = C_1 \xi_1(r) + C_2 \xi_2(r) - C_3 \xi_3(r) + (C_4 - C_6) \xi_4(r) + (C_7 - C_5) \xi_5(r) + \\ + S_1 \eta_1(r) + S_2 \eta_2(r) - S_3 \eta_3(r) + S_4 \eta_4(r),$$

$$M_{2,r}(r) = C_1 \xi_1(r) + C_2 \xi_2(r) - C_3 \xi_3(r) + (C_4 - C_6) \xi_4(r) + (C_7 - C_5) \xi_5(r) - \\ - S_1 \eta_1(r) - S_2 \eta_2(r) + S_3 \eta_3(r) - S_4 \eta_4(r), \quad (2.4.34)$$

$$M_{3,r}(r) = 2D(1+\mu)s_3,$$

$$M_{4,r}(r) = -\frac{D}{r^2}(1-\mu)s_5 + 2D(1+\mu)s_6;$$

$$M_{1,\varphi}(r) = C_1 \tilde{\xi}_1(r) + C_2 \tilde{\xi}_2(r) - C_3 \tilde{\xi}_3(r) + (C_4 - C_6) \tilde{\xi}_4(r) + (C_5 - C_7) \tilde{\xi}_5(r) + \\ + S_1 \tilde{\eta}_1(r) + S_2 \tilde{\eta}_2(r) - S_3 \tilde{\eta}_3(r) + S_4 \tilde{\eta}_4(r),$$

$$M_{2,\varphi}(r) = C_1 \tilde{\xi}_1(r) + C_2 \tilde{\xi}_2(r) - C_3 \tilde{\xi}_3(r) + (C_4 - C_6) \tilde{\xi}_4(r) + (C_5 - C_7) \tilde{\xi}_5(r) - \\ - S_1 \tilde{\eta}_1(r) - S_2 \tilde{\eta}_2(r) + S_3 \tilde{\eta}_3(r) - S_4 \tilde{\eta}_4(r), \quad (2.4.35)$$

$$M_{3,\varphi}(r) = 2D(1+\mu)s_3,$$

$$M_{4,\varphi}(r) = -\frac{D}{r^2}(1-\mu)s_5 + 2D(1+\mu)s_6,$$

де

$$\xi_1(r) = \frac{D}{2r^2\delta PB} \left[(2B + Pr^2)(1 - \mu) + 2Pr^2 \ln r(1 + \mu) \right],$$

$$\xi_2(r) = \frac{D(2P - \beta^2 B)}{r\delta\beta^2 PB} \left[\beta r I_0(\beta r) - I_1(\beta r)(1 - \mu) \right],$$

$$\xi_3(r) = \frac{D(2P - B\beta^2)}{r\delta\beta^2 PB} \left[\beta r K_0(\beta r) + K_1(\beta r)(1 - \mu) \right],$$

$$\xi_4(r) = D \frac{1 + \mu}{\delta}, \quad \xi_5(r) = D \frac{1 - \mu}{\delta r^2};$$

$$\eta_1(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\lambda r J_0(\lambda r) - J_1(\lambda r)(1 - \mu) \right], \quad \eta_2(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\lambda r Y_0(\lambda r) - Y_1(\lambda r)(1 - \mu) \right],$$

$$\eta_3(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\lambda r I_0(\lambda r) - I_1(\lambda r)(1 - \mu) \right], \quad \eta_4(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[-\lambda r K_0(\lambda r) - K_1(\lambda r)(1 - \mu) \right];$$

$$\tilde{\xi}_1(r) = \frac{D}{2r^2\delta PB} \left[-(2B + Pr^2)(1 - \mu) + 2Pr^2 \ln r(1 + \mu) \right],$$

$$\tilde{\xi}_2(r) = \frac{D(2P - \beta^2 B)}{r\delta\beta^2 PB} \left[\mu\beta r I_0(\beta r) + I_1(\beta r)(1 - \mu) \right],$$

$$\tilde{\xi}_3(r) = \frac{D(2P - B\beta^2)}{r\delta\beta^2 PB} \left[\mu\beta r K_0(\beta r) - K_1(\beta r)(1 - \mu) \right];$$

$$\tilde{\eta}_1(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\mu\lambda r J_0(\lambda r) + J_1(\lambda r)(1 - \mu) \right],$$

$$\tilde{\eta}_2(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\mu\lambda r Y_0(\lambda r) + Y_1(\lambda r)(1 - \mu) \right],$$

$$\tilde{\eta}_3(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} \left[\mu\lambda r I_0(\lambda r) + I_1(\lambda r)(1 - \mu) \right],$$

$$\tilde{n}_4(r) = \frac{D\lambda}{2Kr} [-\mu\lambda r K_0(\lambda r) + K_1(\lambda r)(1-\mu)].$$

Перерізувальні зусилля H_1 і H_2 знайдемо із (2.4.16) з урахуванням (2.4.24):

$$\begin{aligned} H_1(r) &= C_1 \mathcal{G}_1(r) + C_2 \mathcal{G}_2(r) I_1(\beta r) + C_3 \mathcal{G}_2(r) K_1(\beta r) - \\ &- \frac{D\lambda^3}{2K} [S_1 J_1(\lambda r) + S_2 Y_1(\lambda r) + S_3 I_1(\lambda r) - S_4 K_1(\lambda r)], \\ H_2(r) &= C_1 \mathcal{G}_1(r) + C_2 \mathcal{G}_2(r) I_1(\beta r) + C_3 \mathcal{G}_2(r) K_1(\beta r) + \\ &+ \frac{D\lambda^3}{2K} [S_1 J_1(\lambda r) + S_2 Y_1(\lambda r) + S_3 I_1(\lambda r) - S_4 K_1(\lambda r)], \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{G}_1(r) = \frac{\delta}{2r} + \frac{4D}{2r\delta B}, \quad \mathcal{G}_2(r) = \frac{2DP}{r\delta B} - \frac{D\beta^2}{r\delta} + \frac{P\delta}{2r}.$$

Перерізувальні зусилля H_3 і H_4 визначаємо за такою формулою:

$$H_m = D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 W_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_m}{dr} \right),$$

де $m = 3, 4$.

Отже, маємо

$$H_3 = 0, \quad H_4 = 0.$$

Константи C_1, C_2, \dots, C_8 , S_1, \dots, S_4 і c_1, \dots, c_4 , s_1, \dots, s_6 можна знайти із крайових умов, а також з умов спряження переміщень і зусиль на межах областей.

Будемо вважати, що основна пластина має зовнішній радіус R_3 . Нехай крайові умови на зовнішній межі основної пластини мають вигляд

$$N_4(R_3) = F; \quad W_4(R_3) = 0; \quad \left. \frac{dW_4}{dr} \right|_{r=R_3} = 0.$$

Умови на зовнішній межі області склеювання й основної пластини мають вигляд

$$U_1(R_2) - U_4(R_2) = 0; \quad W_1(R_2) - W_4(R_2) = 0; \quad \left(\frac{dW_1}{dr} - \frac{dW_4}{dr} \right) \Big|_{r=R_2} = 0;$$

$$M_{1,r}(R_2) - M_{4,r}(R_2) = 0; \quad N_1(R_2) - N_4(R_2) = 0;$$

$$H_2(R_2) = 0; \quad M_{2,r}(R_2) = 0; \quad N_2(R_2) = 0.$$

Умови на внутрішній межі області склеювання й на отворі мають вигляд

$$U_2(R_1) - U_3(R_1) = 0; \quad W_2(R_1) - W_3(R_1) = 0; \quad \left(\frac{dW_2}{dr} - \frac{dW_3}{dr} \right) \Big|_{r=R_1} = 0;$$

$$M_{2,r}(R_1) - M_{3,r}(R_1) = 0; \quad N_2(R_1) - N_3(R_1) = 0; \quad H_2(R_1) = 0;$$

$$H_1(R_1) = 0; \quad M_{1,r}(R_1) = 0; \quad N_1(R_1) = 0.$$

Ще дві константи знаходимо з умов рівності нулю радіальних переміщень накладки й скінченної величини її поперечних переміщень при $r = 0$:

$$c_2 = 0, \quad s_2 = 0.$$

Таким чином, маємо систему із двадцятьма лінійними рівнянь відносно двадцяти невідомих констант $C_1, \dots, C_8, S_1, \dots, S_4, c_1, c_3, c_4, s_1, s_3, \dots, s_6$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{20};$$

$$\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8 \ S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ c_1 \ c_3 \ c_4 \ s_1 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6)^T;$$

$$\mathbf{B} = (F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Тут $a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = a_{1,8} = a_{1,9} = a_{1,10} = a_{1,11} = a_{1,12} = a_{1,13} = a_{1,16} =$
 $= a_{1,17} = a_{1,18} = a_{1,19} = a_{1,20} = 0, \quad a_{1,14} = h_4(R_3), \quad a_{1,15} = h_5(R_3);$

$$\begin{aligned}
a_{2,1} &= a_{2,2} = a_{2,3} = a_{2,4} = a_{2,5} = a_{2,6} = a_{2,7} = a_{2,8} = a_{2,9} = a_{2,10} = a_{2,11} = a_{2,12} = a_{2,13} = a_{2,14} = \\
&= a_{2,15} = a_{2,16} = a_{2,17} = 0, \quad a_{2,18} = 1, \quad a_{2,19} = \ln R_3, \quad a_{2,20} = R_3^2; \\
a_{3,1} &= a_{3,2} = a_{3,3} = a_{3,4} = a_{3,5} = a_{3,6} = a_{3,7} = a_{3,8} = a_{3,9} = a_{3,10} = a_{3,11} = a_{3,12} = a_{3,13} = a_{3,14} = \\
&= a_{3,15} = a_{3,16} = a_{3,17} = 0, \quad a_{3,18} = 1, \quad a_{3,19} = R_3^{-1}, \quad a_{3,20} = 2R_3; \\
a_{4,1} &= g_1(R_2), \quad a_{4,2} = g_2(R_2), \quad a_{4,3} = g_3(R_2), \quad a_{4,4} = R_2, \quad a_{4,5} = R_2^{-1}, \\
a_{4,6} &= a_{4,7} = a_{4,8} = a_{4,9} = a_{4,10} = a_{4,11} = a_{4,12} = a_{4,13} = 0, \quad a_{4,14} = -R_2, \quad a_{4,15} = -R_2^{-1}, \\
& a_{4,16} = a_{4,17} = a_{4,18} = a_{4,19} = a_{4,20} = 0; \\
a_{5,1} &= f_1(R_2), \quad a_{5,2} = f_2(R_2), \quad a_{5,3} = f_3(R_2), \quad a_{5,4} = \frac{R_2^2}{2\delta}, \quad a_{5,5} = \frac{\ln R_2}{\delta}, \\
a_{5,6} &= -\frac{R_2^2}{2\delta}, \quad a_{5,7} = -\frac{\ln R_2}{\delta}, \quad a_{5,8} = 1, \quad a_{5,9} = -\frac{J_0(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{5,10} = -\frac{Y_0(\lambda R_2)}{2K}, \\
a_{5,11} &= -\frac{I_0(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{5,12} = -\frac{K_0(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{5,13} = a_{5,14} = a_{5,15} = a_{5,16} = a_{5,17} = 0, \quad a_{5,18} = -1, \\
& a_{5,19} = -\ln R_2, \quad a_{5,20} = -R_2^2; \\
a_{6,1} &= f_1'(R_2), \quad a_{6,2} = f_2'(R_2), \quad a_{6,3} = f_3'(R_2), \quad a_{6,4} = \frac{R_2}{\delta}, \quad a_{6,5} = \frac{1}{\delta R_2}, \\
a_{6,6} &= -\frac{R_2}{\delta}, \quad a_{6,7} = -\frac{1}{\delta R_2}, \quad a_{6,8} = 0, \quad a_{6,9} = -\frac{\lambda J_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{6,10} = \frac{\lambda Y_1(\lambda R_2)}{2K}, \\
a_{6,11} &= -\frac{\lambda I_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{6,12} = \frac{\lambda K_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{6,13} = a_{6,14} = a_{6,15} = a_{6,16} = a_{6,17} = a_{6,18} = 0, \\
& a_{6,19} = -\frac{1}{R_2}, \quad a_{6,20} = -2R_2; \\
a_{7,1} &= \xi_1(R_2), \quad a_{7,2} = \xi_2(R_2), \quad a_{7,3} = -\xi_3(R_2), \quad a_{7,4} = \xi_4(R_2), \quad a_{7,5} = -\xi_5(R_2), \\
a_{7,6} &= -\xi_4(R_2), \quad a_{7,7} = \xi_5(R_2), \quad a_{7,8} = 0, \quad a_{7,9} = \eta_1(R_2), \quad a_{7,10} = \eta_2(R_2),
\end{aligned}$$

$$a_{7,11} = -\eta_3(R_2), \quad a_{7,12} = \eta_4(R_2), \quad a_{7,13} = a_{7,14} = a_{7,15} = a_{7,16} = a_{7,17} = a_{7,18} = 0,$$

$$a_{7,19} = \frac{D}{R_2^2}(1 - \mu), \quad a_{7,20} = -2D(1 + \mu);$$

$$a_{8,1} = h_1(R_2), \quad a_{8,2} = h_2(R_2), \quad a_{8,3} = h_3(R_2), \quad a_{8,4} = h_4(R_2), \quad a_{8,5} = h_5(R_2),$$

$$a_{8,6} = a_{8,7} = a_{8,8} = a_{8,9} = a_{8,10} = a_{8,11} = a_{8,12} = a_{8,13} = 0, \quad a_{8,14} = -h_4(R_2), \quad a_{8,15} = -h_5(R_2)$$

,

$$a_{8,16} = a_{8,17} = a_{8,18} = a_{8,19} = a_{8,20} = 0;$$

$$a_{9,1} = \mathfrak{G}_1(R_2), \quad a_{9,2} = \mathfrak{G}_2(R_2)I_1(\beta R_2), \quad a_{9,3} = \mathfrak{G}_2(R_2)K_1(\beta R_2), \quad a_{9,4} = a_{9,5} = 0,$$

$$a_{9,6} = a_{9,7} = a_{9,8} = 0, \quad a_{9,9} = \frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{9,10} = \frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{9,11} = \frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_2)}{2K},$$

$$a_{9,12} = -\frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_2)}{2K}, \quad a_{9,13} = a_{9,14} = a_{9,15} = a_{9,16} = a_{9,17} = a_{9,18} = a_{9,19} = a_{9,20} = 0;$$

$$a_{10,1} = \xi_1(R_2), \quad a_{10,2} = \xi_2(R_2), \quad a_{10,3} = -\xi_3(R_2), \quad a_{10,4} = \xi_4(R_2), \quad a_{10,5} = -\xi_5(R_2),$$

$$a_{10,6} = -\xi_4(R_2), \quad a_{10,7} = \xi_5(R_2), \quad a_{10,8} = 0, \quad a_{10,9} = -\eta_1(R_2), \quad a_{10,10} = -\eta_2(R_2),$$

$$a_{10,11} = \eta_3(R_2), \quad a_{10,12} = -\eta_4(R_2), \quad a_{10,13} = a_{10,14} = a_{10,15} = a_{10,16} = a_{10,17} = a_{10,18} = 0,$$

$$a_{10,19} = a_{10,20} = 0;$$

$$a_{11,1} = -h_1(R_2), \quad a_{11,2} = -h_2(R_2), \quad a_{11,3} = -h_3(R_2), \quad a_{11,4} = h_4(R_2), \quad a_{11,5} = h_5(R_2),$$

$$a_{11,6} = a_{11,7} = a_{11,8} = a_{11,9} = a_{11,10} = a_{11,11} = a_{11,12} = a_{11,13} = a_{11,14} = a_{11,15} = a_{11,16} = a_{11,17} = 0,$$

$$a_{11,18} = a_{11,19} = a_{11,20} = 0;$$

$$a_{12,1} = -g_1(R_1), \quad a_{12,2} = -g_2(R_1), \quad a_{12,3} = -g_3(R_1), \quad a_{12,4} = a_{12,5} = 0, \quad a_{12,6} = R_1,$$

$$a_{12,7} = R_1^{-1}, \quad a_{12,8} = a_{12,9} = a_{12,10} = a_{12,11} = a_{12,12} = 0, \quad a_{12,13} = -R_1, \quad a_{12,14} = a_{12,15} = 0,$$

$$a_{12,16} = a_{12,17} = a_{12,18} = a_{12,19} = a_{12,20} = 0;$$

$$\begin{aligned}
a_{13,1} &= f_1(R_1), & a_{13,2} &= f_2(R_1), & a_{13,3} &= f_3(R_1), & a_{13,4} &= \frac{R_1^2}{2\delta}, & a_{13,5} &= \frac{\ln R_1}{\delta}, \\
a_{13,6} &= -\frac{R_1^2}{2\delta}, & a_{13,7} &= -\frac{\ln R_1}{\delta}, & a_{13,8} &= 1, & a_{13,9} &= \frac{J_0(\lambda R_1)}{2K}, & a_{13,10} &= \frac{Y_0(\lambda R_1)}{2K}, \\
a_{13,11} &= \frac{I_0(\lambda R_1)}{2K}, & a_{13,12} &= \frac{K_0(\lambda R_1)}{2K}, & a_{13,13} &= a_{13,14} = a_{13,15} = 0, & a_{13,16} &= -1, \\
a_{13,17} &= -\ln R_1, & a_{13,18} &= -R_1^2, & a_{13,19} &= a_{13,20} = 0; \\
a_{14,1} &= f_1'(R_1), & a_{14,2} &= f_2'(R_1), & a_{14,3} &= f_3'(R_1), & a_{14,4} &= \frac{R_1}{\delta}, & a_{14,5} &= \frac{1}{\delta R_1}, \\
a_{14,6} &= -\frac{R_1}{\delta}, & a_{14,7} &= -\frac{1}{\delta R_1}, & a_{14,8} &= 0, & a_{14,9} &= -\frac{\lambda J_1(\lambda R_1)}{2K}, & a_{14,10} &= -\frac{\lambda Y_1(\lambda R_1)}{2K}, \\
a_{14,11} &= \frac{\lambda I_1(\lambda R_1)}{2K}, & a_{14,12} &= -\frac{\lambda K_1(\lambda R_1)}{2K}, & a_{14,13} &= a_{14,14} = a_{14,15} = a_{14,16} = 0, \\
a_{14,17} &= -2R_1, & a_{14,18} &= -R_1^2, & a_{14,19} &= a_{14,20} = 0; \\
a_{15,1} &= \xi_1(R_1), & a_{15,2} &= \xi_2(R_1), & a_{15,3} &= -\xi_3(R_1), & a_{15,4} &= \xi_4(R_1), & a_{15,5} &= -\xi_5(R_1), \\
& & & & & & & & & , \\
a_{15,6} &= -\xi_4(R_1), & a_{15,7} &= \xi_5(R_1), & a_{15,8} &= 0, & a_{15,9} &= -\eta_1(R_1), & a_{15,10} &= -\eta_2(R_1), \\
a_{15,11} &= \eta_3(R_1), & a_{15,12} &= -\eta_4(R_1), & a_{15,13} &= a_{15,14} = a_{15,15} = a_{15,16} = 0, & a_{15,17} &= -2D(1+\mu), \\
& & & & & & & & & a_{15,18} = a_{15,19} = a_{15,20} = 0; \\
a_{16,1} &= -h_1(R_1), & a_{16,2} &= -h_2(R_1), & a_{16,3} &= -h_3(R_1), & a_{16,4} &= a_{16,5} = 0, & a_{16,6} &= h_4(R_1), \\
a_{16,7} &= h_5(R_1), & a_{16,8} &= a_{16,9} = a_{16,10} = a_{16,11} = a_{16,12} = 0, & a_{16,13} &= -h_4(R_1), & a_{16,14} &= 0, \\
& & & & & & & & & a_{16,15} = a_{16,16} = a_{16,17} = a_{16,18} = a_{16,19} = a_{16,20} = 0; \\
a_{17,1} &= \mathcal{G}_1(R_1), & a_{17,2} &= \mathcal{G}_2(R_1)I_1(\beta R_1), & a_{17,3} &= \mathcal{G}_2(R_1)K_1(\beta R_1), & a_{17,4} &= a_{17,5} = 0,
\end{aligned}$$

$$a_{17,6} = a_{17,7} = a_{17,8} = 0, \quad a_{17,9} = \frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{17,10} = \frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{17,11} = \frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_1)}{2K}$$

,

$$a_{17,12} = -\frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{17,13} = a_{17,14} = a_{17,15} = a_{17,16} = a_{17,17} = a_{17,18} = a_{17,19} = a_{17,20} = 0;$$

$$a_{18,1} = \mathcal{G}_1(R_1), \quad a_{18,2} = \mathcal{G}_2(R_1)I_1(\beta R_1), \quad a_{18,3} = \mathcal{G}_2(R_1)K_1(\beta R_1), \quad a_{18,4} = a_{18,5} = a_{18,6} = 0,$$

$$a_{18,7} = a_{18,8} = 0, \quad a_{18,9} = -\frac{D\lambda^3 J_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{18,10} = -\frac{D\lambda^3 Y_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{18,11} = -\frac{D\lambda^3 I_1(\lambda R_1)}{2K},$$

$$a_{18,12} = \frac{D\lambda^3 K_1(\lambda R_1)}{2K}, \quad a_{18,13} = a_{18,14} = a_{18,15} = a_{18,16} = a_{18,17} = a_{18,18} = a_{18,19} = a_{18,20} = 0;$$

$$a_{19,1} = \xi_1(R_1), \quad a_{19,2} = \xi_2(R_1), \quad a_{19,3} = -\xi_3(R_1), \quad a_{19,4} = \xi_4(R_1), \quad a_{19,5} = -\xi_5(R_1)$$

,

$$a_{19,6} = -\xi_4(R_1), \quad a_{19,7} = \xi_5(R_1), \quad a_{19,8} = 0, \quad a_{19,9} = \eta_1(R_1), \quad a_{19,10} = \eta_2(R_1),$$

$$a_{19,11} = -\eta_3(R_1), \quad a_{19,12} = \eta_4(R_1), \quad a_{19,13} = a_{19,14} = a_{19,15} = a_{19,16} = a_{19,17} = a_{19,18} = a_{19,19} = 0,$$

$$a_{19,20} = 0;$$

$$a_{20,1} = h_1(R_1), \quad a_{20,2} = h_2(R_1), \quad a_{20,3} = h_3(R_1), \quad a_{20,4} = h_4(R_1), \quad a_{20,5} = h_5(R_1),$$

$$a_{20,6} = a_{20,7} = a_{20,8} = a_{20,9} = a_{20,10} = a_{20,11} = a_{20,12} = a_{20,13} = a_{20,14} = a_{20,15} = a_{20,16} = a_{20,17} = 0,$$

$$a_{20,18} = a_{20,19} = a_{20,20} = 0.$$

Для верифікації моделі й аналізу особливостей напруженого стану кругової накладки розглянемо модельну задачу. При дослідженні напруженого стану з'єднання бажано мінімізувати вплив на напружений стан клейового шару умов на зовнішній межі основної пластини. Тому покладемо, що основна пластинка має достатньо великий радіус R_3 .

Параметри задачі: $R_1 = 40$ мм, $R_2 = 60$ мм, $R_3 = 5R_2$, $\delta = 3$ мм, $\delta_0 = 0,1$ мм, $E = 70$ ГПа (алюмінієвий сплав), $\mu = 0,28$, $E_0 = 0,8$ ГПа, $G_0 = 0,3125$ ГПа. Радіальні розтяжні зусилля F прикладені вздовж периметра основної пластини.

Розрахунки НДС конструкції виконано двома способами – за допомогою запропонованої моделі й за допомогою скінченно-елементного моделювання. Як і в попередній задачі, при створенні скінченно-елементної моделі введено фаски з округленням кромки та вплив надлишків видавленого клею на краю шва.

На рис. 2.4.8 показано графіки нормальних напружень у клейовому шарі, які розраховано за допомогою створеної аналітичної моделі (AM) і скінченно-елементної моделі (FEM), які подано в безрозмірній формі – у формі відношення до рівномірно розподілених по шву напружень навантаження.

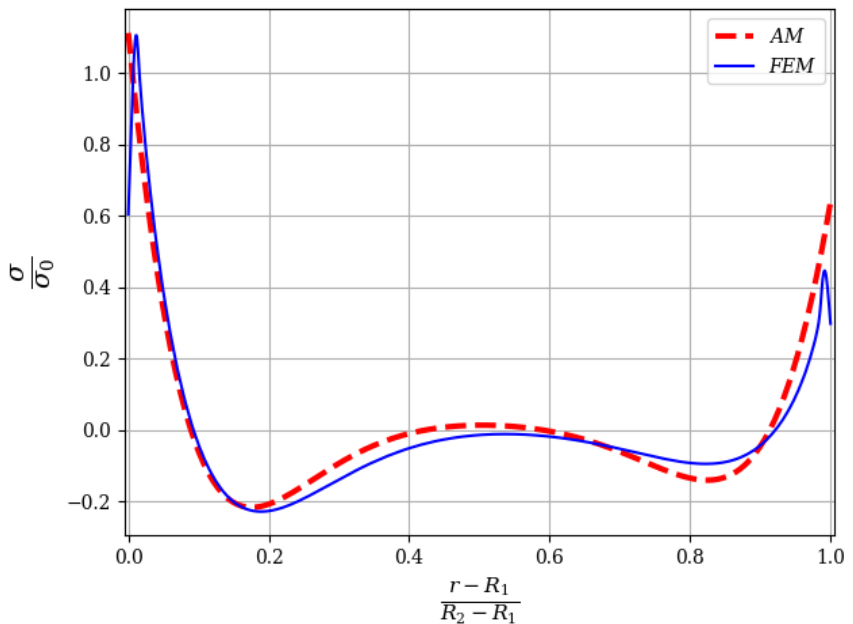


Рис. 2.4.8. Нормальні напруження в клейовому шарі

Дотичні напруження в клейовому шарі показано на рис. 2.4.9. Також наведено порівняння напружень, розрахованих за двома методами.

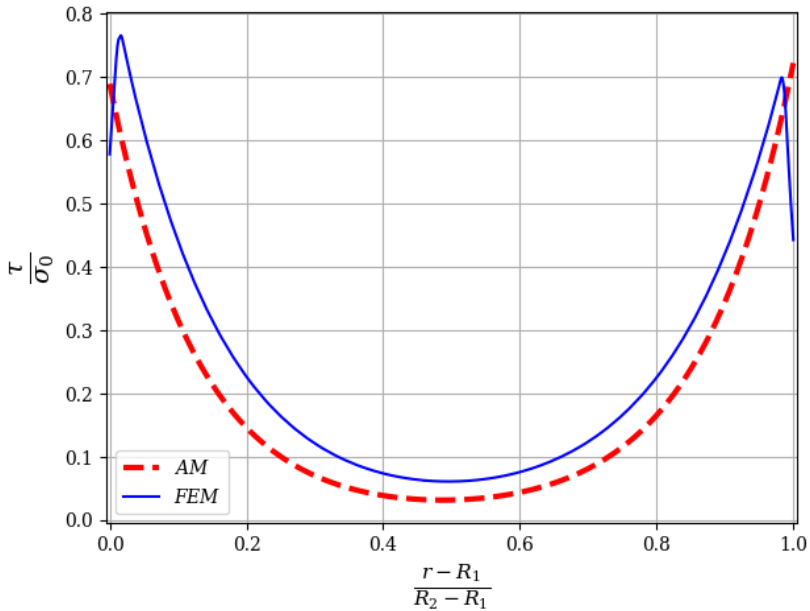


Рис. 2.4.9. Дотичні напруження в клейовому шарі

Із рисунків видно, що дотичні й нормальні напруження в клеї – максимальні на межі області склеювання. Ця особливість напруженого стану клейових з'єднань стрижнів добре відома і, як бачимо, є наявною також і при передаванні зусиль з пластини на круглу накладку. Порівняння показує хорошу узгодженість результатів розрахунків, що підтверджує адекватність запропонованої моделі.

З'єднання забезпечує передавання зусиль з основної пластини на накладку, що забезпечує розвантаження основної пластини. Але конструкція є несиметричною, і внаслідок ексцентриситету сил при навантаженні зазнає згину, який впливає на напружений стан обох пластин.

Нормальні напруження в пластинах у радіальному ($\sigma_{k,r}$) і коловому ($\sigma_{k,\varphi}$) напрямках за теорією Кірхгофа – Лява описуються залежностями

$$\sigma_{k,r}(r,z) = \frac{N_k(r)}{\delta} - \frac{12z}{\delta^3} M_{k,r}(r), \quad \sigma_{k,\varphi}(r,z) = \frac{Q_k(r)}{\delta} - \frac{12z}{\delta^3} M_{k,\varphi}(r).$$

На межі отвору напруження $\sigma_{1,r}$ дорівнюють нулю, тому за відсутності накладки напруження $\sigma_{1,\varphi}$ будуть вдвічі більшими за напруження на зовнішній віддаленій межі пластини $\sigma_0 = \frac{F}{\delta}$. На рис. 2.4.10 зображено графіки напружень $\sigma_{1,r}$, а на рис. 2.4.11 – графіки напружень $\sigma_{1,\varphi}$ в основній пластині в серединній площині ($z=0$) і на зовнішніх поверхнях пластини ($z=\pm 0,5\delta$) в околі клейового з'єднання. Напруження показано в безрозмірній формі у вигляді відношення до напружень на зовнішній межі σ_0 . Безрозмірна координата горизонтальної осі графіка обчислюється за формулою $\bar{r} = \frac{r-R_1}{R_2-R_1}$, область склеювання відповідає інтервалу $\bar{r} \in [0; 1]$.

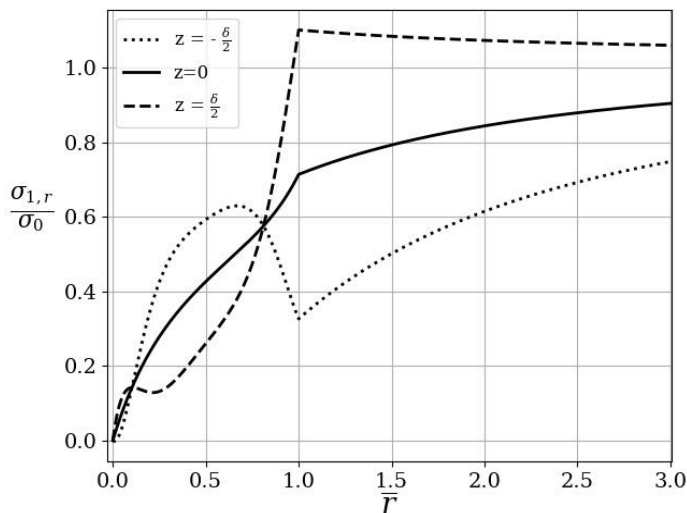


Рис. 2.4.10. Напруження $\sigma_{1,r}$ в основній пластині

Напруження в колісовому напрямку в основній пластині $\sigma_{1,\varphi}$ набувають максимальних значень на межі отвору. При цьому завдяки передаванню зусиль на накладку напруження в серединній площині $\sigma_{1,\varphi}(R_1, 0)$ є меншими за $2\sigma_0$. Але внаслідок згину конструкції на протилежній до накладки стороні пластини $\left(z = -\frac{\delta}{2}\right)$ напруження $\sigma_{1,\varphi}$ майже в 2,4 раза перевищують σ_0 .

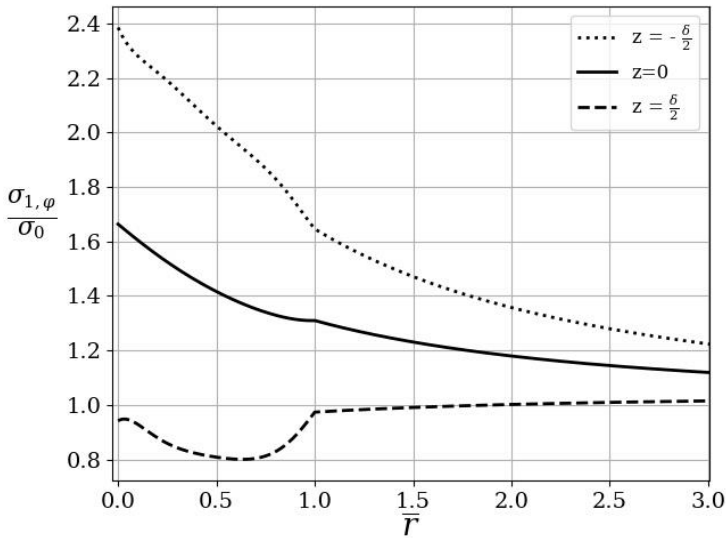


Рис. 2.4.11. Напруження $\sigma_{1,\varphi}$ в основній пластині

Було проведено розрахунки напруженого стану з'єднання при різних значеннях товщини накладки (інші параметри конструкції при цьому залишалися незмінними). Метою цього параметричного дослідження було вивчення впливу вигину конструкції на максимальні напруження $\sigma_{1,\varphi}$ на межі отвору. Графік залежності максимальних напружень $\sigma_{1,\varphi}$, у точці $r = R_1$, $z = 0,5 \delta_1$ від відношення товщини накладки до товщини основної пластини δ_2/δ_1 зображено на рис. 2.4.12.

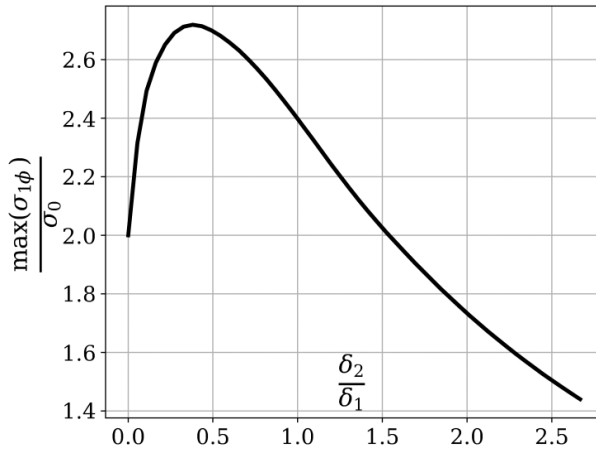


Рис. 2.4.12. Залежність максимальних колових напружень на отворі від відносної товщини накладки δ_2/δ_1

Зробимо висновки:

1. Запропоновано модель НДС осесиметричного напруженого стану конструкції, яка складається з пластини, що містить круглий виріз, і приклеєної внапуск коаксіальної круглої накладки. Задачу зведено до лінійних диференціальних рівнянь відносно дотичних і нормальних напружень у клейовому шарі, які мають аналітичні розв'язки в функціях Бесселя.

2. Особливістю задачі є те, що, на відміну від з'єднань стрижнів, не всі зусилля з основної пластини передаються на накладку, накладка лише частково розвантажує основну пластину біля отвору. Частина навантаження, яку приймає накладка, залежить від піддатливості клею. Установлено, що згин конструкції під дією навантаження суттєво впливає на напружений стан пластини та накладки. Для зменшення впливу згину доцільно застосовувати дві накладки з обох сторін основної пластини.

2.4.3. Осесиметричне узагальнення моделей

Фольккерсена і Голанда – Рейсснера

У цій роботі побудовано аналітичний розв'язок задачі про осесиметричний напружений стан пластини, ослабленої круглим вирізом і посиленої у місці вирізу з обох сторін концентричними круглими накладками, приклеєними внапуск. Застосування накладок з обох сторін з'єднання, як відомо, є кращим конструктивним рішенням, оскільки дає змогу зменшити вигин конструкції і знизити відривні напруження в клейовому шарі [4, 28].

Розглянемо конструкцію, зображену на рис. 2.4.13. Радіус отвору в основній пластині позначимо R_1 , а радіус накладок – R_2 . Припустимо, що основна пластина має товщину $2\delta_1$, а накладки – товщину δ_2 . Між пластиною й накладками знаходиться клейовий шар, товщину якого позначимо δ_0 . Зовнішній радіус основної пластини позначимо R_3 . Якщо радіус R_3 є достатньо великим, то крайові умови зовнішньої межі пластини будуть мінімально впливати на напружений стан з'єднання.

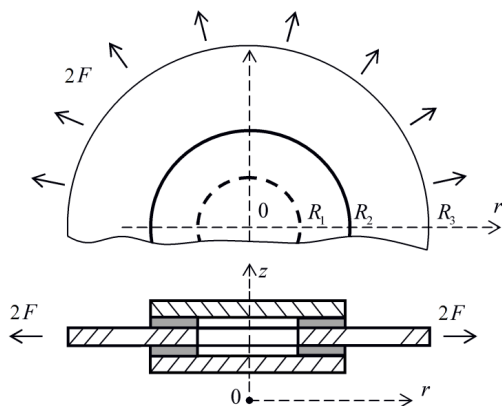


Рис. 2.4.13. Схема конструкції

Основна пластина навантажена розтяжними зусиллями $2F$, прикладеними по радіусу R_3 . Розглянемо область склеювання $r \in [R_1; R_2]$. Завдяки осьовій

симетрії зусилля в несних шарах не залежать від кутової координати. Унаслідок симетрії конструкції основна пластина не піддається вигину під впливом прикладеного до неї навантаження. А самі накладки можуть згинатися. З огляду на симетрію можемо розглянути половину конструкції, яка розташована по одну сторону серединної площини основної пластини (рис. 2.4.14). У цьому випадку товщина основної пластини дорівнюватиме δ_2 .

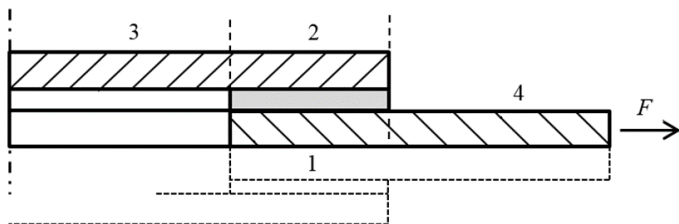


Рис. 2.4.14. Схема конструкції

В області склеювання $r \in [R_1; R_2]$ нижній індекс "1" відповідає основній пластині, а індекс "2" – круглій накладці. За межами області склеювання $r \in [R_2; R_3]$ основну пластину позначимо індексом «4», накладку над отвором $r \in [0; R_1]$ – індексом "3".

Зусилля, згинальні моменти і напруження з боку клейового шару, що діють на диференціальний елемент нижньої накладки, Показано на рис. 2.4.15.

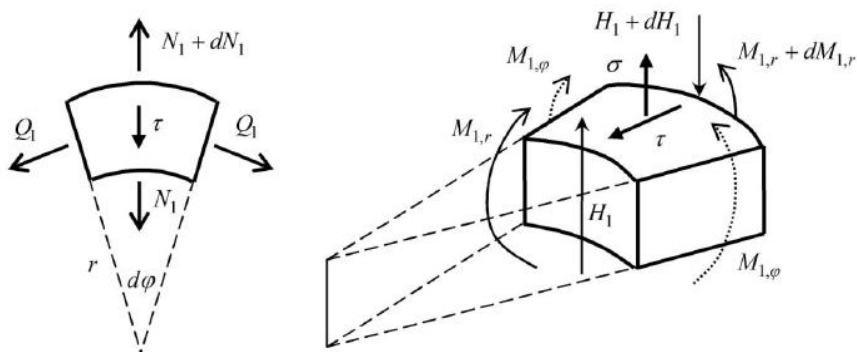


Рис. 2.4.15. Диференціальний елемент накладки

Рівняння рівноваги диференціальних елементів накладки й основної пластини мають такий вигляд:

$$\frac{N_1 - Q_1}{r} + \frac{dN_1}{dr} - \tau = 0, \quad \frac{N_2 - Q_2}{r} + \frac{dN_2}{dr} + \tau = 0; \quad (2.4.36)$$

$$\frac{M_{2,r} - M_{2,\varphi}}{r} + \frac{dM_{2,r}}{dr} - H_2 + \frac{\delta_2}{2} \tau = 0, \quad \frac{H_2}{r} + \frac{dH_2}{dr} + \sigma = 0, \quad (2.4.37)$$

де N_k , Q_k – нормальні зусилля в шарі k у радіальному й коловому напрямках, $k = 1, 2$;

τ , σ – дотичні й нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі;

$M_{k,r}$ – згинальний момент у шарі k у радіальному напрямку;

$M_{k,\varphi}$ – згинальний момент у шарі k в коловому напрямку;

H_k – перерізувальні зусилля в шарі k .

Дотичні й нормальні напруження в клейовому шарі (постійні по товщині клею) є пропорційними різниці поздовжніх і, відповідно, поперечних переміщень сторін пластин, повернутих до клейового шару:

$$\tau = P_1 \left(U_1 - U_2 - \frac{\delta_2}{2} \frac{dW_2}{dr} \right), \quad \sigma = P_2 W_2, \quad (2.4.38)$$

де P_1 і P_2 – жорсткість клейового шару на зсув і на відрив, $P_1 = \frac{G_0}{\delta_0}$,

$P_2 = \frac{E_0}{\delta_0 (1 - \mu_0^2)}$ (E_0 , G_0 , μ_0 – модуль пружності, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона клею);

W_2 – поперечні переміщення накладки (поперечні переміщення основної пластини дорівнюють нулю);

U_k – поздовжні (радіальні) переміщення шарів, $k = 1, 2$.

Закону Гука для пластин запишемо у вигляді

$$N_k = B_k (\varepsilon_{k,r} + \mu_k \varepsilon_{k,\varphi}), \quad Q_k = B_k (\varepsilon_{k,\varphi} + \mu_k \varepsilon_{k,r}), \quad (2.4.39)$$

де $B_k = \frac{\delta_k E_k}{1 - \mu_k}$ – мембранна жорсткість пластин;

μ_k – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, k , $k = 1, 2$;

E_k – модуль пружності матеріалу пластини k ;

$\varepsilon_{k,r}$ і $\varepsilon_{k,\varphi}$ – деформації шару k у радіальному й коловому напрямках.

Радіальні переміщення зв'язані з деформаціями залежностями

$$\varepsilon_{k,r} = \frac{dU_k}{dr}, \quad \varepsilon_{k,\varphi} = \frac{U_k}{r}. \quad (2.4.40)$$

Рівняння осесиметричного вигину накладки (відповідно до теорії Кірхгофа – Лява):

$$M_{2,r} = D_2 \left(\frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{\mu_2}{r} \frac{dW_2}{dr} \right); \quad M_{2,\varphi} = D_2 \left(\mu_2 \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} \right), \quad (2.4.41)$$

де $D_2 = \frac{E_2 \delta_2^3}{12(1 - \mu_2^2)}$ – згинальна жорсткість накладки.

За межами області склеювання, на ділянках 3 і 4 (див. рис. 2.4.14), напружено-деформований стан накладки й основної пластини описується відомими рівняннями осесиметричного деформування круглих пластин [19].

Диференціюючи співвідношення (2.4.39) і використовуючи рівняння (2.4.36)–(2.4.38) та співвідношення (2.4.40) і (2.4.41), одержимо систему диференціальних рівнянь відносно напружень у клейовому шарі:

$$\frac{d^3 \tau}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 \tau}{dr^2} - \left(a_1 + \frac{1}{r^2} \right) \frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{a_1}{r} \right) \tau + Pa_2 \sigma = 0; \quad (2.4.42)$$

$$\frac{d^4 \sigma}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \sigma}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\sigma}{dr} + a_3 \sigma - Ka_2 \left(\frac{\tau}{r} + \frac{d\tau}{dr} \right) = 0; \quad (2.4.43)$$

де $a_1 = P_1 \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{\delta_2^2}{4D_2} \right)$, $a_2 = -\frac{\delta_2}{2D_2}$, $a_3 = \frac{P_2}{D_2}$.

Виразивши σ із співвідношення (2.4.42) і підставивши їх у рівняння (2.4.43), отримуємо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^7 \tau}{dr^7} + \frac{4}{r} \frac{d^6 \tau}{dr^6} - \left(a_1 + \frac{6}{r^2} \right) \frac{d^5 \tau}{dr^5} + \left(\frac{18}{r^3} - \frac{3a_1}{r} \right) \frac{d^4 \tau}{dr^4} + \left(\frac{3a_1}{r^2} - \frac{51}{r^4} + a_3 \right) \frac{d^3 \tau}{dr^3} + \\ + \left(\frac{126}{r^5} - \frac{6a_1}{r^3} + \frac{2a_3}{r} \right) \frac{d^2 \tau}{dr^2} + \left(\frac{9a_1}{r^4} - \frac{225}{r^6} - \frac{a_3}{r^2} + a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3 \right) \frac{d\tau}{dr} + \\ + \left(\frac{225}{r^7} - \frac{9a_1}{r^5} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3}{r} \right) \tau = 0. \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.4.44) шукаємо у вигляді

$$\tau = \sum_{n=1}^6 C_n K_1(\lambda_n r) + \frac{C_7}{r}, \quad (2.4.45)$$

де $K_1(\lambda_n r)$ – модифіковані функції Бесселя другого роду (функції Макдональда);

C_n – довільні константи.

Підставивши (2.4.45) у (2.4.44), отримуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^6 - a_1 \lambda^4 + a_3 \lambda^2 + a_2^2 P_1 P_2 - a_1 a_3 = 0,$$

коренями якого є коефіцієнти λ_n , $n = 1, \dots, 6$, що входять у суму (2.4.45).

З рівняння (2.4.42) знаходимо нормальні (відривні) напруження в клейовому шарі

$$\sigma = \sum_{n=1}^6 C_n \alpha_n K_0(\lambda_n r), \quad (2.4.46)$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{\lambda_n^3 - a_1 \lambda_n}{P_1 a_2}.$$

Значимо, що напружений стан стрижнів або балок, з'єднаних внапуск за допомогою пружного з'єднувального шару [8, 9], описується за допомогою лінійних комбінацій експоненціальних функцій. У цій задачі внаслідок кругової

симетрії аналогами експоненціальних функцій є необмежені й неперіодичні модифіковані функції Бесселя.

З рівняння (2.4.36) з використанням співвідношень (2.4.39) та (2.4.40) отримаємо

$$\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} - \frac{U_1}{r^2} - \frac{\tau}{B_1} = 0, \quad \frac{d^2 U_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_2}{dr} - \frac{U_2}{r^2} + \frac{\tau}{B_2} = 0.$$

Розв'язок системи даних рівнянь має вигляд

$$U_1 = \frac{1}{B_1} \sum_{n=1}^6 \frac{C_n}{\lambda_n^2} K_1(\lambda_n r) + \frac{C_7}{4B_1} r(2 \ln r - 1) + C_8 r + \frac{C_9}{r},$$

$$U_2 = \frac{1}{B_2} \sum_{n=1}^6 \frac{C_n}{\lambda_n^2} K_1(\lambda_n r) - \frac{C_7}{4B_2} r(2 \ln r - 1) + C_{10} r + \frac{C_{11}}{r}.$$

Зі співвідношення (2.4.38) знайдемо поперечні переміщення накладки W_2 . Використовуючи співвідношення для напружень у клейовому шарі (2.4.45), (2.4.46), поздовжні й поперечні переміщення накладки та основної пластини, з (2.4.39)–(2.4.41) знайдемо радіальні й колові зусилля в пластинах і згинальні моменти в накладці. Перерізувальні зусилля в накладці H_2 знаходимо з рівнянь (2.4.37).

За межами області склеювання маємо дві області – основна пластина ($R_2 \leq r \leq R_3$) і накладка над вирізом ($0 \leq r \leq R_1$). Індексом «4» позначено переміщення й силові фактори в основній пластині за межами області склеювання, індексом «3» – переміщення й силові фактори в накладці над вирізом. Переміщення на цих ділянках описуються відомими рівняннями деформації круглих пластин за відсутності перерізувальних сил [111]:

$$\frac{d^2 U_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_m}{dr} - \frac{U_m}{r^2} = 0, \quad \frac{d^3 W_3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W_3}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW_3}{dr} = 0,$$

де $m = 3, 4$.

Розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$U_3 = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad U_4 = c_3 r + \frac{c_4}{r}, \quad W_3 = s_1 + s_2 \ln r + s_3 r^2.$$

Згинальні моменти, радіальні й колові зусилля знаходимо, використовуючи співвідношення (2.4.39)–(2.4.41).

Невідомі коефіцієнти знаходимо із крайових умов та умов спряження на межах областей.

У точці $r=0$ поперечні переміщення мають бути обмежені за величиною, а радіальні переміщення дорівнюють нулю. Звідси випливає, що

$$c_2 = 0, \quad s_2 = 0.$$

На зовнішній межі основної пластини задано розтягувальні радіальні зусилля

$$N_4(R_3) = F,$$

а на межах області склеювання маємо умови

$$N_4(R_2) = N_1(R_2), \quad U_4(R_2) = U_1(R_2), \quad N_2(R_2) = M_{2,r}(R_2) = N_2(R_2) = 0,$$

$$N_1(R_1) = 0, \quad U_2(R_1) = U_3(R_1), \quad W_2(R_1) = W_3(R_1), \quad \left. \frac{dW_2}{dr} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{dW_3}{dr} \right|_{r=R_1},$$

$$M_{2,r}(R_1) = M_{3,r}(R_1), \quad N_2(R_1) = N_3(R_1), \quad H_2(R_1) = H_3(R_1),$$

Крім того, радіальні переміщення $U_1(r)$, $U_2(r)$ і поперечні переміщення накладки $W_2(r)$ мають перетворювати співвідношення (2.4.38) на тотожність.

Звідси випливає, що

$$C_7 = 0, \quad -C_9 + C_{11} + \frac{C_7}{P_1} = 0, \quad C_{10} - C_8 = 0.$$

Таким чином, маємо замкнену систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Для аналізу напруженого стану з'єднання та верифікації запропонованої аналітичної моделі розглянемо з'єднання двох алюмінієвих ($E^{(1)} = E^{(2)} = 70$ ГПа,

коефіцієнт Пуассона, $\mu = 0,28$) пластин. Товщини пластин $\delta_1 = \delta_2 = 3$ мм. Пластини склеєно клеєм, пружні параметри якого $G_0 = 0,3125$ ГПа, $E_0 = 0,8$ ГПа і товщина $\delta_0 = 0,1$ мм. Радіус отвору в пластині $R_1 = 20$ мм, радіус накладок $R_2 = 50$ мм. При розрахунках уважатимемо, що основна пластина має нескінченно великий радіус $R_3 = \infty$ мм. Це припущення пояснюється тим, що вплив отвору й накладок на напружено-деформований стан основної пластини має локальний характер. І в разі відносно великої пластини будь-якої форми при значному віддаленні вирізу від її краю можемо вважати, що основна пластина є нескінченно великою. По зовнішній межі основної пластини задано розтягувальні радіальні зусилля F . Очевидно, що в цьому випадку й радіальні зусилля в основній пластині на нескінченності також дорівнюють F .

Для верифікації запропонованої аналітичної моделі напружено-деформованого стану з'єднання було створено осесиметричну скінченно-елементну модель. Геометричну форму конструкції показано на рис. 2.4.16. Зовнішній радіус $R_3 = 3R_2$.

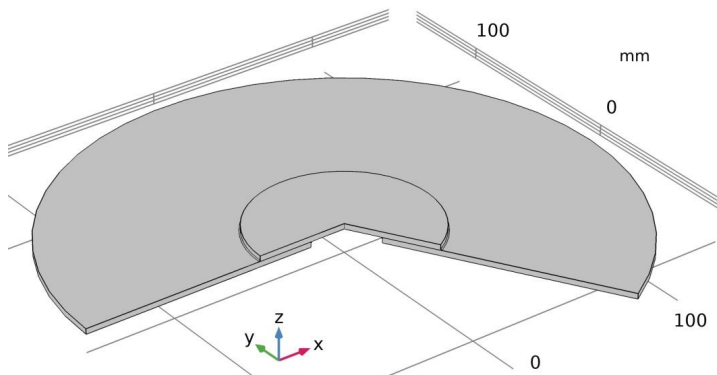


Рис. 2.4.16. Конструкція з'єднання накладки із пластиною (фрагмент)

У скінченно-елементній моделі з'єднання внесено фаски й надлишки видавленого клею. На рис. 2.4.17 зображено фрагмент моделі в околі краю клейового шва. Оскільки в клейовому шарі дуже великі градієнти напружень,

то найбільший розмір елемента клейового шару вибрано досить малим, таким, що дорівнює половині товщини клейового шару.

Дотичні напруження в клейовому шарі τ зображено на рис. 2.4.18.

Суцільною лінією показано напруження, які обчислено за запропонованою в роботі аналітичною моделлю (АМ). Пунктирною лінією показано дотичні напруження в серединній площині клейового шва, обчислені згідно зі скінченно-елементною моделлю (FEM). Напруження наведено в безрозмірній формі у вигляді відношення діючих напружень до деяких напружень $\tau^* = F/(R_2 - R_1)$. Тут F – погонні зусилля, прикладені до торця основної пластини; $R_2 - R_1$ – ширина клейового шва.

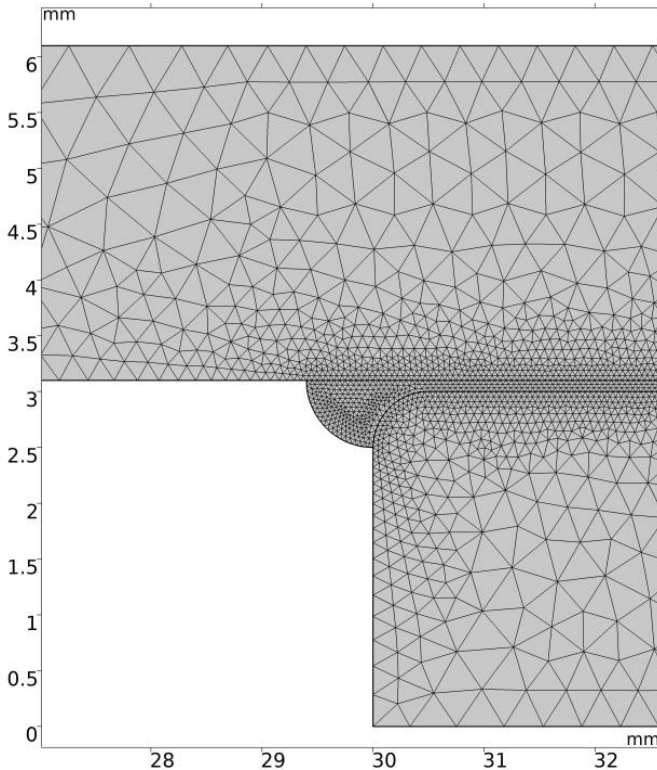


Рис. 2.4.17. Фрагмент скінченно-елементної моделі

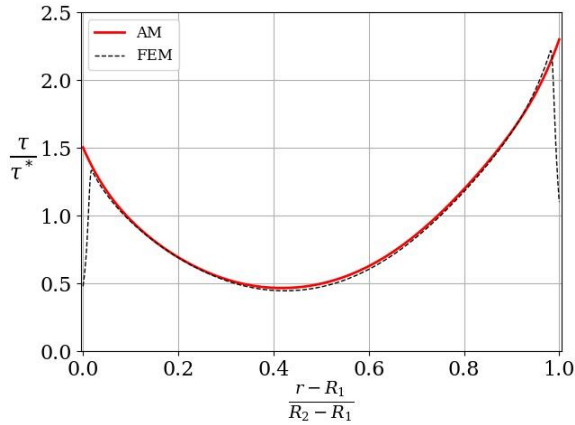


Рис. 2.4.18. Дотичні напруження в клейовому шарі

Нормальні напруження в клеї зображено на рис. 2.4.19.

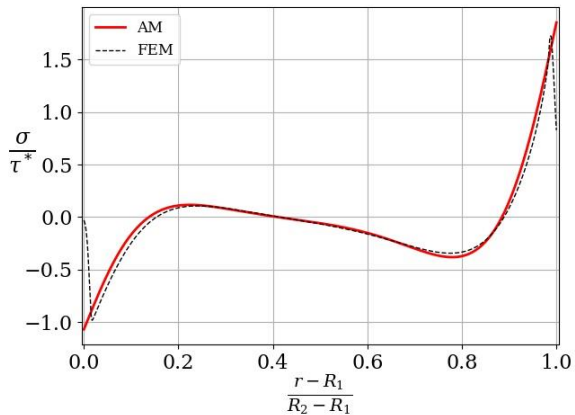


Рис. 2.4.19. Нормальні напруження в клейовому шарі

Як і на попередньому графіку, суцільною лінією показано напруження, обчислені за запропонованою в роботі аналітичною моделлю (AM), пунктирною лінією – дотичні напруження в серединній площині клейового шва, обчислені згідно зі скінченно-елементною моделлю (FEM).

Слід зазначити, що на цих графіках дотичні напруження набувають максимальних значень на краях області склеювання. Однак, з іншого боку,

якщо зовнішній край клейового шару вільний від навантаження, то відповідно до закону парності дотичних напружень дотичні напруження на межі клейового шару мають дорівнювати нулю. Точніші математичні моделі напруженого стану клейового шару, а також розбиття клейового шару біля межі з'єднання на кінцеві елементи з розміром, значно меншим за товщину клейового шару, виявляють цей ефект. Дослідження показують, що відносні напруження набувають максимуму на відстані порядку товщини клейового шару від краю шва. Однак максимальні значення напружень при цьому мало відрізняються від напружень, розрахованих за більш простими моделями.

Підсилення отвору накладкою зазвичай застосовується для зменшення напруження на межі отвору. Добре відомо, що за відсутності накладки на межі отвору при заданих граничних умовах на нескінченності із граничної умови $N_1(R_1)=0$ випливає $Q_1(R_1)=2F$. Але наявність накладки має зменшити ці колові зусилля на межі отвору. На рис. 2.4.20 у безрозмірній формі показано графіки колових і радіальних зусиль в основній пластині в околі отвору. За введеною вище нормованою радіальною координатою відрізок $[0;1]$ – це область з'єднання.

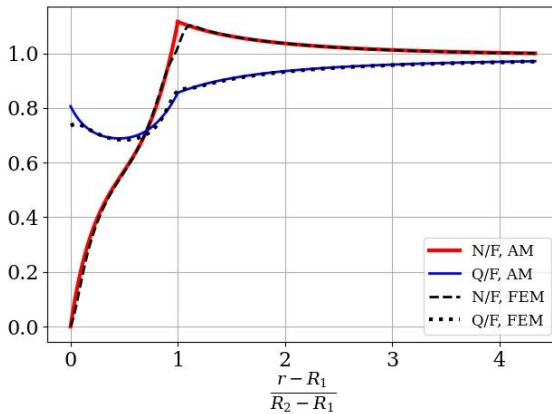


Рис. 2.4.20. Зусилля в основній пластині

На графіках бачимо, що накладка суттєво розвантажує отвір – колові напруження на межі отвору завдяки наявності накладки зменшилися більш ніж удвічі. Крім того, бачимо хорошу збіжність результатів скінченно-елементного моделювання (графіки «FEM») із розрахунками за запропонованою аналітичною моделлю (графіки «AM»).

Зробимо висновки:

1. Запропоновано осесиметричну математичну модель двостороннього з'єднання внапуск пластини, яка містить круглий виріз, з двома круглими накладками з обох боків пластини. Запропонований підхід ґрунтується на класичній теорії пластин Кірхгофа – Лява. Клейовий шар розглядається як пружна основа Вінклера. Розв'язок задачі отримано в аналітичній формі.

2. Незважаючи на наявність накладок з обох боків пластини, завдяки чому основна пластина не згинається при навантаженні, у клейовому шарі виникають нормальні напруження. Ці напруження обумовлені вигином накладок. Для зменшення вигину накладок доцільно простір вирізу між накладками заповнювати деякою вставкою.

3. Скінченно-елементне моделювання показало високу точність запропонованої математичної моделі.

ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ

1. Одновимірні моделі напруженого стану напускних з'єднань дають змогу із високою точністю описати напружений стан з'єднання. Але існують обмеження застосування одновимірних моделей напруженого стану, такі як наявність фасок і напливів клею на краю з'єднання, відсутність яких значно впливає на напружений стан клейового шару біля його краю.

2. Осьова симетрія конструкцій і навантаження дає можливість зменшити розмірність моделі напруженого стану і звести її до одновимірної. Це дає змогу дослідити напружений стан з'єднань внапуск циліндричних труб і пластин з круглим отвором, підсилених круглими концентричними накладками.

3. Клейовий шар перебуває у складному напруженому стані. Зазвичай з усіх компонент напруженого стану клейового шару враховують лише напруження зсуву й відривні нормальні напруження. Розподіл останніх по товщині біля краю клейового шва має складний характер у тому випадку, якщо кромка клейового шва не містить напливів, а з'єднані шари не містять фасок. За наявності ж таких конструктивних рішень прості аналітичні моделі напруженого стану з'єднання, що базуються на гіпотезах про рівномірний розподіл напружень по товщині клейового шару, добре узгоджуються із результатами скінченно-елементного моделювання.

4. Наведені у розділі результати викладено в роботах авторів монографії [64, 66, 71, 142-144, 155-159].

Розділ 3

ДВОВИМІРНІ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК, У ЯКИХ УРАХОВУЄТЬСЯ НЕРІВНОМІРНІСТЬ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЇ ПО ШИРИНІ

Більшість відомих математичних моделей напруженого стану з'єднань внапуск є одновимірними. Тобто компоненти напружено-деформованого стану елементів з'єднання залежать лише від однієї координати – поздовжньої (осьової) або радіальної. При цьому залежність напружень і переміщень по товщині та ширині конструкції ґрунтується на гіпотезах опору матеріалів і будівельної механіки: на гіпотезах про плоскі перерізи, про відсутність стиснення в поперечному напрямку в балці та про рівномірний напружений стан конструкції по ширині. Але на практиці існують конструкції з'єднань, напружений стан яких неможливо описати за допомогою одновимірних моделей. Перехід від одновимірних моделей до двовимірних має можливі напрями:

- створення двовимірних по товщині математичних моделей з'єднань;
- створення двовимірних у площині з'єднання математичних моделей.

Перший напрям полягає у відмові від гіпотези плоских перерізів і гіпотези про лінійний розподіл напружень і переміщень по товщині з'єднання. По ширині з'єднання напружений стан при цьому вважається рівномірним. Цей підхід дає змогу більш точно описати напружений стан з'єднання в найбільш проблемній зоні – біля краю клейового шва.

Другий напрям ґрунтується на відмові від гіпотези про рівномірний розподіл напружень по ширині конструкції. Це дає змогу дослідити такі ефекти, як вплив на напружений стан з'єднання поперечних деформацій з'єднуваних шарів, зумовлених коефіцієнтами Пуассона, а також дослідити напружений стан клеєної конструкції з нерівномірним (у т. ч. локальним) навантаженням. Коло розв'язуваних задач містить такі актуальні задачі, як дослідження

напруженого стану ремонтних накладок і з'єднань з локальними дефектами в клейовому шарі, з'єднання пластин різної ширини тощо.

Слід зазначити, що в двовимірних по ширині математичних моделях напруженого стану з'єднань може враховуватися або не враховуватися вигин конструкції. Розглянемо як найбільш простий лише другий підхід, за яким вигин конструкції не враховується і який за сукупністю гіпотез можна вважати двовимірним узагальненням моделі Фолькерсена.

3.1. Двовимірне узагальнення моделі Фолькерсена.

Загальна система рівнянь

Розглянемо диференціальний елемент з'єднання (рис. 3.1.1), який має розміри $dx \times dy$. На елементи несних шарів діють нормальні зусилля $N_x^{(k)}$, $N_y^{(k)}$, де k – номер шарів 1 та 2, x, y – напрямки; $q^{(k)}$ – дотичні зусилля; τ_x, τ_y – напруження з боку клейового шару.

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$\begin{aligned} \tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \\ -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Своєю чергою, за законом Гука із урахуванням співвідношень Коші маємо:

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} = B_x^{(k)} \left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} + \mu_{xy}^{(k)} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial y} \right), \\ N_y^{(k)} = B_y^{(k)} \left(\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y} + \mu_{yx}^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$q^{(k)} = \delta^{(k)} G^{(k)} \left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (3.1.3)$$

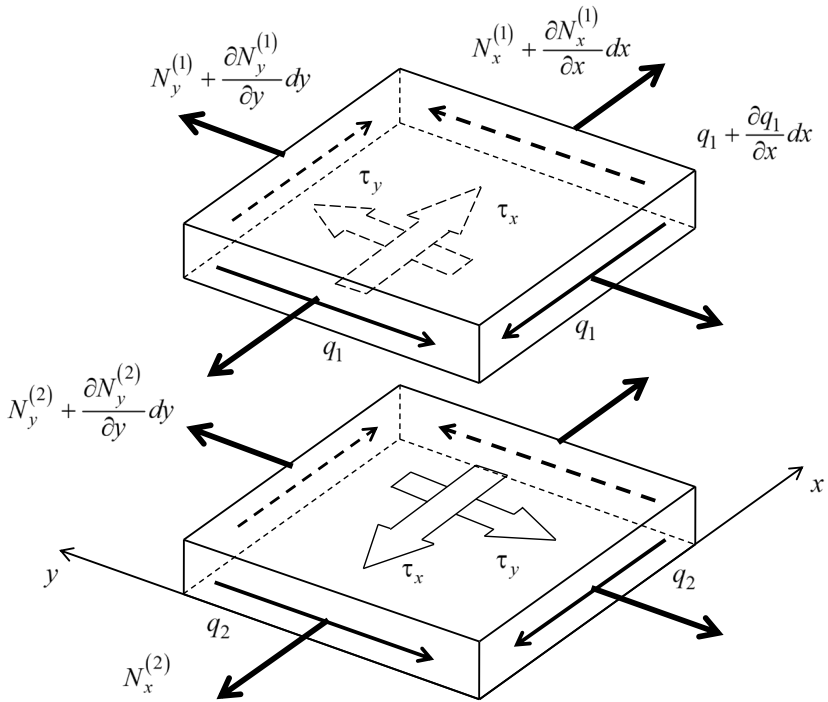


Рис. 3.1.1. Диференціальний елемент з'єднання

де $B_x^{(k)} = \frac{\delta^{(k)} E_x^{(k)}}{1 - \mu_{xy}^{(k)} \mu_{yx}^{(k)}}$, $B_y^{(k)} = \frac{\delta^{(k)} E_y^{(k)}}{1 - \mu_{xy}^{(k)} \mu_{yx}^{(k)}}$ – мембранні жорсткості шарів; $\delta^{(k)}$ – товщина відповідного шару; $E_x^{(k)}$, $E_y^{(k)}$ – модулі пружності матеріалу шару k у напрямках x та y ; $\mu_{xy}^{(k)}$ і $\mu_{yx}^{(k)}$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу шару k ; $G^{(k)}$ – модуль зсуву матеріалу шару k ; $U^{(k)}$ – переміщення шару k у напрямку осі x

(поздовжні переміщення); $V^{(k)}$ – переміщення шару k у напрямку осі y (поперечні переміщення).

Дотичні напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці переміщень шарів, як і в класичній одновимірній моделі Фолькерсена:

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (U^{(2)} - U^{(1)}), \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (V^{(2)} - V^{(1)}), \quad (3.1.4)$$

де G_0 – модуль пружності клею; δ_0 – товщина клейового шару.

Підставивши вирази для зусиль у шарах і для напружень у клейовому шарі в рівняння рівноваги, отримуємо систему чотирьох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно поздовжніх і поперечних переміщень двох шарів:

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x \partial y} - c_1 U^{(1)} + c_1 U^{(2)} = 0; \\ a_2 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x \partial y} + c_2 U^{(1)} - c_2 U^{(2)} = 0; \\ \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial y^2} + b_3 \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x \partial y} - c_1 V^{(1)} + c_1 V^{(2)} = 0; \\ \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial y^2} + b_4 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x \partial y} + c_2 V^{(1)} - c_2 V^{(2)} = 0, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{E_x^{(1)}}{G^{(1)}(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)})}, \quad a_2 = \frac{E_x^{(2)}}{G^{(2)}(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)})}, \quad a_3 = \frac{E_y^{(1)}}{G^{(1)}(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)})},$$

$$a_4 = \frac{E_y^{(2)}}{G^{(2)}(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)})}, \quad b_1 = 1 + a_1 \mu_{xy}^{(1)}, \quad b_2 = 1 + a_2 \mu_{xy}^{(2)}, \quad b_3 = 1 + a_3 \mu_{yx}^{(1)},$$

$$b_4 = 1 + a_4 \mu_{yx}^{(2)}, \quad c_1 = \frac{P}{\delta^{(1)} G^{(1)}}, \quad c_2 = \frac{P}{\delta^{(2)} G^{(2)}}, \quad P = \frac{G^{(0)}}{\delta^{(0)}}.$$

З іншого боку, систему рівнянь рівноваги можна записати не в переміщеннях, а в поздовжніх зусиллях у несних шарах. Для цього рівняння

(3.1.1) необхідно здиференціювати або за x , або відповідно за y , а із рівнянь (3.1.2) виразити похідні від переміщень через нормальні зусилля. Це дасть змогу виразити через нормальні зусилля й похідні від них похідні від напружень у клейовому шарі (3.1.4) і дотичні зусилля (3.1.3), Унаслідок чого отримуємо систему чотирьох рівнянь у частинних похідних:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} + a_{14} \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + \\ \quad + b_{11} N_x^{(1)} + b_{12} N_y^{(1)} + b_{13} N_x^{(2)} + b_{14} N_y^{(2)} = 0; \\ a_{21} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + a_{23} \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} + a_{24} \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + \\ \quad + b_{21} N_x^{(1)} + b_{22} N_y^{(1)} + b_{23} N_x^{(2)} + b_{24} N_y^{(2)} = 0; \\ a_{31} \frac{\partial^2 N_x^{(2)}}{\partial x^2} + a_{32} \frac{\partial^2 N_x^{(2)}}{\partial y^2} + a_{33} \frac{\partial^2 N_y^{(2)}}{\partial x^2} + a_{34} \frac{\partial^2 N_y^{(2)}}{\partial y^2} + \\ \quad + b_{31} N_x^{(1)} + b_{32} N_y^{(1)} + b_{33} N_x^{(2)} + b_{34} N_y^{(2)} = 0; \\ a_{41} \frac{\partial^2 N_x^{(2)}}{\partial x^2} + a_{42} \frac{\partial^2 N_x^{(2)}}{\partial y^2} + a_{43} \frac{\partial^2 N_y^{(2)}}{\partial x^2} + a_{44} \frac{\partial^2 N_y^{(2)}}{\partial y^2} + \\ \quad + b_{41} N_x^{(1)} + b_{42} N_y^{(1)} + b_{43} N_x^{(2)} + b_{44} N_y^{(2)} = 0, \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

$$\text{де } a_{11} = 1 - \frac{G^{(1)}}{E_x^{(1)}} \mu_{xy}^{(1)}, \quad a_{12} = \frac{G^{(1)}}{E_x^{(1)}}, \quad a_{13} = \frac{G^{(1)}}{E_y^{(1)}}, \quad a_{14} = -\frac{G^{(1)} \mu_{xy}^{(1)}}{E_y^{(1)}},$$

$$b_{11} = -\frac{G_0}{\delta_0 \delta_1 E_x^{(1)}}, \quad b_{12} = \frac{G_0 \mu_{xy}^{(1)}}{\delta_0 \delta_1 E_y^{(1)}}, \quad b_{13} = \frac{G_0}{\delta_0 \delta_1 E_x^{(2)}}, \quad b_{14} = -\frac{G_0 \mu_{xy}^{(2)}}{\delta_0 \delta_1 E_y^{(2)}},$$

$$a_{21} = -\frac{G^{(1)}}{E_x^{(1)}} \mu_{yx}^{(1)}, \quad a_{22} = \frac{G^{(1)}}{E_x^{(1)}}, \quad a_{23} = \frac{G^{(1)}}{E_y^{(1)}}, \quad a_{24} = 1 - \frac{G^{(1)} \mu_{xy}^{(1)}}{E_y^{(1)}},$$

$$b_{21} = \frac{G_0 \mu_{yx}^{(1)}}{\delta_0 \delta_1 E_x^{(1)}}, \quad b_{22} = -\frac{G_0}{\delta_0 \delta_1 E_y^{(1)}}, \quad b_{23} = -\frac{G_0 \mu_{yx}^{(2)}}{\delta_0 \delta_1 E_x^{(2)}}, \quad b_{24} = \frac{G_0}{\delta_0 \delta_1 E_y^{(2)}},$$

$$a_{31} = 1 - \frac{G^{(2)}}{E_x^{(2)}} \mu_{xy}^{(2)}, \quad a_{32} = \frac{G^{(2)}}{E_x^{(2)}}, \quad a_{33} = \frac{G^{(2)}}{E_y^{(2)}}, \quad a_{34} = -\frac{G^{(2)} \mu_{xy}^{(2)}}{E_y^{(2)}},$$

$$b_{31} = -b_{11}, \quad b_{32} = -b_{13}, \quad b_{33} = -b_{13}, \quad b_{34} = -b_{14},$$

$$a_{41} = -\frac{G^{(2)}}{E_x^{(2)}} \mu_{yx}^{(2)}, \quad a_{42} = \frac{G^{(2)}}{E_x^{(2)}}, \quad a_{43} = \frac{G^{(2)}}{E_y^{(2)}}, \quad a_{44} = 1 - \frac{G^{(2)} \mu_{xy}^{(2)}}{E_y^{(2)}},$$

$$b_{41} = -b_{21}, \quad b_{42} = -b_{22}, \quad b_{43} = -b_{23}, \quad b_{44} = -b_{24}.$$

Нажаль, аналітичний розв'язок систем (3.1.5) і (3.1.6) є невідомим, тому для знаходження напруженого стану з'єднань у двовимірній постановці необхідно або вводити певні додаткові гіпотези, що дають змогу зменшити кількість змінних і, отже, кількість рівнянь у цих системах, або застосовувати для розв'язання числові методи [95].

Крайові умови складаються із доданих до з'єднання нормальних зусиль, фіксованих переміщень на закріплених сторонах та умов для дотичних зусиль на межі з'єднання. Можлива велика кількість комбінацій цих умов.

3.2. Урахування взаємного впливу поперечних і поздовжніх деформацій пластин на напружений стан з'єднання в умовах рівномірного по ширині навантаження і відсутності дотичних напружень у з'єднаних шарах

Розглянемо дві склеєні прямокутні пластини, які зображено на рис. 3.2.1, $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$, що мають товщину відповідно δ_1 і δ_2 і до бокових сторін яких прикладено рівномірні по ширині нормальні зусилля.

Розв'язок задачі будується з використанням гіпотез двовимірного узагальнення моделі Фолькерсена:

- клейовий шар працює тільки на зсув;
- напруження рівномірно розподілені по товщині шарів;

- напрямки ортотропії шарів збігаються із напрямками координатних осей;
- вигину немає;
- трансверсальних переміщень несних шарів немає.

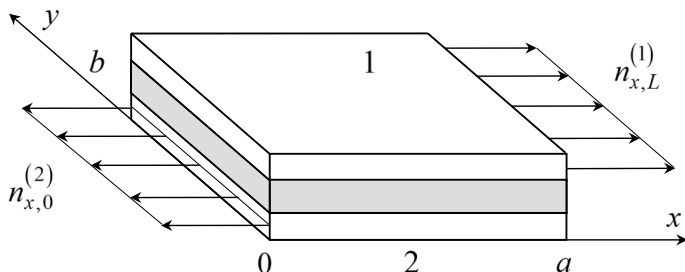


Рис. 3.2.1. Схема з'єднання

Крім того, будемо вважати, що внаслідок того, що з'єднання навантажене рівномірними по ширині зусиллями, дотичні напруження в несних шарах є незначними, і ними можна знехтувати. Це, безумовно, вносить певну суперечність у модель напруженого стану, але дає змогу вдвічі зменшити кількість змінних. Цю гіпотезу раніше було застосовано в роботах [1, 78], але отримані авторами цих робіт розв'язки не можна вважати обґрунтованими й повними.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів несних шарів мають вигляд (3.1.1). Відповідно до гіпотези про відсутність дотичних зусиль у несних шарах рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\begin{aligned}
 \tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} &= 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \\
 \tau_x - \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} &= 0, \quad \tau_y - \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Граничні умови

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} \Big|_{x=0} &= n_{x,0}^{(k)}, N_x^{(k)} \Big|_{x=a} = n_{x,1}^{(k)}, \\ N_y^{(k)} \Big|_{y=0} &= n_{y,0}^{(k)}, N_y^{(k)} \Big|_{y=b} = n_{y,1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

мають задовольняти умови рівноваги з'єднання

$$\begin{aligned} N_x^{(1)} + N_x^{(2)} &= n_{x,0}^{(1)} + n_{x,0}^{(2)} = n_{x,1}^{(1)} + n_{x,1}^{(2)} = F_x, \\ N_y^{(1)} + N_y^{(2)} &= n_{y,0}^{(1)} + n_{y,0}^{(2)} = n_{y,1}^{(1)} + n_{y,1}^{(2)} = F_y. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці переміщень шарів:

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (U_x^{(2)} - U_x^{(1)}), \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (U_y^{(2)} - U_y^{(1)}), \quad (3.2.4)$$

де $U_x^{(k)}, U_y^{(k)}$ – переміщення у відповідному напрямку k -го шару; G_0, δ_0 – модуль зсуву і товщина клейового шару.

Закон Гука для деталей, що з'єднуються, має вигляд

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} - \frac{\mu_{xy}^{(k)} N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} + \alpha_x^{(k)} T_k, \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} - \frac{\mu_{yx}^{(k)} N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} + \alpha_y^{(k)} T_k,$$

де $E_x^{(k)}, E_y^{(k)}, \mu_{xy}^{(k)}, \mu_{yx}^{(k)}, \alpha_x^{(k)}, \alpha_y^{(k)}$ – модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та коефіцієнти лінійного температурного розширення у відповідних напрямках; T_k – різниця середньої по товщині температури формування й температури експлуатації.

Диференціюючи перші два рівняння (3.2.1) і залежності (3.2.4), а потім застосовуючи співвідношення Коші $\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}$ та $\varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial U_y^{(k)}}{\partial y}$, закон Гука та умови рівноваги з'єднання (3.2.3) для виключення зусиль у другому шарі, отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно зусиль у першому несному шарі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - c_{11}N_x^{(1)} + c_{12}N_y^{(1)} + c_{13} = 0; \\ \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + c_{21}N_x^{(1)} - c_{22}N_y^{(1)} + c_{23} = 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

$$\text{де } c_{11} = \frac{P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}, \quad c_{12} = \frac{\mu_{xy}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{\mu_{xy}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}}, \quad c_{21} = \frac{\mu_{yx}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{\mu_{yx}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}},$$

$$c_{22} = \frac{P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}}, \quad c_{13} = p_0 \left(\frac{F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} - \frac{\mu_{xy}^{(2)} F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} + \alpha_x^{(2)} T_2 - \alpha_x^{(1)} T_1 \right),$$

$$c_{23} = p_0 \left(\frac{F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} - \frac{\mu_{yx}^{(2)} F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} + \alpha_y^{(2)} T_2 - \alpha_y^{(1)} T_1 \right), \quad p_0 = \frac{G_0}{\delta_0}.$$

У цій задачі напружений стан у точці описується двома нормальними напруженнями (дотичні дорівнюють нулю): на межі заданою є лише одна з компонент тензора напружень, а іншу необхідно знайти з рівнянь рівноваги (3.2.5). При цьому одне з рівнянь на межі набуває вигляду звичайного диференціального рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 B_{x,j}}{\partial x^2} - c_{11}B_{x,j} + c_{13} + c_{12}n_{y,j}^{(1)} = 0; \\ \frac{\partial^2 B_{y,j}}{\partial y^2} - c_{22}B_{y,j} + c_{23} + c_{21}n_{x,j}^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

де $j=0,1$, а для зусиль уздовж меж введено позначення $B_{x,0} = N_x^{(1)} \Big|_{y=0}$,

$B_{x,1} = N_x^{(1)} \Big|_{y=b}$, $B_{y,0} = N_y^{(1)} \Big|_{x=0}$, $B_{y,1} = N_y^{(1)} \Big|_{x=a}$. Розв'язки рівнянь (3.2.6) мають

вигляд

$$B_{x,j}(x) = S_{1,j} \operatorname{sh}(\sqrt{a_{11}}x) + S_{2,j} \operatorname{ch}(\sqrt{a_{11}}x) + \frac{c_{12}n_{y,j}^{(1)} + c_{13}}{c_{11}},$$

$$B_{y,j}(y) = S_{3,j} \operatorname{sh}(\sqrt{a_{22}}y) + S_{4,j} \operatorname{ch}(\sqrt{a_{22}}y) + \frac{c_{21}n_{x,j}^{(1)} + c_{23}}{c_{22}}.$$
(3.2.7)

Константи $S_{i,j}$ знаходять із крайових умов (3.2.2). Вирази (3.2.7) є класичними одновимірними розв'язками задачі про напружений стан з'єднання [205]. Зусилля (3.2.7) є крайовими умовами на бокових сторонах разом з умовами (3.2.2), що також використовують автори в роботі [111].

Виключивши одну з невідомих у системі (3.2.5), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^4 N_x^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + A_3 N_x^{(1)} = A_4,$$
(3.2.8)

$$\frac{\partial^4 N_y^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - B_1 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} - B_2 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + B_3 N_y^{(1)} = B_4,$$
(3.2.9)

де $A_1 = c_{22}$, $A_2 = c_{11}$, $A_3 = c_{22}c_{11} - c_{21}c_{12}$, $A_4 = c_{22}c_{13} + c_{12}c_{23}$; $B_1 = c_{22}$, $B_2 = c_{11}$, $B_3 = c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}$, $B_4 = c_{11}c_{23} + c_{21}c_{13}$.

Розглянемо побудову розв'язку рівняння (3.2.8). Крайові умови (3.2.2) на межах $x=0$ і $x=a$ рівняння (3.2.8) є неоднорідними. Для виключення цих неоднорідностей поздовжні зусилля подамо у вигляді

$$N_x^{(1)} = R(x) + N(x, y),$$
(3.2.10)

де функція $R(x)$ задовольняє відповідним крайовим умовам (3.2.2), а функція $N(x, y)$ перетворюється на нуль при $x=0$ і $x=a$.

Підставивши вираз (3.2.10) у рівняння (3.2.8), отримаємо рівняння

$$-A_1 \frac{d^2 R}{dx^2} + A_3 R = A_4;$$
(3.2.11)

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + A_3 N = 0. \quad (3.2.12)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.2.11) має вигляд

$$R(x) = V_1 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x \right) + V_2 \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x \right) + \frac{A_4}{A_3}. \quad (3.2.13)$$

Константи V_1 і V_2 визначаються з відповідних крайових умов (3.2.2). Слід зазначити, що функцію (3.2.13) було запропоновано в роботі [5] як наближений розв'язок системи (3.2.5).

Оскільки неоднорідні крайові умови (3.2.2) при $x=0$ і $x=a$ задовольняються за допомогою функції (3.2.13), то відповідні крайові умови для $N(x, y)$ будуть однорідними. Це дає змогу застосувати метод відокремлення змінних. Частинні розв'язки рівняння (3.2.12) шукаємо у вигляді добутку $N(x, y) = X(x)Y(y)$. Стандартна процедура відокремлення змінних у цьому рівнянні з параметром поділу $-\lambda^2$ ($\lambda > 0$) приводить до двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad (A_2 + \lambda^2) \frac{d^2 Y}{dy^2} - (A_3 + \lambda^2 A_1) Y = 0.$$

Загальний розв'язок першого рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Оскільки крайові умови для $N(x, y)$ на сторонах $x=0$ і $x=a$ є однорідними, то вони є однорідними й для функції $X(x)$. Функція $X(x)$ задовольняє цим умовам і не дорівнює нулю тотожно, лише за $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) і $C_2 = 0$. Для визначеності покладемо $C_1 = 1$. Розв'язок другого рівняння при $\lambda = \lambda_n$ має вигляд

$$Y = Y_n(y) = C_{3,n} \operatorname{sh}(\mu_n y) + C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n y), \quad \mu_n = \sqrt{\frac{A_3 a^2 + \pi^2 n^2 A_1}{A_2 a^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.2.12) подаємо у вигляді ряду

$$N(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} [C_{3,n} \operatorname{sh}(\mu_n y) + C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n y)].$$

Тоді на основі (3.2.10)

$$N_x^{(1)} = R(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} [C_{3,n} \operatorname{sh}(\mu_n y) + C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n y)]. \quad (3.2.14)$$

Задовольняючи крайовим умовам (3.2.7) на сторонах $y=0$ і $y=b$, маємо розвинення в ряди Фур'є за синусами

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{4,n} \sin \frac{\pi n x}{a} = B_{x,0}(x) - R(x) \quad (0 < x < a),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [C_{3,n} \operatorname{sh}(\mu_n b) + C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n b)] \sin \frac{\pi n x}{a} = B_{x,1}(x) - R(x) \quad (0 < x < a).$$

Використовуючи повноту й ортогональність системи функцій $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{a} \right\}$

на відріжку $[0; a]$, знаходимо

$$C_{4,n} = \frac{2}{a} \int_0^a (B_{x,0}(x) - R(x)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx,$$

$$C_{3,n} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\mu_n b)} \frac{2}{a} \int_0^a (B_{x,1}(x) - R(x)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx - C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n b).$$

Обидва інтеграли обчислюються точно.

Відносно зусиль $N_y^{(1)}$ і рівняння (3.2.9) аналогічна процедура приводить до розвинення

$$N_y^{(1)} = T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} [C_{5,n} \operatorname{sh}(v_n x) + C_{6,n} \operatorname{ch}(v_n x)], \quad (3.2.15)$$

у якому

$$T(y) = V_3 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{B_3}{B_2}} y \right) + V_4 \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{B_3}{B_2}} y \right) + \frac{B_4}{B_3},$$

$$v_n = \sqrt{\frac{B_3 b^2 + \pi^2 n^2 B_2}{B_1 b^2 + \pi^2 n^2}}, \quad C_{6,n} = \frac{2}{b} \int_0^b (B_{y,0}(y) - T(y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy,$$

$$C_{5,n} = \frac{1}{\operatorname{sh}(v_n a)} \frac{2}{b} \int_0^b (B_{y,1}(y) - T(y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy - C_{6,n} \operatorname{ch}(v_n a),$$

Константи V_3 та V_4 знаходимо з відповідних крайових умов (3.2.2).

Неважко переконатися, що

$$C_{3,n}, C_{4,n}, C_{5,n}, C_{6,n} = O(n^{-3}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.2.16)$$

$$\mu_n \sim \sqrt{A_1}, v_n \sim \sqrt{B_2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Оцінки (3.2.16) забезпечують збіжність рядів у виразах для функцій $N_x^{(1)}$, $N_y^{(1)}$ та їх частинних похідних 1-го та 2-го порядків за змінними x , y та рівномірну збіжність рядів для цих функцій та їх частинних похідних 1-го порядку.

Якщо згідно з (3.2.14) функцію $N_x^{(1)}$ знайдено, то з першого рівняння (3.2.5) для зусиль $N_y^{(1)}$ окрім (3.2.15) отримуємо інше за формою подання

$$N_y^{(1)} = W(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{\pi k x}{a} [C_{3,k} \operatorname{sh}(\mu_k y) + C_{4,k} \operatorname{ch}(\mu_k y)], \quad (3.2.17)$$

$$\text{де } \beta_k = \frac{c_{11}}{c_{12}} + \frac{\pi^2 k^2}{a^2 c_{12}},$$

$$W(x) = \left(\frac{c_{11}}{c_{12}} - \frac{A_3}{A_1 c_{12}} \right) \left[V_1 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x \right) + V_2 \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x \right) \right] + \frac{c_{11} A_4}{c_{12} A_3} - \frac{c_{13}}{c_{12}}.$$

Розвиваючи функції $W(x)$, $\operatorname{sh}(\mu_k x)$, $\operatorname{ch}(\mu_k x)$ у ряди Фур'є за системою функцій $\left\{ \sin \frac{\pi k x}{a} \right\}$, а $T(y)$, $\operatorname{sh}(v_n y)$, $\operatorname{ch}(v_n y)$ за системою функцій $\left\{ \sin \frac{\pi n y}{b} \right\}$, можна переконатися в тотожності подання (3.2.15) і (3.2.17).

Дотичні напруження τ_x , τ_y у клейовому шарі на основі (3.2.1) визначаються внаслідок диференціювання розкладів (3.2.14), (3.2.15). З огляду на рівномірну збіжність відповідних рядів, ці напруження є безперервними функціями змінних x , y :

$$\tau_x = -V_1 \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x - V_2 \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x - \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{\pi n x}{a} [C_{3,n} \operatorname{sh}(\mu_n y) + C_{4,n} \operatorname{ch}(\mu_n y)];$$

$$\tau_y = V_3 \sqrt{\frac{B_3}{B_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{B_3}{B_1}} y + V_4 \sqrt{\frac{B_3}{B_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{B_3}{B_1}} y + \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{\pi n x}{b} [C_{5,n} \operatorname{sh}(v_n x) + C_{6,n} \operatorname{ch}(v_n x)].$$

Для вивчення впливу властивостей пластин, що з'єднуються, на НДС з'єднання розглянемо з'єднання з параметрами з роботи [78]: $a = b = 10$ мм, $\delta_1 = 1$ мм, $\delta_2 = 0,5$ мм, $\delta_0 = 0,15$ мм, $G_0 = 4,2$ ГПа. Перший шар виготовлено з вуглепластику з напрямком армування вздовж осі x ($E_x^{(1)} = 181$ ГПа, $E_y^{(1)} = 10$ ГПа, $\mu_{yx}^{(1)} = 0,28$), другий шар виконано з алюмінію ($E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$ ГПа, $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$).

Перший розрахунковий випадок – розтягувальне навантаження передається від одного несного шару до іншого, вуглепластик навантажений уздовж волокон. Крайові умови мають вигляд

$$N_x^{(1)} \Big|_{x=0} = N_x^{(2)} \Big|_{x=a} = 150 \text{ кН/м}, \quad N_x^{(2)} \Big|_{x=0} = N_x^{(1)} \Big|_{x=a} = 0,$$

$$N_y^{(k)} \Big|_{y=0} = N_y^{(k)} \Big|_{y=b} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Графіки зусиль у першому несному шарі та напруження в клейовому шарі зображено на рис. 3.2.2.

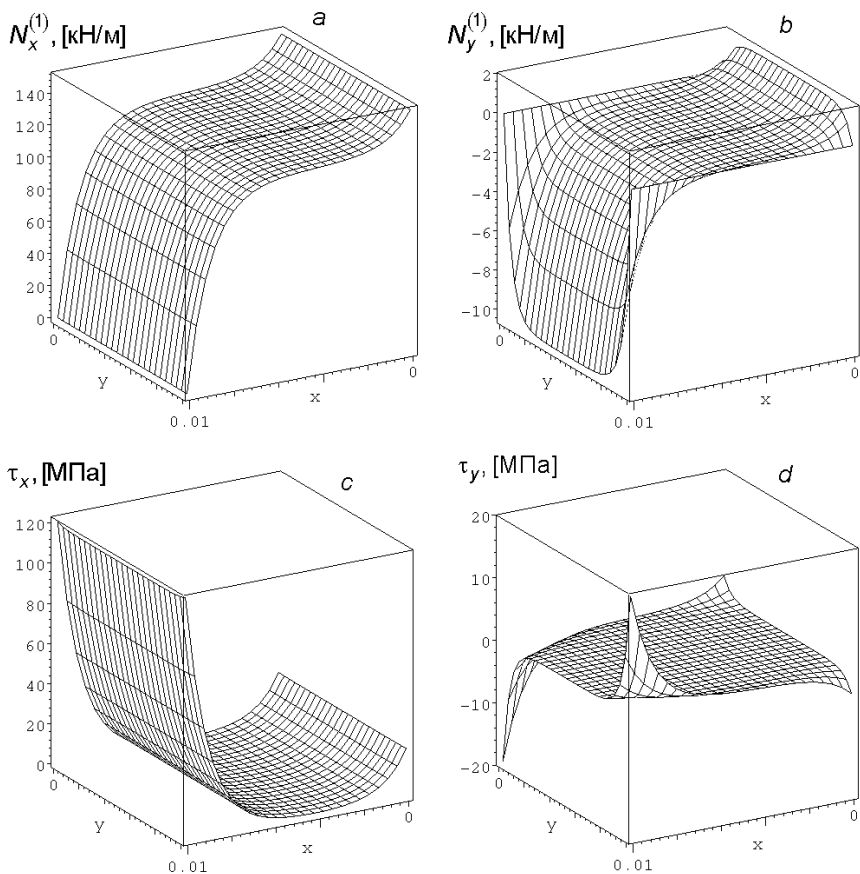


Рис. 3.2.2. Нормальні зусилля в першому шарі (a), (b) і дотичні напруження в клейовому шарі (c), (d)

З графіків видно, що поперечні зусилля в несних шарах є максимальними на осі симетрії з'єднання і становлять менше 10 % зусиль у поздовжньому напрямку. Своєю чергою, дотичні напруження в клейовому шарі є максимальними в кутах прямокутної області й становлять близько 20 % від напружень у поздовжньому напрямку. Остання обставина свідчить про те, що

описаний ефект необхідно враховувати в розрахунках на міцність і під час проектування з'єднань.

Другий розрахунковий випадок – навантаження передається від металевого шару до вуглепластику, його прикладено поперек напрямку армування. Крайові умови в цьому випадку мають вигляд

$$N_y^{(1)}|_{y=0} = N_y^{(2)}|_{y=b} = 150 \text{ кН/м}, \quad N_y^{(2)}|_{y=0} = N_y^{(1)}|_{y=b} = 0, \quad N_x^{(k)}|_{x=0} = N_x^{(k)}|_{x=a} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Графіки зусиль у першому несному шарі (у вуглепластику) і напруження в клейовому шарі показано на рис. 3.2.3.

З графіка, зображеного на рис. 3.2.2, *b*, видно, що при навантаженні вздовж осі x поперечні зусилля $N_y^{(1)}$, які обумовлені коефіцієнтами Пуассона несних шарів, є відносно невеликими порівняно із зусиллями $N_x^{(1)}$. Розподіл останніх показано на рис. 3.2.2 *a*. Зусилля $N_y^{(1)}$ значно різняться на кінцях з'єднання $x=0$ і $x=a$, і це пов'язано з відмінністю коефіцієнтів Пуассона несних шарів. Максимальна величина напружень у поперечному напрямку в несних шарах у цьому випадку становить 20 % поздовжніх напружень. Напруження в клейовому шарі τ_x , рис. 3.2.2 *c*, є близькими до обчислюваних за одновимірними методиками [224] і [5]. Напруження τ_y (див. рис. 3.2.2, *d*), як і зусилля $N_y^{(1)}$, є максимальними з того боку пластини, де навантаження прикладено до алюмінієвого шару, а не до вуглепластику, оскільки алюмінієвий шар має більший коефіцієнт Пуассона. Ці напруження в цьому розрахунковому випадку також становлять близько 20 % від максимальних напружень у поздовжньому напрямку τ_x .

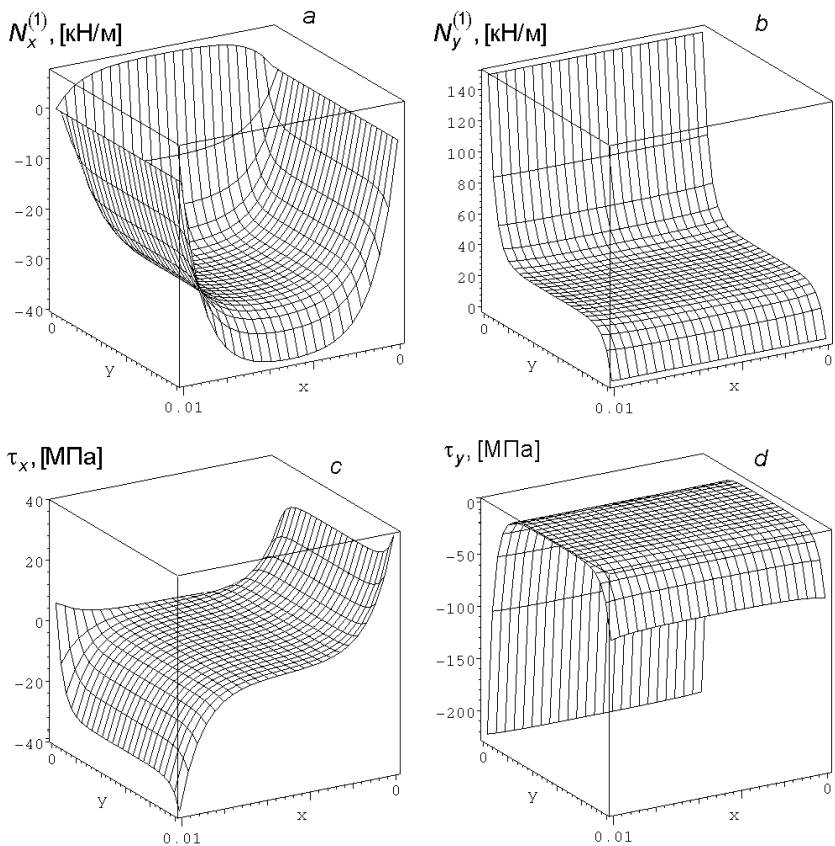


Рис. 3.2.3. Нормальні зусилля в першому шарі (a), (b) і дотичні напруження в клейовому шарі (c), (d)

Якщо навантаження прикладено поперек напрямку армування вуглепластику, уздовж осі y , то напружений стан з'єднання змінюється (рис. 3.2.3). Максимальні поперечні зусилля $N_x^{(1)}$, які при цьому виникають, у кілька разів є більшими, ніж у першому розрахунковому випадку. Це зумовлено високою жорсткістю вуглепластику по осі x – поперек напрямку навантаження. Уздовж осі y алюмінієвий шар має більшу жорсткість, ніж вуглепластик, і внаслідок цього на більшій частині з'єднання $N_y^{(2)} > N_y^{(1)}$, що є

причиною того, що на більшій частині з'єднання $N_x^{(1)} < 0$, за винятком малої зони в околі $y=0$, де навантаження прикладено до вуглепластику.

3.3. Напружений стан з'єднання при нерівномірному по ширині конструкції поздовжньому навантаженні

У багатьох випадках виникають задачі про напружений стан з'єднання, навантаження до якого прикладається нерівномірно по ширині з'єднання. Прикладами таких конструкцій є вузли кріплення силових елементів до обшивки, з'єднання двошарових панелей з легким заповнювачем, локальним додаванням навантаження тільки до одного несного шару тощо. Розв'язання задачі в загальному випадку з урахуванням поперечних деформацій, зумовлених коефіцієнтами Пуассона в аналітичній формі, скоріш за все, є неможливим.

Розглянемо двошарову пластину прямокутної форми, між зовнішніми шарами якої знаходиться з'єднувальний шар, що працює тільки на зсув (рис. 3.3.1). Початок координат помістимо в одному з кутів з'єднання.

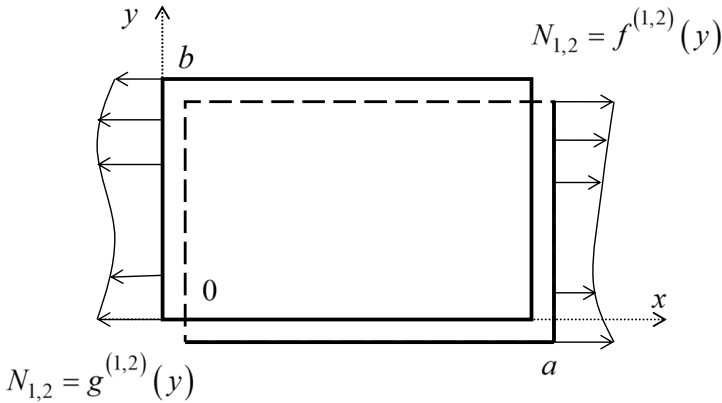


Рис. 3.3.1. Схема з'єднання

Розміри з'єднання $a \times b$, товщини першого й другого несних шарів

відповідно δ_1 і δ_2 . Рівняння рівноваги для несних шарів мають вигляд (3.1.1).

Згідно з гіпотезою про відсутність поперечних переміщень несних шарів зусилля в поперечному напрямку $N_1^{(y)}$, $N_2^{(y)}$ і відповідні дотичні напруження в клейовому шарі τ_y дорівнюють нулю, отже, у системі (3.1.1) залишаються лише рівняння

$$\tau_x + \frac{\partial N_1^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_2^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0. \quad (3.3.1)$$

Слід зазначити, що наслідком гіпотези про рівність нулю поперечних переміщень є порушення симетрії тензора напружень і закону парності дотичних напружень, що може спричинити порушення збіжності розв'язку в кутових точках при крайових умовах у переміщеннях [145, 146].

Оскільки нижче розглядаються переміщення та зусилля тільки за напрямком осі x , то є сенс спростити позначення порівняно з попереднім підрозділом, позначивши поздовжні переміщення шару $k=1,2$ через U_k , поздовжні зусилля – N_k , а напруження в клейовому шарі – τ .

Напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці переміщень шарів (3.2.4):

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}(U_2 - U_1).$$

Співвідношення Коші при умові $U_1^{(y)} = U_2^{(y)} = 0$ мають вигляд

$$N_k = \delta_k \sigma_x^{(k)} = \delta_k E_k \frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad q_k = \delta_k \tau_{xy} = \delta_k G_k \frac{\partial U_k}{\partial y}, \quad k=1,2.$$

Підставивши ці співвідношення в рівняння (3.3.1), отримуємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0; \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

де U_1, U_2 – поздовжні переміщення несних шарів ($U_x^{(1)}, U_x^{(2)}$); $\alpha_k = E_k \delta_k \frac{\delta_0}{G_0}$;

$$\mu_k = \frac{G_k}{E_k}; k=1,2.$$

Крайові умови для переміщень U_1, U_2 мають такий вигляд:

$$\left. \frac{\partial U_k}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_k}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} N_k \Big|_{x=0} &= E_k \delta_k \left. \frac{\partial U_k}{\partial x} \right|_{x=0} = g^{(k)}(y); \\ N_k \Big|_{x=a} &= E_k \delta_k \left. \frac{\partial U_k}{\partial x} \right|_{x=a} = f^{(k)}(y). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Умова (3.3.3) відповідає рівності нулю дотичних напружень на бічних сторонах з'єднання, умови (3.3.4) відповідають заданим поздовжнім навантаженням на поперечних сторонах з'єднання. Прикладене навантаження має задовольняти умові статичної рівноваги

$$\int_0^b (g^{(1)} + g^{(2)}) dy = \int_0^b (f^{(1)} + f^{(2)}) dy.$$

Крім того, на сторонах $x=0$ і $x=a$ можуть бути задані переміщення

$$U_k \Big|_{x=0} = v_k(y); \quad U_k \Big|_{x=a} = w_k(y). \quad (3.3.5)$$

Очевидно, що можуть бути різні комбінації умов (3.3.4) і (3.3.5), тобто на одних сторонах можуть бути задані переміщення, на інших – зусилля.

Виразивши з першого рівняння системи (3.3.2) переміщення U_2 , отримаємо

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (3.3.6)$$

Підставивши (3.3.3) у друге рівняння системи (3.3.2), отримаємо

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - c_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (3.3.7)$$

де $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 \alpha_1 (\mu_1 + \mu_2)$, $\beta_3 = \alpha_1 \alpha_2 \mu_1 \mu_2$, $c_1^2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $c_2^2 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$.

Уведемо позначення

$$\Phi = c_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \quad (3.3.8)$$

і з'ясуємо, при яких значеннях коефіцієнтів α_3 та α_4 рівняння

$$\alpha_3^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \alpha_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Phi = 0 \quad (3.3.9)$$

буде еквівалентним рівнянню (3.3.7). Підставивши (3.3.8) у (3.3.9) і прирівнявши коефіцієнти при похідних в отриманому рівнянні і коефіцієнти в рівнянні (3.3.4), отримаємо умови $\alpha_3^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\alpha_4^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2}$ і додатково

умову $\mu_1 = \mu_2 \left(\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2} \right)$. Остання умова, очевидно, обмежує сферу

застосування пропонованого підходу. Однак якщо з'єднувальні матеріали є однаковими (що характерно для сендвіч-панелей) або мають близькі коефіцієнти Пуассона, то запропонований підхід виправданий. Отже, можна позначити $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. У такому разі отримуємо $\alpha_4^2 = \mu \alpha_3^2$, і вираз (3.3.8) можна подати як

$$\Phi = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right), \quad (3.3.10)$$

а переміщення другого шару (3.3.3) відповідно як

$$U_2 = U_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Phi. \quad (3.3.11)$$

Якщо урахувати крайові умови (3.3.3), то із (3.3.11) випливає, що

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (3.3.12)$$

Рівняння (3.3.9) розв'яжемо за допомогою методу відокремлення змінних. Частинні розв'язки рівняння (3.3.9) шукаємо у вигляді добутку $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. Стандартна процедура відокремлення змінних у цьому рівнянні з параметром відокремлення $-\lambda^2$ ($\lambda \geq 0$) приводить до двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_4} \right)^2 Y = 0; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{\lambda^2 + 1}{\alpha_3^2} X = 0. \quad (3.3.13)$$

Загальний розв'язок першого рівняння має вигляд

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{\lambda}{\alpha_4} y + C_2 \cos \frac{\lambda}{\alpha_4} y.$$

Оскільки крайові умови для функції $\Phi(x, y)$ на сторонах $y=0$ і $y=b$ є однорідними (3.3.9), то вони є однорідними й для функції $Y(y)$. Функція $Y(y)$ задовольняє цим умовам і не дорівнює нулю тотожно, лише за $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{b}$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) і $C_1 = 0$. Для визначеності покладемо $C_2 = 1$. Розв'язок другого рівняння при $\lambda = \lambda_n$ для зручності подамо у вигляді

$$X = A \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3} x \right) + B \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3} (x - a) \right).$$

Загальний розв'язок рівняння (3.3.9) подамо у вигляді ряду

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{b} y \left[A_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n x}{\operatorname{sh} \xi_n a} + B_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n (x - a)}{\operatorname{sh} \xi_n a} \right], \quad (3.3.14)$$

де $\xi_n = \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3}$; $\operatorname{sh} \xi_n a$ – нормувальні множники.

На наступному етапі необхідно розв'язати рівняння Пуассона (3.3.10). Загальний розв'язок подаємо у вигляді лінійної суперпозиції

$$U_1 = V + W, \quad (3.3.15)$$

де V є загальним розв'язком однорідного рівняння (3.3.10), яке можна звести до рівняння Лапласа з однорідними крайовими умовами (3.3.3):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (3.3.16)$$

Функція W є окремим розв'язком рівняння (3.3.10), що відповідає функції Φ (3.3.14).

Загальний розв'язок рівняння (3.3.15) також подамо як добуток $V = X(x)Y(y)$. Операція відокремлення змінних приводить до рівнянь

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \mu \lambda^2 X = 0, \quad (3.3.17)$$

де параметр відокремлення $-\lambda^2$. Загальний розв'язок першого рівняння

$$Y(y) = C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y.$$

Функція $Y(y)$ задовольняє однорідним крайовим умовам (3.3.3) і не дорівнює нулю тотожно, а лише за $\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$ ($n=1,2,3,\dots$) і $C_1=0$. Для визначеності покладемо $C_2=1$. Розв'язок другого рівняння при $\lambda = \lambda_n$ подамо у вигляді

$$X = C \operatorname{ch}(\sqrt{\mu} \lambda_n x) + D \operatorname{ch}(\sqrt{\mu} \lambda_n (x-a)).$$

Якщо параметр відокремлення змінних $\lambda=0$, то загальні розв'язки рівнянь (3.3.17) є лінійними функціями від x і y . Однорідні крайові умови (3.3.3) у цьому разі будуть задовольнятися, якщо $Y(y) = \text{const}$. Отже, загальний розв'язок рівняння (3.3.15) має вигляд

$$V = C_0 x + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \left(C_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\operatorname{sh} \chi_n a} + D_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \chi_n a} \right), \quad (3.3.18)$$

де $\chi_n = \sqrt{\mu} \frac{\pi n}{b}$; $\operatorname{sh} \chi_n a$ – нормувальні множники.

Функцію W будемо шукати у вигляді, що відповідає правій частині рівняння (3.3.10), яка має вигляд (3.3.14), тобто

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{b} y \left[R_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n x}{\operatorname{sh} \xi_n a} + S_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \xi_n a} \right],$$

де R_n і S_n – невідомі коефіцієнти.

Підставивши цей вираз у рівняння (3.3.10) і прирівнявши коефіцієнти, отримаємо

$$W = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{b} y \left[A_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n x}{\operatorname{sh} \xi_n a} + B_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \xi_n a} \right].$$

На основі (3.3.15) отримаємо

$$\begin{aligned} U_1 = & C_0 x + D_0 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(A_0 \frac{\operatorname{ch} \xi_0 x}{\operatorname{sh} \xi_0 a} + B_0 \frac{\operatorname{ch} \xi_0 (x-a)}{\operatorname{sh} \xi_0 a} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \left[C_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\operatorname{sh} \chi_n a} + D_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \chi_n a} + \right. \\ & \left. + A_n \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\operatorname{ch} \xi_n x}{\operatorname{sh} \xi_n a} + B_n \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\operatorname{ch} \xi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \xi_n a} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Тут $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{b}$.

Із виразу (3.3.11) знаходимо переміщення другого шару:

$$\begin{aligned} U_2 = & C_0 x + D_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(A_0 \frac{\operatorname{ch} \xi_0 x}{\operatorname{sh} \xi_0 a} + B_0 \frac{\operatorname{ch} \xi_0 (x-a)}{\operatorname{sh} \xi_0 a} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \left[C_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n x}{\operatorname{sh} \chi_n a} + D_n \frac{\operatorname{ch} \chi_n (x-a)}{\operatorname{sh} \chi_n a} + \right. \end{aligned}$$

$$+ A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\text{ch } \xi_n x}{\text{sh } \xi_n a} + B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\text{ch } \xi_n (x-a)}{\text{sh } \xi_n a} \Big]. \quad (3.3.20)$$

Знайдемо зусилля в несних шарах:

$$\begin{aligned} N_1 = & \delta_1 E_1 \left[C_0 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(A_0 \frac{\text{sh } \xi_0 x}{\text{sh } \xi_0 a} + B_0 \frac{\text{sh } \xi_0 (x-a)}{\text{sh } \xi_0 a} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \left[\chi_n \left(C_n \frac{\text{sh } \chi_n x}{\text{sh } \chi_n a} + D_n \frac{\text{sh } \chi_n (x-a)}{\text{sh } \chi_n a} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(A_n \frac{\text{sh } \xi_n x}{\text{sh } \xi_n a} + B_n \frac{\text{sh } \xi_n (x-a)}{\text{sh } \xi_n a} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & \delta_2 E_2 \left[C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} \left(A_0 \frac{\text{sh } \xi_0 x}{\text{sh } \xi_0 a} + B_0 \frac{\text{sh } \xi_0 (x-a)}{\text{sh } \xi_0 a} \right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y}{b} \left[\chi_n \left(C_n \frac{\text{sh } \chi_n x}{\text{sh } \chi_n a} + D_n \frac{\text{sh } \chi_n (x-a)}{\text{sh } \chi_n a} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n \left(A_n \frac{\text{sh } \xi_n x}{\text{sh } \xi_n a} + B_n \frac{\text{sh } \xi_n (x-a)}{\text{sh } \xi_n a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Крайові умови (3.3.4) і (3.3.5) подамо у вигляді розвинення в ряд Фур'є за функціями $\left\{ \cos \frac{\pi n y}{b} \right\}$:

$$N_k(0, y) = \frac{l_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(k)} \cos \frac{\pi n y}{b}; \quad N_k(a, y) = \frac{r_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(k)} \cos \frac{\pi n y}{b}; \quad (3.3.23)$$

$$U_k(0, y) = \frac{v_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(k)} \cos \frac{\pi n y}{b}; \quad U_k(a, y) = \frac{w_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(k)} \cos \frac{\pi n y}{b}. \quad (3.3.24)$$

Крайові умови (3.3.4) і (3.3.5) приводять до систем лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n . Розглянемо докладніше крайові умови в напруженнях (3.3.4). У цьому випадку система має вигляд

$$\begin{cases} C_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} B_0 = \frac{l_0^{(1)}}{2\delta_1 E_1}; & C_0 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} A_0 = \frac{r_0^{(1)}}{2\delta_1 E_1}; \\ C_0 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} B_0 = \frac{l_0^{(2)}}{2\delta_2 E_2}; & C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} A_0 = \frac{r_0^{(2)}}{2\delta_2 E_2}. \end{cases} \quad (3.3.25)$$

Ця система має розв'язок, якщо виконується умова

$$l_0^{(1)} + l_0^{(2)} = r_0^{(1)} + r_0^{(2)},$$

що є умовою статичної рівноваги з'єднання, оскільки інтеграли від $\cos \frac{\pi n y}{b}$ ($n > 0$) на інтервалі $y \in [0; b]$ дорівнюють нулю. Зусилля, що описуються доданками $\cos \frac{\pi n y}{b}$, є самозрівноваженими.

Коефіцієнт D_0 у систему не входить, тому для визначеності його можна призначити, задавши переміщення будь-якої точки з'єднання.

В окремому випадку, якщо граничні умови задано постійними по ширині переміщеннями або зусиллями, то коефіцієнти $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > 0$, і НДС з'єднання буде описуватися першими доданками формул (3.3.19)–(3.3.22), які є класичним одновимірним розв'язком Фолькерсена.

Для $n > 0$ отримаємо рівняння

$$\begin{cases} -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{l_n^{(1)}}{\delta_1 E_1}; & C_n \chi_n + A_n \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{r_n^{(1)}}{\delta_1 E_1}; \\ -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = \frac{l_n^{(2)}}{\delta_2 E_2}; & C_n \chi_n + A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = \frac{r_n^{(2)}}{\delta_2 E_2}, \end{cases}$$

звідки випливає, що $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \frac{R_n}{n}$, де R_n – деякі лінійні вирази з постійними коефіцієнтами, що залежать від $l_n^{(k)}$ і $r_n^{(k)}$ (3.3.23). Отже, ряди (3.3.20)–(3.3.22) рівномірно збігаються на інтервалі $x \in [0; a]$. Функції $\frac{\text{ch } \chi_n x}{\text{sh } \chi_n a}$,

$\frac{\text{ch } \chi_n (x-a)}{\text{sh } \chi_n a}$, $\frac{\text{ch } \chi_n x}{\text{sh } \chi_n a}$, $\frac{\text{ch } \chi_n (x-a)}{\text{sh } \chi_n a}$ на інтервалі $x \in (0; a)$ експоненціально

зменшуються зі збільшенням n , отже, усередині області переміщення (3.3.19) і (3.3.20) допускають дворазове диференціювання і задовольняють рівнянням (3.3.2). Усередині області з'єднання доданки під знаками сум експоненціально зменшуються при віддаленні від меж $x=0$ і $x=a$, що збігається із принципом Сен-Венана.

Для вивчення розподілу напружень у з'єднанні при нерівномірному навантаженні розглянемо з'єднання двох алюмінієвих пластин, що мають розміри $a=5$ см, $b=3$ см, $\delta_1=2$ мм, $\delta_2=3$ мм. Товщина клейового шару $\delta_0=0,3$ мм. Пружні параметри матеріалів з'єднання $E_1=E_2=70$ ГПа, $G_1=G_2=25$ ГПа, $G_0=0,5$ ГПа.

Призначимо такі крайові умови:

$$N_1(0, y) = \begin{cases} 0, & y \notin (b/4; 3b/4), \\ F_0, & y \in (b/4; 3b/4), \end{cases} \quad (3.3.26)$$

$$N_1(a, y) = N_2(0, y) = 0; \quad U_2(a, y) = 0.$$

Отже, одна з пластин защемлена по краю, а до центральної ділянки, що дорівнює половині довжини сторони іншої пластини на протилежній затисканню стороні, прикладено рівномірне розтягувальне зусилля.

На рис. 3.3.2 показано графіки нормальних зусиль $N_1(x, y)$ і відповідних напружень у клейовому шарі.

Для побудови графіків у рядах Фур'є обчислювалося 200 доданків. Крайова умова (3.3.26) є ступінчастою функцією, тому члени відповідного ряду Фур'є (3.3.23) зменшуються пропорційно n^{-1} , тобто відносно повільно.

Дотичні зусилля q_1 у першому несному шарі мають максимуми в точках розриву нормальних зусиль (3.3.26) і швидко зменшуються до нуля при віддаленні від цих точок. Максимальні значення $|q_1|$ дорівнюють 2 Н/м. У другому шарі дотичні напруження є значно меншими, їх максимальні значення $|q_2|$ дорівнюють 0,13 Н/м.

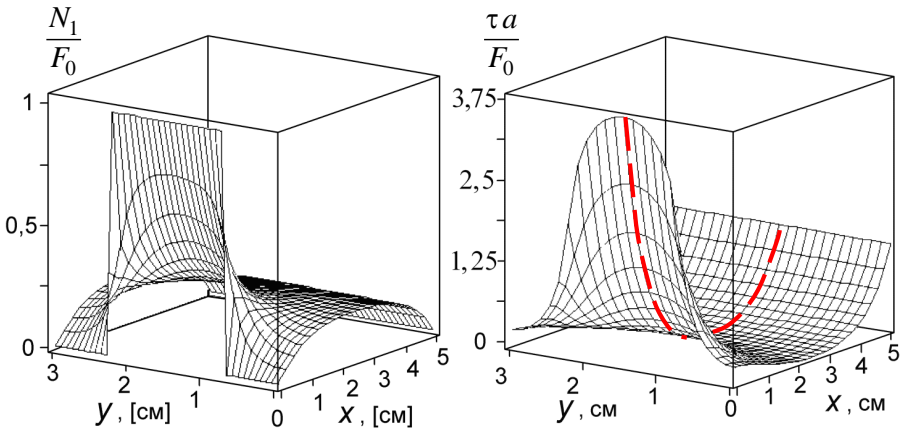


Рис. 3.3.2. Зусилля N_1 і напруження в клейовому шарі τ

Для верифікації запропонованої методики здійснено розрахунок напруженого стану з'єднання за допомогою МСЕ в пакеті ANSYS 14.0. Для розрахунку використано тривимірну модель, генерація сітки автоматична, характерний розмір елемента 0,03 мм. На рис. 3.3.3 зображено графіки дотичних напружень у середині товщини клейового шару вздовж осі симетрії з'єднання ($y = b/2$), обчислені за допомогою запропонованої методики (а) і за МСЕ (б).

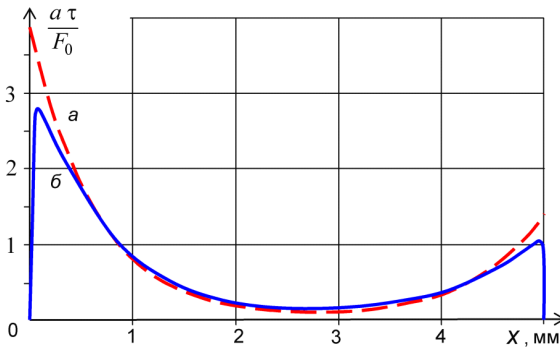


Рис. 3.3.3. Дотичні напруження в клейовому шарі вздовж прямої $y = b/2$:

а – розраховані за запропонованою методикою; б – розраховані за МСЕ

З наведених графіків видно, що результати обчислень практично збігаються на більшій частині довжини з'єднання і різняться, як і слід було очікувати, лише біля країв клейового шва. Зумовлено це тим, що зовнішні краї клейового шва вільні від навантаження й дотичні напруження в клейовому шарі на кінцях з'єднання дорівнюють нулю відповідно до закону парності дотичних напружень. Напруження набувають максимуму на відстані порядку товщини клейового шва від краю з'єднання і є близькими до значень, отриманих під час розрахунку за запропонованою методикою.

Розрахунок напруженого стану цього з'єднання за допомогою МСЕ також показує, що дотичні напруження в клейовому шарі в поперечному напрямку, які обумовлені ефектом Пуассона і які в запропонованій моделі не враховуються, не перевищують 25 % максимальних поздовжніх напружень. На поздовжній осі з'єднання ($y = b/2$) дотичні напруження в поперечному напрямку дорівнюють нулю внаслідок симетрії задачі. Максимальних значень поперечні дотичні напруження набувають в околі точок розриву функції (3.3.26) на деякій відстані від краю з'єднання. Таким чином, повні дотичні напруження в площині клейового шва, що визначаються за допомогою МСЕ, не перевищують максимальних дотичних напружень, які можуть бути знайдені за запропонованою методикою. Обидва методи показують близькі результати.

3.4. Напружений стан з'єднання при ексцентричному навантаженні

Сила, прикладена до з'єднання з ексцентриситетом, на деякій відстані від точки прикладення обумовлює в стрижнях зусилля, лінійно розподілені по ширині. Ці зусилля можна розглядати як суперпозицію рівномірного розтяг-стиску та кососиметричних зусиль, зумовлених згинальним моментом (рис. 3.4.1).

Задача знаходження напруженого стану з'єднання двох пластин, навантажених рівномірними зусиллями, добре відома, тому слід знайти

розв'язок лише задачі про напружений стан з'єднання, навантаженого лінійно розподіленими кососиметричними зусиллями.

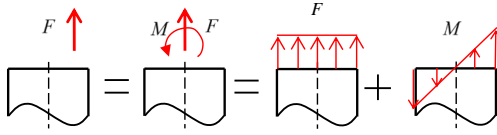


Рис. 3.4.1. Схема навантаження

Розглянемо клейове з'єднання двох прямокутних пластин (лінійні розміри пластин $L \times 2h$ і товщина δ_1 і δ_2 відповідно), показане на рис. 3.4.2. Бічні сторони пластин вільні від навантаження. Пластини деформуються тільки в площині з'єднання, клейовий шар працює на зсув, напруження є рівномірними по товщині шарів. Не применшуючи загальності пропонованого підходу, припустимо, що навантаження прикладено тільки до другого шару вздовж сторони $x=0$, а перший шар по боку $x=L$ жорстко закріплений. Покладемо, що прикладене до другого шару навантаження лінійно залежить від поперечної координати y .

Прикладене навантаження описується залежністю $F(y) = Ky$, де коефіцієнт $K = \frac{3M}{2h^3 \delta_2}$, M – згинальний момент, прикладений до з'єднання.

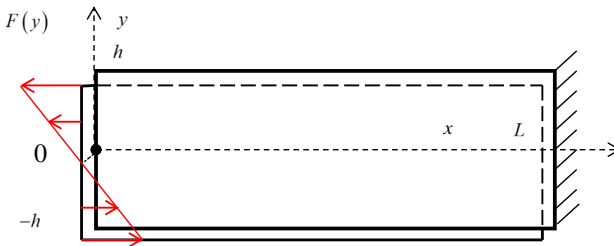


Рис. 3.4.2. Схема конструкції

Рівняння рівноваги несних шарів мають вигляд (3.1.1). Зусилля у шарах (деформації Пуассона не враховуємо) визначаються співвідношеннями

$$N_x^{(k)} = B_k \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}; \quad q^{(k)} = \delta^{(k)} G^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (3.4.1)$$

де $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ – переміщення шару k ($k=1, 2$) у поздовжньому й поперечному напрямках відповідно; $B_k = \delta^{(k)} E_x^{(k)}$; $E_x^{(k)}$, $G^{(k)}$, $\delta^{(k)}$ – модуль пружності, модуль зсуву й товщина відповідного несного шару.

Напруження в клейовому шарі є пропорційними різниці переміщень пластин:

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (u^{(1)} - u^{(2)}); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (v^{(1)} - v^{(2)}), \quad (3.4.2)$$

де G_0 і δ_0 – модуль зсуву й товщина клейового шару відповідно.

Однорідні крайові умови:

$$\begin{aligned} u^{(1)} \Big|_{x=L} &= 0; & v^{(1)} \Big|_{x=L} &= 0; & N_x^{(2)} \Big|_{x=L} &= 0; \\ N_x^{(1)} \Big|_{x=0} &= 0; & q^{(k)} \Big|_{y=\pm h} &= 0; & N_y^{(k)} \Big|_{y=\pm h} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

На лівому боці задано нормальне зусилля

$$N^{(2)} \Big|_{x=0} = F(y) = Ky. \quad (3.4.4)$$

Уважатимемо, що вигин пластин у площині з'єднання описується теорією балок Бернуллі. У цьому випадку переміщення пластин описуються залежностями

$$u^{(k)}(x, y) = -y \frac{d}{dx} V^{(k)}(x), \quad v^{(k)} = V^{(k)}(x), \quad k=1, 2. \quad (3.4.5)$$

Тут $V^{(k)}(x)$ – поперечні переміщення шару k у площині з'єднання (тобто рівняння пружної лінії) (рис. 3.4.3).

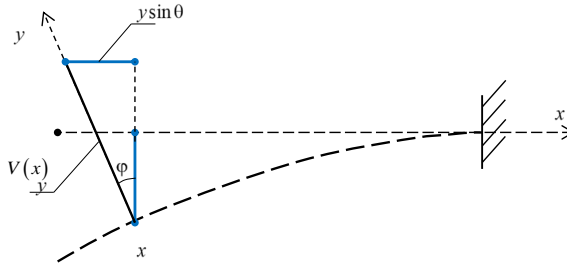


Рис. 3.4.3. Переміщення елементів балки

Якщо $V(x)$ – пружна лінія балки, то поздовжні переміщення точок, віддалених від осі балки на відстань y , дорівнюють $u = y \sin \varphi = -y \frac{dV}{dx}$, оскільки переміщення припускаємо малими (лінійна теорія).

Підставивши (3.4.5) у (3.4.2), отримаємо

$$\tau_x = -\frac{G_0}{\delta_0} y \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (V^{(1)} - V^{(2)}). \quad (3.4.6)$$

Підставивши поздовжні зусилля (3.4.1) $N_x^{(k)} = B_k y \frac{d^2 V^{(k)}}{dx^2}$ у (3.1.1), а потім інтегрувавши за y і задовольнивши умовам рівності нулю дотичних напружень на бічних сторонах з'єднання (3.4.2), отримаємо

$$q^{(k)} = (-1)^k \frac{h^2 - y^2}{2} \left[\frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right) - (-1)^k B_k \frac{d^3 V^{(k)}}{dx^3} \right]. \quad (3.4.7)$$

Підставивши (3.4.7) у (3.4.1) і інтегрувавши за змінною y , отримаємо

$$N_y^{(k)} = (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} y \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) + f^{(k)}(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y \right) \left[B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) \right]. \quad (3.4.8)$$

Функції $f^{(1)}(x)$ і $f^{(2)}(x)$ знаходимо, використовуючи умови (3.4.2)

$$N_y^{(k)} \Big|_{y=h} = 0:$$

$$f^{(k)}(x) = -\frac{h^3}{3} B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) - h \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) \right].$$

Крайові умови на другому боці $N_y^{(k)} \Big|_{y=-h} = 0$ приводять до системи диференціальних рівнянь

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \mathbf{V}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \mathbf{V}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \mathbf{V} = 0, \quad (3.4.9)$$

де

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \frac{\delta_0}{G_0} \begin{pmatrix} \delta^{(1)} E_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta^{(2)} E_x^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \frac{3}{h^3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (3.4.9) можна записати у вигляді

$$\mathbf{V} = \sum_{n=1}^4 S_n x^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^4 S_{n+4} e^{\theta_n x} \mathbf{H}_n, \quad (3.4.10)$$

де θ_n – відмінні від нуля корені характеристичного рівняння

$$\det(\mathbf{A}_4 \theta^4 + \mathbf{A}_2 \theta^2 + \mathbf{A}_0) = 0.$$

Вектори \mathbf{H}_n є розв'язками системи рівнянь

$$(\mathbf{A}_4 \theta_n^4 + \mathbf{A}_2 \theta_n^2 + \mathbf{A}_0) \mathbf{H}_n = 0$$

і визначаються з точністю до довільного множника S_n .

Для знаходження восьми невідомих констант, що входять до системи (3.4.10), сформулюємо вісім крайових умов:

$$V_1(L) = \left. \frac{dV_1(x)}{dx} \right|_{x=L} = \int_{-h}^h q^{(1)}(0, y) dy = \left. \frac{d^2V^{(1)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \int_{-h}^h q^{(2)}(0, y) dy = 0;$$

$$\int_{-h}^h q^{(2)}(L, y) dy = 0; \quad \left. \frac{d^2V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0; \quad \left. \frac{d^2V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{K}{E_x^{(2)}}.$$

Остання умова аналогічна класичному рівнянню вигину балки Бернуллі

$$E_x^{(2)} I^{(2)} \left. \frac{d^2V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = M, \text{ де момент інерції перерізу } I^{(2)} = \frac{2h^3 \delta_2}{3}.$$

Наведені вище умови утворюють систему лінійних рівнянь відносно невідомих констант S_1, \dots, S_8 .

Для аналізу напруженого стану з'єднання та верифікації запропонованої аналітичної моделі розглянуто з'єднання двох алюмінієвих ($E^{(1)} = E^{(2)} = 72$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,28$) пластин завдовжки $L = 90$ мм і завширшки $2h = 30$ мм. Товщина пластин $\delta_1 = 2,5$ мм і $\delta_2 = 2$ мм. Пластини склеєні клеєм, пружні параметри якого $G_0 = 0,34$ ГПа, $\mu = 0,32$ і товщина $\delta_0 = 0,1$ мм. Усі матеріали – ізотропні.

Для верифікації запропонованої аналітичної моделі згідно з наведеними вище параметрами створено тривимірну скінченно-елементну модель. Характерний розмір елемента в клейовому шарі дорівнює товщині клейового шару.

Напруження в серединній площині клейового шару в поздовжньому напрямку τ_{zx} , обчислені за допомогою скінченно-елементного моделювання, показано на рис. 3.4.4.

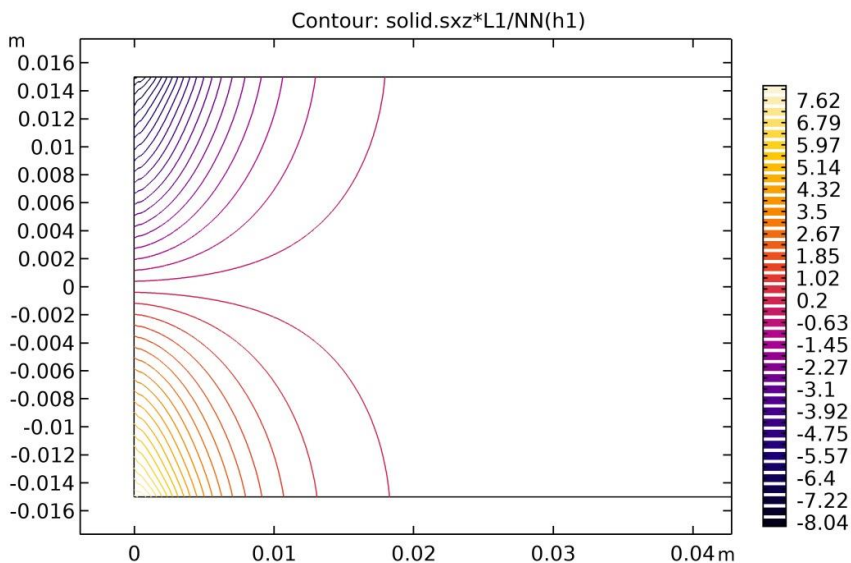


Рис. 3.4.4. Напруження в серединній площині клеювого шару (фрагмент конструкції)

Напруження на рисунку показано в безрозмірній формі, у вигляді відношення діючих напружень до деяких гіпотетичних напружень $\tau^* = \frac{F(h)}{L}$, які виникли б у з'єднанні в умовах рівномірного розподілу по довжині області склеювання прикладених погонних зусиль $F(h) = Kh$. Ці зусилля є максимальними значеннями доданих до з'єднання зусиль (3.4.5). Отже, відношення напружень $\frac{\tau_x(x, y)}{\tau^*}$ є якимось аналогом коефіцієнта концентрації напружень.

З графіка видно, що на осі симетрії напруження τ_{zx} дорівнюють нулю і збільшуються при наближенні до бічних сторін. На рис. 3.4.5 показано напруження τ_{zx} уздовж бічної сторони з'єднання ($y = h$), обчислені за

допомогою скінченно-елементного моделювання (FEM) і за допомогою запропонованої аналітичної моделі (AM), τ_x .

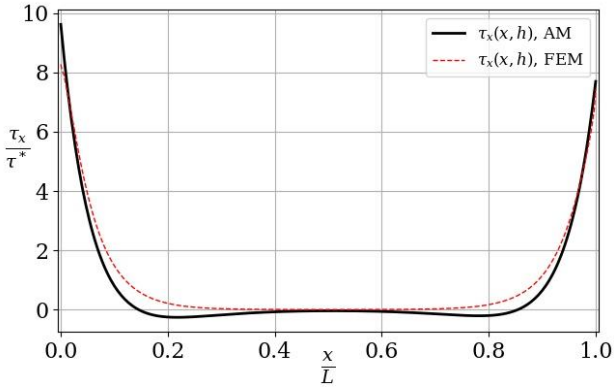


Рис. 3.4.5. Напруження τ_x у клейовому шарі вздовж бічної сторони

На рис. 3.4.6 показано напруження в поперечному напрямку τ_{zy} , які виникають у клейовому шарі вздовж бічної сторони з'єднання ($y = h$). Напруження обчислювалися за допомогою скінченно-елементного моделювання (FEM) і за допомогою запропонованої аналітичної моделі (AM), τ_y .

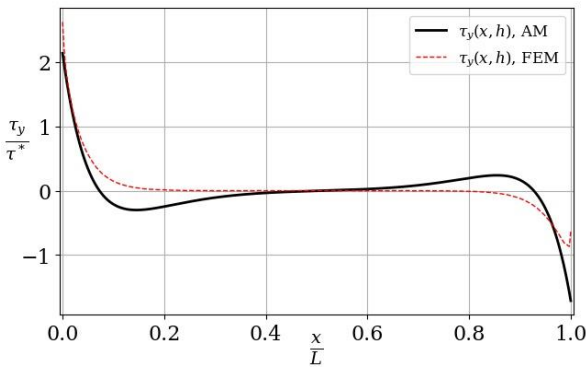


Рис. 3.4.6. Напруження τ_y у клейовому шарі вздовж бічної сторони

Як бачимо, значення напружень, які обчислено за допомогою запропонованої аналітичної моделі і за допомогою скінченно-елементного моделювання, практично збігаються. Найбільш навантаженими є кінці з'єднання, при цьому аналітична модель дає дещо завищені значення напружень порівняно зі скінченно-елементною моделлю. Це добре відомо [5] і зумовлено сукупністю спрощувальних гіпотез, що лежать у основі моделі. Однак це не знижує можливості використання запропонованої моделі для розв'язання задач оптимізації та проектування з'єднань.

Важлива відмінність між скінченно-елементною й аналітичною моделями полягає в тому, що згідно з запропонованою аналітичною моделлю напруження в клейовому шарі в поперечному напрямку є постійними по ширині пластин і змінюються тільки в поздовжньому напрямку, оскільки залежать лише від координати x . Водночас тривимірна скінченно-елементна модель дає змогу вивчити розподіл напружень у клейовому шарі τ_y та в поперечному напрямку.

Напруження в серединній площині клейового шару в поздовжньому напрямку, обчислені за допомогою скінченно-елементного моделювання, показано на рис. 3.4.7.

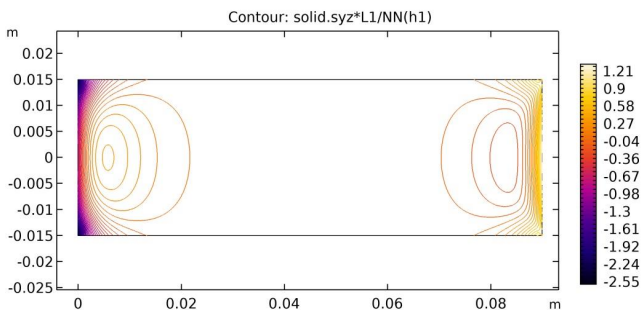


Рис. 3.4.7. Напруження τ_y у серединній площині клейового шару

На рис. 3.4.8 зображено графіки, які ілюструють розподіл напружень у клейовому шарі в поперечному напрямку (τ_y) по ширині з'єднання. Наведені графіки отримано шляхом скінченно-елементного моделювання. На графіках

показано розподіл напружень τ_y по ширині клейового шару на відстані $0,025L$, $0,05L$, $0,1L$ і $0,02L$ від лівого краю з'єднання.

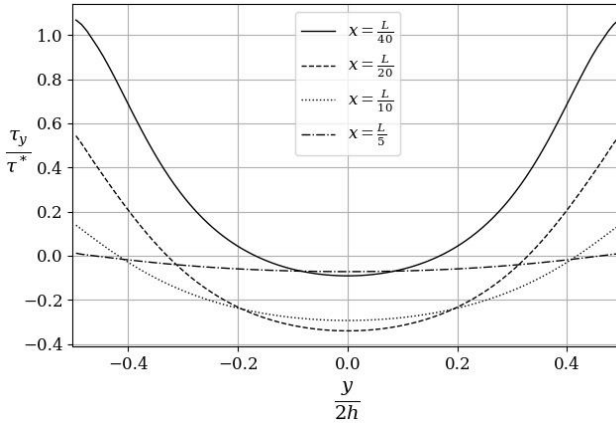


Рис. 3.4.8. Напруження в клейовому шарі в поперечному напрямку на різних відстанях від навантаженого краю

Слід зазначити, що скінченно-елементне моделювання показує, що нормальні напруження в несних шарах розподіляються по ширині практично за лінійним законом. А зусилля $N_x^{(1)}$ і $N_x^{(2)}$ збігаються з результатами скінченно-елементного моделювання. Отже, застосування теорії балок Бернуллі для опису переміщень і деформацій несних шарів є обґрунтованим.

3.5. Напружений стан з'єднання двох пластин, одна з яких навантажена поздовжніми зусиллями, а інша – закріплена вздовж бічної сторони

Розглянемо симетричне клейове з'єднання двох прямокутних пластин, що мають розміри $a \times b$ (рис. 3.5.1). Щоб зменшити вплив вигину на напруження в несних шарах у площині з'єднання, будемо вважати, що, $a > b$. Поздовжнє навантаження прикладено до сторони $x = a$ першої пластини (першого несного

шару), друга пластина (другий несний шар) жорстко закріплена вздовж бічної сторони $y=0$.

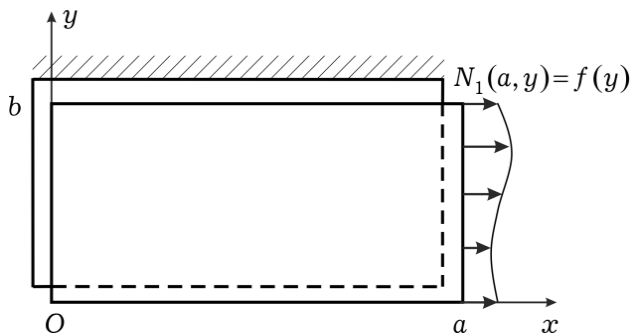


Рис. 3.5.1. Схема з'єднання

Розв'язок задачі базується на гіпотезах:

- напруження рівномірно розподілені по товщині шарів;
- клейовий прошарок працює тільки на зсув;
- вигину конструкції немає;
- поперечних переміщень немає, тобто несні шари – абсолютно жорсткі в напрямку координатної осі.

Напруження в клейовому прошарку вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів (модель Фолькєрсена):

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}(U_2 - U_1), \quad (3.5.1)$$

де G_0 – модуль зсуву клею; δ_0 – товщина клейового прошарку; $U_m(x, y)$ – поздовжні переміщення шару m .

Крайові умови мають вигляд

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad U_2(x, b) = 0, \quad (3.5.2)$$

$$N_1(a, y) = E_1 \delta_1 \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=a} = f(y), \quad (3.5.3)$$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (3.5.4)$$

Умови (3.5.2) існують на бічних сторонах пластин при жорсткому закріпленні або коли дотичні напруження дорівнюють нулю, а умови (3.5.3) і (3.5.4) – на торцях пластин, коли задано зусилля на торці першого шару (3.5.3) і вільні від навантаження сторони (3.5.4).

Вище було показано, що переміщення одного з несних шарів описуються диференціальним рівнянням у частинних похідних (3.3.7), яке запишемо для зручності в дещо інших позначеннях:

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0. \quad (3.5.5)$$

Рівняння (3.3.7) розв'язували за допомогою методу відокремлення змінних при умові $\mu_1 = \mu_2$ та при рівності нулю дотичних напружень на бічних сторонах пластин. Воно має вигляд $U_m = W_m(x) + V_m(x, y)$, де $W_m(x)$ – класичний одновимірний розв'язок Фолькерсена, а $V_m(x, y)$ – функціональний ряд, що складається з частинних розв'язків, які можна записати як лінійні комбінації функцій вигляду $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ або $e^{\pm \lambda x} \cos ky$.

З умови рівності нулю поздовжніх переміщень уздовж однієї з бічних сторін однієї з пластин (3.5.2) випливає, що $W_2(x) = 0$. Із системи (3.3.2) маємо, що і $W_1(x) = 0$. Частинні розв'язки рівняння (3.5.5) шукаємо також у вигляді $e^{\pm \lambda x} \sin ky$ (або $e^{\pm \lambda x} \cos ky$). Підставивши цей вираз у (3.5.5), отримаємо алгебричне рівняння, яке зв'язує λ і k :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0, \quad (3.5.6)$$

Звідки випливає, що кожному значенню $\pm\lambda$ відповідають чотири значення k , які можна записати у формі $\pm k_1(\lambda)$ і $\pm k_2(\lambda)$. Отже, частинний розв'язок (3.5.5), що відповідає, наприклад, додатному λ , має вигляд

$$U_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

де C_m, S_m – довільні сталі.

Зі співвідношення (3.3.6) знаходимо

$$U_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

де $\gamma_m = 1 - \alpha_1 (\lambda^2 - \mu_1 k_m^2(\lambda))$, $m = 1, 2$.

Частинні розв'язки мають задовольняти однорідним крайовим умовам (3.5.2). З умови рівності нулю дотичних напружень в обох пластинах на сторонах $y=0$ випливає, що $S_1 = S_2 = 0$. Частинні розв'язки справджуються і для від'ємних значень λ , тому можемо записати

$$U_m^* = X^{(m)}(x) Y^{(m)}(y),$$

де

$$X^{(m)}(x) = \cosh \lambda x + C \sinh \lambda x,$$

$$Y^{(1)}(y) = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y, \quad Y^{(2)}(y) = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y,$$

де C, C_1, C_2 – довільні сталі.

Покладемо, що крайові умови на сторонах $x=0$ виконуються точно. Тоді $C=0$. Крім того, вважаємо, що на сторонах $y=b$ вони також виконуються точно. Таким чином,

$$\left. \frac{dY^{(2)}}{dy} \right|_{y=b} = 0, \quad Y^{(2)}(b) = 0.$$

Ці умови приводять до однорідної системи лінійних рівнянь

$$\mathbf{A} \cdot \vec{C} = 0, \tag{3.5.7}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k_1 \sin k_1 b & k_2 \sin k_2 b \\ \gamma_1 \cos k_1 b & \gamma_2 \cos k_2 b \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Система (3.5.7) має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\det(\mathbf{A}) = 0. \quad (3.5.8)$$

Рівняння (3.5.8) має нескінченну множину коренів λ_n . Позначимо $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$, $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$. Із системи (3.5.7) знаходимо коефіцієнти $C_{1,n}$ і $C_{2,n}$, що відповідають числам λ_n . Їх, а також функції $Y_n^{(m)}$ визначимо з точністю до довільного множника. Для полегшення аналізу збіжності отриманого розв'язку введемо умову нормування

$$\int_0^b [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^b [Y_n^{(2)}]^2 dx = 1. \quad (3.5.9)$$

Таким чином,

$$U_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \quad (3.5.10)$$

де B_n – коефіцієнти, які визначаються з крайових умов на сторонах $x = a$ обох пластин; $\lambda_n \sinh \lambda_n a$ – нормувальний множник; $Y_n^{(m)}$ – нормовані функції, у яких коефіцієнти $C_{1,n}$ і $C_{2,n}$ задовольняють рівнянням (3.5.7) і (3.5.9).

З формул (3.3.4) маємо

$$N_m = E_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh \lambda_n x}{\sinh \lambda_n a} \cdot Y_n^{(m)}, \quad (3.5.11)$$

$$q_m = G_m \delta_m \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cosh \lambda_n x}{\lambda_n \cosh \lambda_n a} \cdot Z_n^{(m)}, \quad Z_n^{(m)} = \frac{dY_n^{(m)}}{dy}.$$

Крайові умови на сторонах $x = a$ є такими:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = \frac{f(y)}{E_1 \delta_1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = 0.$$

Системи функцій $Y_n^{(1)}$ і $Y_n^{(2)}$ на відрізку $y \in [0; b]$ не є ортогональними.

Для пошуку невідомих коефіцієнтів B_n використовуємо метод найменших квадратів, тобто мінімізуємо середньоквадратичне відхилення зусиль (3.5.11) на сторонах $x = a$ від заданих крайових умов (3.5.3) і (3.5.4). Додавання обмежимо деяким числом доданків N :

$$J = \int_0^b \left[\left(\sum_{n=1}^N B_n Y_n^{(1)}(y) - \frac{f(y)}{E_1 \delta_1} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N B_n Y_n^{(2)} \right)^2 \right] dy \rightarrow \min.$$

З умов екстремуму $\frac{\partial J}{\partial B_n}$ одержимо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N B_n \int_0^b \left(Y_n^{(1)} Y_j^{(1)} + Y_n^{(2)} Y_j^{(2)} \right) dy = \int_0^b \frac{f(y)}{E_1 \delta_1} Y_n^{(1)} dy, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.5.12)$$

Після нормування (3.5.9) діагональні коефіцієнти матриці системи (3.5.7) дорівнюють одиниці, а позадіагональні – зменшуються при віддаленні від головної діагоналі. Доведено, що ці коефіцієнти системи прямують до нуля при необмеженому зростанні одного з індексів.

З метою перевірки знайденого розв'язку й оцінювання його точності та меж застосування наведемо модельну задачу. Розглянемо клейове з'єднання двох пластин з такими параметрами: $a = 50 \text{ мм}$, $b = 30 \text{ мм}$, $\delta_1 = 2 \text{ мм}$, $\delta_2 = 3 \text{ мм}$, $E_1 = E_2 = 70 \text{ ГПа}$, $G_1 = G_2 = 25 \text{ ГПа}$. Параметри клейового шару: $\delta_0 = 0,3 \text{ мм}$, $G_0 = 0,5 \text{ ГПа}$. Навантаження прикладається рівномірно по ширині з'єднання: $f(y) = P = \text{const}$.

Нормовані власні функції $Y_n^{(1)}(y)$ і $Y_n^{(2)}(y)$ мають вигляд, показаний на рис. 3.5.2. і 3.5.3.

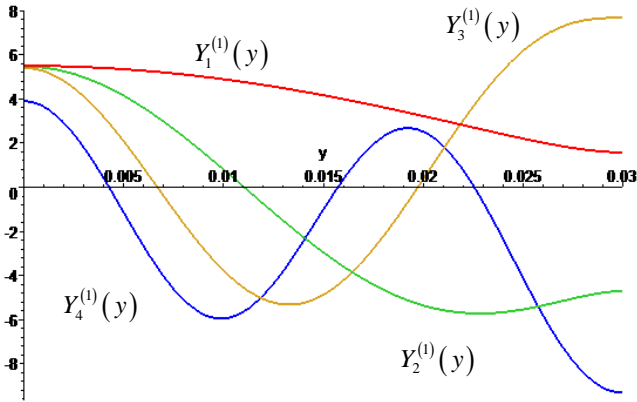


Рис. 3.5.2. Функції $Y_1^{(1)}(y), \dots, Y_4^{(1)}(y)$

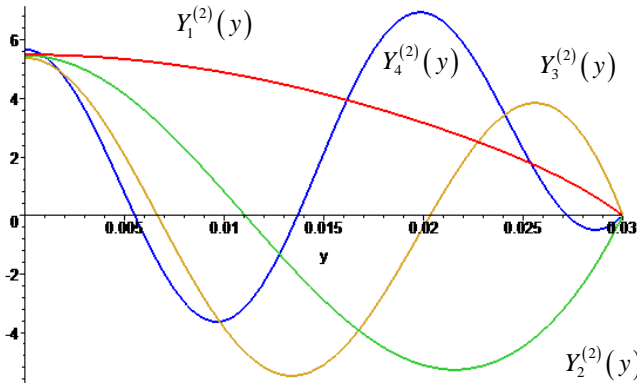


Рис. 3.5.3. Функції $Y_1^{(2)}(y), \dots, Y_4^{(2)}(y)$

Як бачимо, кількість коренів функцій $Y_n^{(1)}(y)$ дорівнює $n - 1$. Похідна від функцій на кінцях інтервалу дорівнює нулю.

Графік дотичних напружень у клейовому шарі зображено на рис 3.5.4. Напруження показано в безрозмірній формі як відношення діючих напружень до гіпотетичних, які б існували в з'єднанні при рівномірному розподілі по шару доданого навантаження.

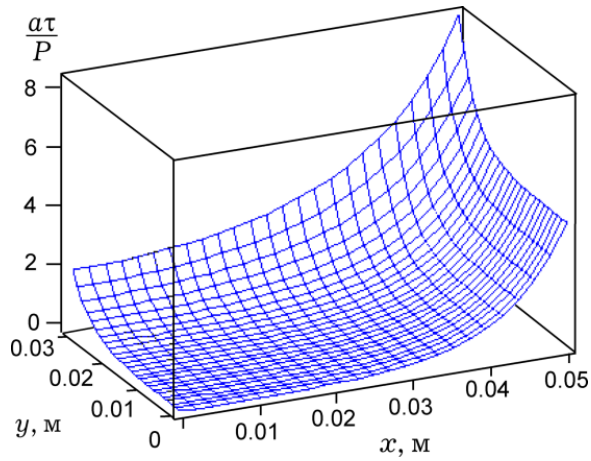


Рис. 3.5.4. Розподіл дотичних напружень (3.5.1) у клейовому шарі

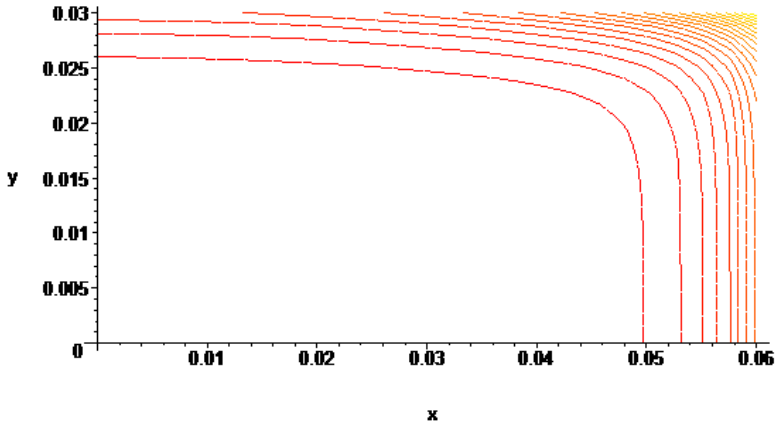


Рис. 3.5.5. Розподіл напружень у клейовому шарі

Як бачимо, дотичні напруження набувають максимуму в кутовій точці на перетині жорстко закріпленої сторони і тієї сторони, до якої прикладається

навантаження. На рис. 3.5.5 показано розподіл напружень у клейовому шарі у вигляді ліній рівня.

Для верифікації знайденого розв'язку здійснено порівняння результатів розрахунку, отриманих за допомогою наведеної моделі й за допомогою МСЕ. На рис. 3.5.6 побудовано графіки розподілу дотичних напружень у клейовому шарі, обчислених за запропонованою моделлю (суцільна лінія) і за МСЕ в середині товщини клейового шару (штрихова лінія) уздовж закріпленої сторони $y=b$ і вздовж середини шарів, що склеюються, $y=0.5b$.

Виявлено, що в обох випадках вони є дуже близькими. Розрахунки також свідчать про те, що дотичні напруження в серединній площині клейового шару в напрямку осі y , які в запропонованій моделі не враховуються, не перевищують 30 % від напружень у поздовжньому напрямку. Отже, максимальні результівні напруження лише на 6 % перевищують такі в поздовжньому напрямку. Однак модель дає дещо завищені значення дотичних напружень в околі краю шва, оскільки не враховуються крайові умови на торці клейового шару. Тому максимальні напруження, обчислені за МСЕ і за допомогою запропонованої моделі, різняться лише на кілька відсотків.

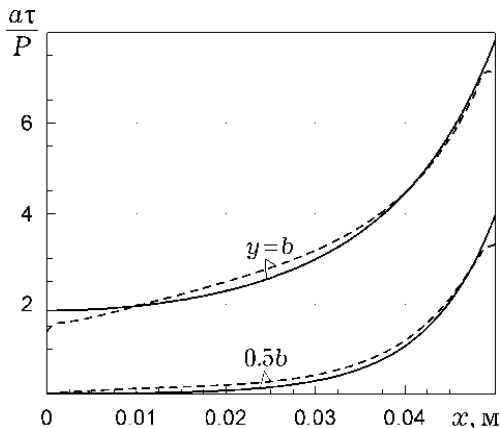


Рис. 3.5.6. Розподіл дотичних напружень у клейовому шарі

Отримано аналітичний розв'язок задачі про двовимірний напружений стан клейового з'єднання двох прямокутних пластин, одна з яких навантажена поздовжніми зусиллями, а інша – закріплена за бічною стороною. Ці крайові умови розглянуто вперше. Для побудови розв'язку використано гіпотезу про високу жорсткість несних шарів у поперечному напрямку.

Розв'язано модельну задачу. Порівнянням розрахунків, отриманих за допомогою запропонованої моделі та за МСЕ, встановлено, що модель має високу точність і є придатною для розв'язання задач при проектуванні й оптимізації з'єднань. Запропонований підхід можна використовувати при побудові аналітичних розв'язків задач про напружений стан пластин з ремонтними накладками, з'єднань стрингерів з обшивкою тощо.

3.6. Напружений стан з'єднання пластин, навантажених дотичними зусиллями

Під час експлуатації бувають випадки, коли авіаційні конструкції працюють на зсув. На рис. 3.6.1 показано приклад такої конструкції. Крило літака навантажене розподіленим тиском по обшивці, який зводиться у перерізі крила до перерізувальної сили, згинального й крутного моментів. Це зумовлює виникнення в обшивці та стінках конструкції дотичних зусиль. Передавання зусиль між різними силовими елементами організується за допомогою накладок і з'єднань. Крім того, розподіл дотичних напружень у поясі лонжерона в загальному випадку є нерівномірним по ширині, тому в цьому підрозділі описано розвиток відомої моделі із рівномірним розподілом дотичного навантаження по ширині на випадок нерівномірного розподілу дотичного навантаження по ширині.

Розглянемо клейове з'єднання двох прямокутних пластин ($a \times b$), показане на рис. 3.6.2. До протилежних бічних сторін $y=0$ і $y=b$ прикладається зсувне навантаження. Торці $x=0$ і $x=a$ – вільні від навантаження. Позначимо товщини першого й другого несних шарів δ_1 і δ_2 відповідно. Товщину

з'єднувального шару позначимо δ_0 . Уважаємо, що несні шари деформуються тільки в площині з'єднання (площині xOy), клейовий шар працює тільки на зсув, напруження рівномірно розподіляються по товщині шарів.

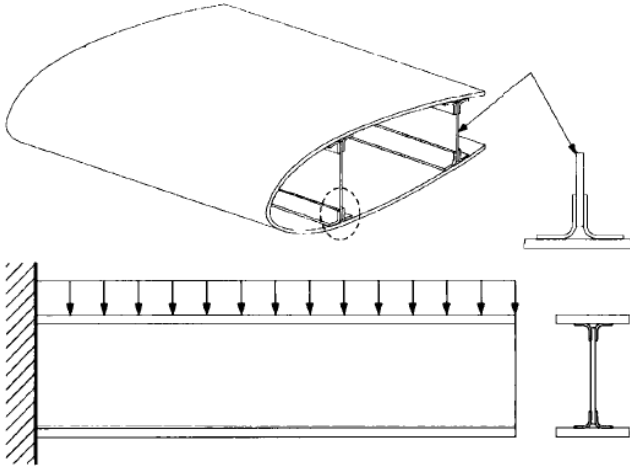


Рис. 3.6.1. Крило, що працює на зсув

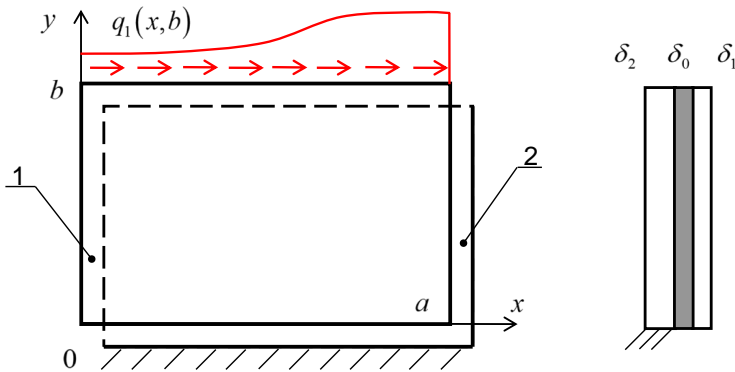


Рис. 3.6.2. Схема з'єднання

Уважаємо, що $a > b$, і вигином пластин у площині з'єднання можна знехтувати. Розв'язок задачі будемо, спираючись на сукупність гіпотез, які викладено у попередніх підрозділах. Переміщення шарів описуються системою

рівнянь (3.3.2).

Крайові умови на торцях мають вигляд $q_k(0, y) = q_k(a, y) = 0$, тобто

$$\left. \frac{\partial U_k}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U_k}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (3.6.1)$$

На бічних сторонах задано або переміщення

$$U_k|_{y=0} = v_k^{(1)}(x); \quad U_k|_{y=b} = v_k^{(2)}(x), \quad (3.6.2)$$

або дотичні зусилля

$$q_k|_{y=0} = G_k \delta_k \left. \frac{\partial U_k}{\partial y} \right|_{y=0} = Q_k^{(1)}(x); \quad q_k|_{y=b} = G_k \delta_k \left. \frac{\partial U_k}{\partial y} \right|_{y=b} = Q_k^{(2)}(x). \quad (3.6.3)$$

Крім того, на одних сторонах можуть бути задані переміщення, а на інших – дотичні зусилля. Умова (3.6.1) є умовою рівності нулю нормальних напружень у несних шарах на торцях $x=0$ і $x=a$.

Як було показано вище, систему (3.3.1) можна звести до диференціального рівняння відносно переміщень одного з шарів (3.3.7), (3.5.5):

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0.$$

Позначимо

$$\Phi = \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}. \quad (3.6.4)$$

При $c_1^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $c_2^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu_1^2 \mu_2^2}{\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_2 \mu_2^2}$, а також $\mu_1 = \mu_2 \left(\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2} \right)$ рівняння

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Phi = 0 \quad (3.6.5)$$

є еквівалентним рівнянню (3.6.4). Тут $\alpha_k = E_k \delta_k \frac{\delta_0}{G_0}$; $\mu_k = \frac{G_k}{E_k}$; $k=1, 2$.

Умова $\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2}$, очевидно, обмежує сферу застосування запропонованого

методу розв'язання. Однак, якщо з'єднувальні матеріали є однаковими (що характерно для сендвіч-панелей і ремонтних накладок) або ж мають близькі коефіцієнти Пуассона, то запропонований підхід – виправданий. Позначимо $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. У такому випадку отримаємо $c_2 = \mu c_1$. Вираз (3.6.4) можна подати у вигляді

$$\Phi = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (3.6.6)$$

Переміщення другого шару відповідно подамо у вигляді (3.3.11).

З урахуванням крайових умов (3.6.1) зі співвідношення (3.6.6) випливає, що

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (3.6.7)$$

Рівняння (3.6.5) розв'яжемо методом відокремлення змінних. Частинні розв'язки рівняння будемо шукати у вигляді $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. Після підстановки в рівняння (3.6.5) і виконання граничних умов (3.6.1) отримаємо

$$\frac{c_1^2 X''}{X} = -\frac{c_2^2 Y'' - Y}{Y};$$

$$X'(0) = 0; X'(a) = 0.$$

Оскільки обидві частини рівності залежать від різних змінних, то отримана рівність можлива тільки в разі, коли обидві її частини – сталі.

$$\frac{c_1^2 X''}{X} = -\frac{c_2^2 Y'' - Y}{Y} = -\tilde{\lambda}. \quad (3.6.8)$$

Таким чином, отримуємо спектральну задачу

$$\begin{cases} X'' + \frac{\tilde{\lambda}}{c_1^2} X = 0; \\ X'(0) = 0; X'(a) = 0. \end{cases} \quad (3.6.9)$$

Знайдемо власні значення спектральної задачі.

Нехай $\tilde{\lambda} = 0$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (3.6.9) матиме вигляд $X(x) = Ax + B$. Підставляючи його в крайові умови (3.6.9), одержуємо рівняння $A = 0$, а стали B з цих крайових умов визначити неможливо. Отже, у випадку $\tilde{\lambda} = 0$ спектральна задача (3.6.9) матиме розв'язок

$$X(x) = B. \quad (3.6.10)$$

Нехай $\tilde{\lambda} = -\lambda^2 < 0$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд $X(x) = Ae^{\frac{\lambda x}{c_1}} + Be^{-\frac{\lambda x}{c_1}}$. Підставляючи його в крайові умови (3.6.9), одержуємо систему рівнянь для визначення сталих A і B :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{c_1} A - \frac{\lambda}{c_1} B = 0, \\ \frac{\lambda}{c_1} A e^{\frac{\lambda a}{c_1}} - \frac{\lambda}{c_1} B e^{-\frac{\lambda a}{c_1}} = 0. \end{cases}$$

Звідси $B = A$, $A \left(e^{\frac{\lambda a}{c_1}} - e^{-\frac{\lambda a}{c_1}} \right) = 2A \operatorname{sh} \frac{\lambda a}{c_1} = 0$. У цьому випадку $\lambda \neq 0$, тому

$A = 0$, $B = 0$. Отже, для будь-якого значення $\tilde{\lambda} = -\lambda^2 < 0$ задача (3.6.14), (3.6.15) має тільки тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$.

Нехай, нарешті, $\tilde{\lambda} = \lambda^2 > 0$. У цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (3.6.9) матиме вигляд $X(x) = A \cos \frac{\lambda x}{c_1} + B \sin \frac{\lambda x}{c_1}$.

Підставляючи його в крайові умови (3.6.9), одержуємо систему рівнянь для визначення сталих A і B :

$$\begin{cases} \frac{B\lambda}{c_1} = 0, \\ -\frac{A\lambda}{c_1} \sin \frac{\lambda a}{c_1} + \frac{B\lambda}{c_1} \cos \frac{\lambda a}{c_1} = 0. \end{cases}$$

Звідси, оскільки $\lambda \neq 0$, отримуємо $B = 0$, $-\frac{A\lambda}{c_1} \sin \frac{\lambda a}{c_1} = 0$. Якщо покласти $A = 0$, то знову одержимо тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому вважаємо, що $\sin \frac{\lambda a}{c_1} = 0$. Розв'язавши це рівняння, маємо $\lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a}$, при цьому власні

значення спектральної задачі матимуть вигляд $\tilde{\lambda} = \left(\frac{\pi n c_1}{a}\right)^2$, а система власних функцій задачі (3.6.9) буде такою:

$$X_n(x) = \cos \frac{\lambda_n x}{c_1}, \text{ де } \lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

З урахуванням (3.6.16) маємо

$$X_n(x) = \cos \frac{\lambda_n x}{c_1}, \text{ де } \lambda_n = \frac{\pi n c_1}{a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

З другої частини рівності (3.6.8), ураховуючи, що $\tilde{\lambda} = \lambda_n^2$, одержимо рівняння $Y_n'' - \frac{(1 + \lambda_n^2)}{c_2^2} Y_n = 0$, розв'язком якого є функції

$$Y_n(y) = A_n \cosh \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}{c_2} y \right) + B_n \cosh \left(\frac{\sqrt{1 + \lambda_n^2}}{c_2} (y - b) \right).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.6.5) можна подати у вигляді

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y - b)) \right] \cos \frac{\pi n x}{a}, \quad (3.6.11)$$

де $\xi_n = \frac{\sqrt{1+\lambda_n^2}}{c_2}$; A_n, B_n – довільні коефіцієнти.

На наступному етапі побудови розв'язку необхідно знайти спільний розв'язок рівняння (3.6.5). Розв'язок будемо шукати у вигляді лінійної суперпозиції розв'язків V і W :

$$U_1 = V + W, \quad (3.6.12)$$

де V є загальним розв'язком однорідного рівняння (3.6.4) з однорідними граничними умовами (3.6.1)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (3.6.13)$$

Функція W є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (3.6.4), що відповідає заданій функції (3.6.11).

Розв'язок рівняння (3.6.13) також будемо шукати методом відокремлення змінних. Шукану функцію подамо у вигляді добутку $V(x; y) = X(x)Y(y)$.

Операція відокремлення змінних приводить до рівнянь

$$X'' + \Lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \frac{\Lambda^2}{\mu^2} Y = 0, \quad (3.6.14)$$

де $-\Lambda^2$ ($\Lambda \geq 0$) – параметр відокремлення змінних.

Загальний розв'язок першого рівняння (3.6.14) при умові $\Lambda > 0$ має вигляд

$$X(x) = C_3 \sin \Lambda x + C_4 \cos \Lambda x.$$

Функція $X(x)$ задовольняє однорідним граничним умовам (3.6.1) і не дорівнює нулю тотожно тільки при $\Lambda_n = \frac{\pi n}{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Таким чином,

$$\text{маємо } X(x) = \cos \frac{\pi n x}{a}.$$

Розв'язок другого рівняння (3.6.20) при $\Lambda = \Lambda_n$ має вигляд

$$Y_n(y) = C_n \cosh \frac{\Lambda_n y}{\mu} + D_n \cosh \frac{\Lambda_n (y-b)}{\mu}.$$

Якщо ж параметр відокремлення змінних Λ дорівнює нулю, то загальними розв'язками рівняння (3.6.13) є лінійні функції від координат x і y . Однорідні крайові умови (3.6.1) у цьому випадку будуть виконуватися, якщо $X(x) = \text{const}$. Отже, розв'язок рівняння (3.6.12), який задовольняє крайові умови (3.6.1), можна записати у вигляді

$$V = C_0 y + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh(\chi_n (y-b))) \cos \frac{\pi n x}{a},$$

де $\chi_n = \frac{\pi n}{\mu a}$; C_n , D_n – довільні коефіцієнти.

Функція Φ у рівнянні (3.6.4) має вигляд (3.6.11), після деяких перетворень частинний розв'язок (3.6.4) можна подати у вигляді

$$W = \frac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \left[A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y-b)) \right].$$

На основі (3.6.4) і (3.6.11) отримаємо

$$\begin{aligned} U_k = & C_0 y + D_0 + d_k (A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh(\xi_0 (y-b))) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \left[C_n \cosh(\chi_n y) + D_n \cosh(\chi_n (y-b)) + \right. \\ & \left. + d_k (A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n (y-b))) \right], \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

де $k = 1, 2$; $d_1 = \frac{c_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $d_2 = \frac{c_1^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Дотичні зусилля в несних шарах (3.6.2) мають вигляд

$$\begin{aligned} q_k = & \delta_k G_k \left[C_0 + d_k \xi_0 (A_0 \sinh(\xi_0 y) + B_0 \sinh(\xi_0 (y-b))) \right] + \\ & + \delta_k G_k \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \left[\chi_n (C_n \sinh(\chi_n y) + D_n \sinh(\chi_n (y-b))) \right] + \end{aligned}$$

$$+ d_k \xi_n (A_n \sinh(\xi_n y) + B_n \sinh(\xi_n (y - b))) \Big]. \quad (3.6.16)$$

Крайові умови (3.6.2) розвинемо в ряд Фур'є за власними функціями задачі (3.6.8), (3.6.9) на інтервалі $(0; a)$:

$$\begin{aligned} Q_1^{(1)}(x) = 0, \quad Q_1^{(2)}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{a}, \\ U_2(x, 0) = 0, \quad Q_2^2(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a Q_1^{(2)}(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a Q_1^{(2)}(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx.$$

Після виконання крайових умов (3.6.2) одержимо системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n :

$$\begin{cases} C_0 - d_1 \xi_0 B_0 \sinh(\xi_0 b) = 0; \\ C_0 + d_1 \xi_0 A_0 \sinh(\xi_0 b) = \frac{a_0}{2 \delta_1 G_1}; \\ D_0 + d_2 (A_0 + B_0 \cosh(\xi_0 b)) = 0; \\ C_0 + d_2 \xi_0 A_0 \sinh(\xi_0 b) = 0; \end{cases} \quad (3.6.18)$$

$$\begin{cases} \chi_n D_n \sinh(\chi_n b) + d_1 \xi_n B_n \sinh(\xi_n b) = 0; \\ \chi_n C_n \sinh(\chi_n b) + d_1 \xi_n A_n \sinh(\xi_n b) = \frac{a_n}{\delta_1 G_1}; \\ C_n + D_n \cosh(\chi_n b) + d_2 (A_n + B_n \cosh(\xi_n b)) = 0; \\ \chi_n C_n \sinh(\chi_n b) + d_2 \xi_n A_n \sinh(\xi_n b) = 0. \end{cases} \quad (3.6.19)$$

Розв'язок систем (3.6.18) і (3.6.19) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_0 = -\frac{1}{2} \frac{a_0}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)}; \quad B_0 = \frac{1}{2} \frac{d_2}{d_1} \frac{a_0}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)}; \\ C_0 = \frac{1}{2} \frac{a_0 d_2}{\delta_1 G_1 (d_2 - d_1)}; \quad D_0 = -\frac{1}{2} \frac{d_2}{d_1} \frac{a_0 (d_2 \cosh(\xi_0 b) - d_1)}{\xi_0 \delta_1 G_1 (d_2 - d_1) \sinh(\xi_0 b)}; \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{a_n}{\xi_n \delta_1 G_1(d_1 - d_2) \sinh(\xi_0 b)}; C_n = -\frac{a_n \xi_n d_2}{\chi_n \delta_1 G_1(d_1 - d_2) \sinh(\chi_n b)};$$

$$B_n = \frac{d_1 d_2 a_n}{\xi_n \delta_1 G_1(d_1 - d_2) [d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b) \cosh(\xi_n b) - d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b) \cosh(\chi_n b)]};$$

$$D_n = -\frac{d_2 a_n \sinh(\chi_n b)}{\delta_1 G_1(d_1 - d_2) \sinh(\xi_n b) [d_2 \chi_n \sinh(\chi_n b) \cosh(\xi_n b) - d_1 \xi_n \sinh(\xi_n b) \cosh(\chi_n b)]}.$$

З наведених формул випливає, що $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \frac{H[a_n]}{nR(\xi_n; \chi_n)}$, де $H[a_n]$ –

деякі лінійні вирази з постійними коефіцієнтами, що залежать від a_n (3.6.22), а

$$R(\xi_n; \chi_n) = \{\sinh(\xi_n b); \sinh(\chi_n b)\}. \text{ Отже, } A_n, B_n, C_n, D_n \sim \frac{1}{n^s R(\xi_n; \chi_n)}, \text{ де } s \geq 2.$$

Таким чином, гіперболічні функції $\frac{\cosh(\chi_n y)}{\sinh(\chi_n b)}$, $\frac{\cosh(\chi_n(y-h))}{\sinh(\chi_n b)}$, $\frac{\cosh(\xi_n y)}{\sinh(\xi_n b)}$ та

інші функції на інтервалі $y \in (0; b)$ є обмеженими і зі збільшенням n експоненціально прямують до нуля. З огляду на сказане вище, можна зробити висновок про те, що всередині цієї області ряди Фур'є (3.6.16) двічі диференціюються і задовольняють рівнянням (3.3.1), а ряди (3.6.15) і (3.6.16) на відріжку $y \in [0; b]$ збігаються рівномірно.

Дотичні напруження в клейовому шарі (3.5.1) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \tau = & -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{G_0}{\delta_0} [A_0 \cosh(\xi_0 y) + B_0 \cosh(\xi_0(y-b))] - \\ & -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{G_0}{\delta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} [A_n \cosh(\xi_n y) + B_n \cosh(\xi_n(y-b))]. \end{aligned}$$

Можна зазначити, що в цій формулі доданки, що стоять поза знаком суми, є відомим одновимірним розв'язком [150] і описують напруження в клейовому шарі при рівномірному дотичному навантаженні. При цьому складові, що стоять під знаком суми, описують напруження в клеї, спричинені

самозрівноваженим навантаженням, оскільки $\int_0^a \cos \frac{\pi n x}{a} dx = 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$

Можна показати, що в глибині області, при видаленні від країв $y = 0$ і $y = b$ складові, що стоять під знаком суми, експоненціально зменшуються, що збігається з принципом Сен-Венана. Іншими словами з'єднані пластини будуть досить великими, то на віддаленні від краю напружений стан з'єднання буде мало залежати від конкретного розподілу навантаження по краю й визначатиметься лише сумарною величиною навантаження $a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a Q_k^{(2)}(x) dx$.

Наведемо модельну задачу. Розглянемо клейове з'єднання двох алюмінієвих пластин, що мають розміри $a = 6 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$, $\delta_1 = 3 \text{ мм}$, $\delta_2 = 2 \text{ мм}$. Товщина клейового прошарку $\delta_0 = 0,1 \text{ мм}$. Пружні характеристики матеріалів з'єднання є такими: $E_1 = E_2 = 70 \text{ ГПа}$, $G_1 = G_2 = 27 \text{ ГПа}$, $G_0 = 0,5 \text{ ГПа}$. Геометрію моделі показано на рис. 3.6.3.

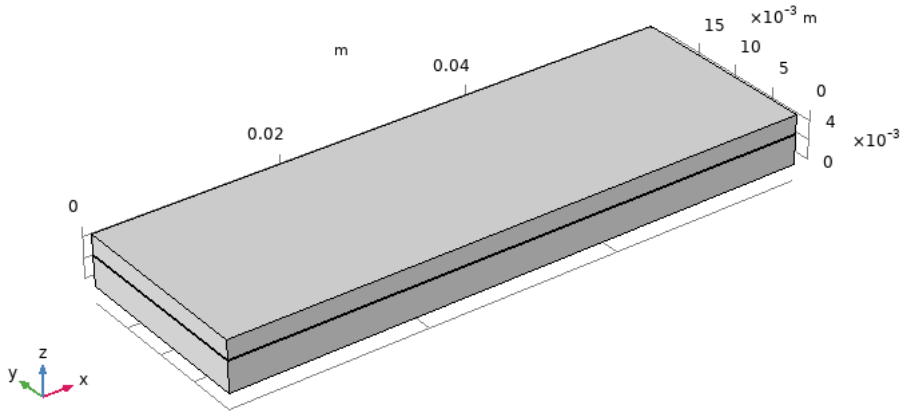


Рис. 3.6.3. Геометрія склеєної конструкції

Задамо такі крайові умови на бічних сторонах пластин, що склеюються:

$$q_1(x,b) = F(x), \quad q_1(x,0) = q_2(x,b) = 0; \quad U_2(x,0) = 0,$$

де

$$F(x) = \begin{cases} F_0, & x \in \left(\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right); \\ 0, & x \in \left(0; \frac{a}{3}\right) \cup \left(\frac{2a}{3}; a\right). \end{cases}$$

Графік дотичних напружень у клейовому шарі зображено на рис. 3.6.4. Напруження на рисунку показано в безрозмірному вигляді як відношення діючих напружень τ до гіпотетичних напружень τ_0 , які виникли б при рівномірному розподілі навантаження по всій площині клейового шва, тобто як відношення τ до напружень $\tau_0 = F_0 \frac{a}{3ab} = \frac{F_0}{3b}$.

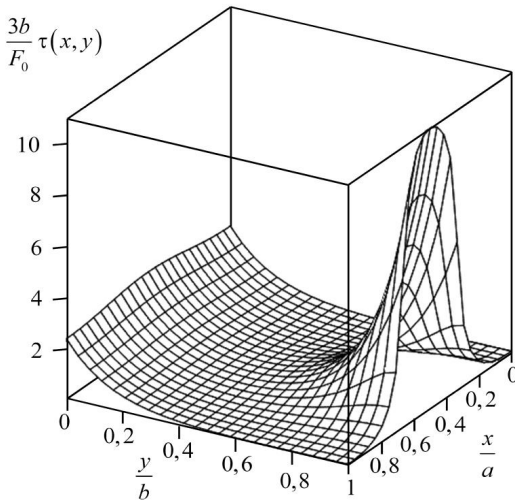


Рис. 3.6.4. Дотичні напруження в клейовому шарі

Для верифікації запропонованої методики проведено розрахунок напруженого стану з'єднання за допомогою МСЕ. Для розрахунку використано тривимірну модель, генерація сітки – автоматична, характерний розмір

елемента дорівнює 0,03 мм.

На рис. 3.6.5 зображено розподіл дотичних напружень τ_{xz} у середині товщини клейового шару, обчислених за допомогою МСЕ. Напруження також подано в безрозмірній формі. З рисунку видно, що найбільш навантаженою є область біля межі, де додається зовнішнє навантаження.

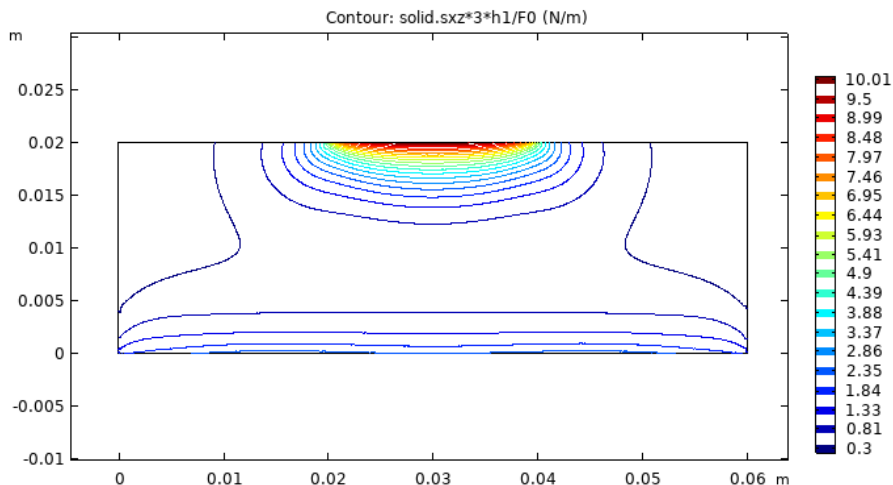


Рис. 3.6.5. Розподіл у клейовому шарі дотичних напружень τ_{xz} , розрахованих за МСЕ.

На рис. 3.6.6 зображено графіки дотичних напружень у середині товщини клейового шару вздовж осі симетрії з'єднання ($x = a/2$), що обчислені за допомогою запропонованої методики (а), і МСЕ (б).

На рис. 3.6.7 зображено графіки дотичних напружень у серединній площині клейового шару вздовж краю $y = b$, які обчислено за допомогою запропонованої методики (а) і за МСЕ (б).

З графіків видно, що дотичні напруження в клейовому шарі, обчислені за допомогою запропонованої моделі, дещо перевищують напруження, обчислені за допомогою МСЕ. Це явище добре відоме дослідникам і зумовлено такими припущеннями моделі, як робота на зсув лише клейового шару і рівномірний

розподіл напружень по товщині несних шарів. Ці припущення спрощують модель статичного НДС і дають змогу отримати аналітичний розв’язок. Крім того, дещо завищені значення критичних напружень допускаються в задачах проектування конструкцій, тому що це не впливає на зниження несної здатності конструкції і працює «у запас міцності».

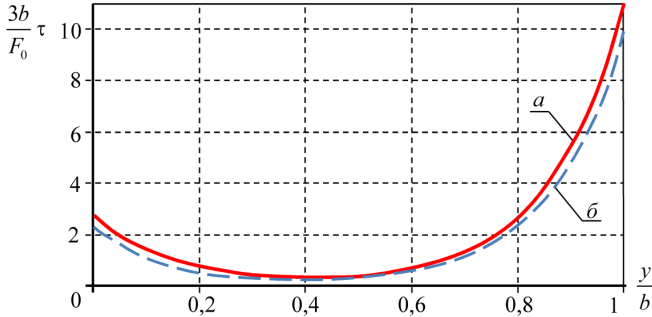


Рис. 3.6.6. Дотичні напруження в клеї вздовж прямої $x = a / 2$:

a – розраховані за запропонованою методикою; b – розраховані за МСЕ

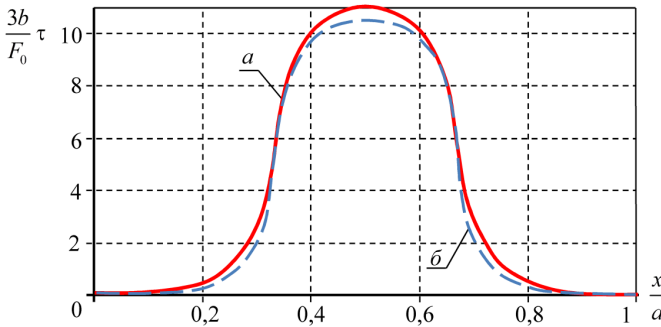


Рис. 3.6.7. Дотичні напруження в клеї вздовж прямої $y = b$:

a – розраховані за запропонованою методикою; b – розраховані за МСЕ

У запропонованій моделі не враховується переміщення несних шарів у поперечному напрямку (у напрямку осі y), і необхідно дослідити, наскільки це

припущення впливає на адекватність моделі. На рис. 3.6.8 показано розподіл напружень τ_{yz} у серединній площині клейового шару.

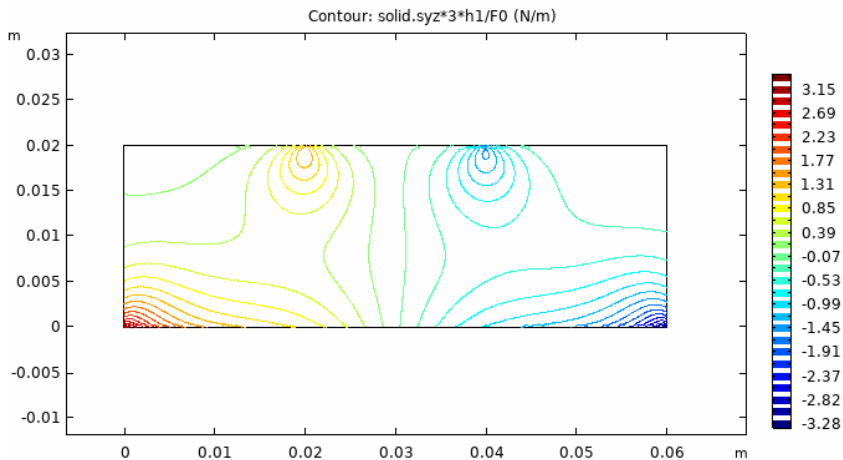


Рис. 3.6.8. Розподіл у клейовому шарі дотичних напружень τ_{yz} , розрахованих за МСЕ.

Як бачимо, максимальні напруження τ_{yz} , якими ми нехтували в аналітичній моделі, є втричі меншими за максимальні напруження τ_{xz} . Але τ_{yz} набувають максимуму біля жорсткого закріплення пластини, тобто в тій зоні, де напруження τ_{xz} – незначні. Максимальні напруження τ_{yz} у зоні навантаження є незначними і не перевищують 9 % від максимальних дотичних напружень у поздовжньому напрямку.

Розрахунки показали, що точність запропонованої наближеної методики є достатньою для розв’язання багатьох інженерних задач. Цей підхід може бути використаний для побудови аналітичних розв’язків задач про напружений стан клейових з’єднань деталей різної ширини; з’єднань силових елементів конструкції з обшивкою; з’єднань, що мають дефекти в клейовому шарі; з’єднань ремонтних накладок з обшивкою та інших задач, де потрібно знати двовимірний напружений стан клейового з’єднання.

3.7. Напружений стан двох склеєних коаксіальних труб при нерівномірному осьовому навантаженні

Постановка задачі. Схему з'єднання показано на рис. 3.7.1. Позначимо товщини зовнішньої і внутрішньої труб δ_1 і δ_2 відповідно. Товщину клейового шару позначимо δ_0 . Припустимо, що елементи несних шарів можуть переміщатися лише вздовж осі з'єднання, клейовий шар працює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені по товщині шарів.

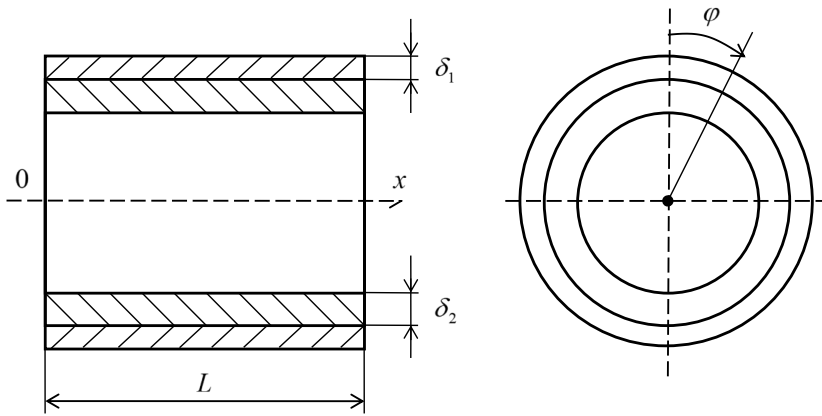


Рис. 3.7.1. Схема з'єднання

Диференціальний елемент з'єднання та діючі зусилля показано на рис. 3.7.2.

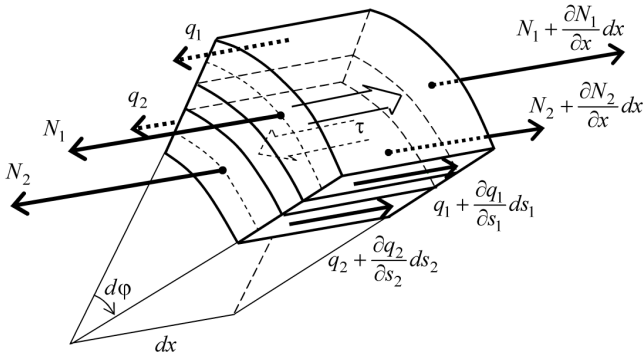


Рис. 3.7.2. Диференціальний елемент з'єднання

На рисунку: N_m , q_m – нормальні (у поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несному шарі m ($m=1, 2$), які є добутками відповідних напружень на товщину шару, $N_m = \delta_m \sigma_x^{(m)}$, $q_m = \delta_m \tau^{(m)}$; τ_0 – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку. Крім того, x – осьова координата; колові криволінійні координати $s_1 = R_1 d\varphi$, $s_2 = R_2 d\varphi$, $s_0 = R_0 d\varphi$; φ – кутова координата, що відраховується від деякої площини; R_m – радіус серединної поверхні шару m ; R_0 – радіус серединної поверхні клейового шару. Отже, уважаємо, що дотичні напруження в клейовому шарі діють у його серединній поверхні радіусом R_0 .

Рівняння рівноваги диференціальних елементів з'єднання мають вигляд

$$\tau_0 + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = 0; \quad -\tau_0 + \frac{R_2}{R_0} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.7.1)$$

Зі співвідношень Коші при умові рівності нулю поперечних переміщень і згідно з законом Гука випливає, що

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial s_m} = \frac{\delta_m G_m}{R_m} \frac{\partial U_m}{\partial \varphi}, \quad (3.7.2)$$

де U_m – поздовжні (осьові) переміщення шару m .

Дотичні напруження в клейовому шарі вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів:

$$\tau_0 = P(U_2 - U_1), \quad (3.7.3)$$

де P – жорсткість клейового шару на зсув.

Підставивши наведені співвідношення в рівняння (3.7.1), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right) - (U_1 - U_2) &= 0; \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right) + (U_1 - U_2) &= 0, \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

де $\alpha_m = \delta_m \frac{E_m R_m}{P R_0}$; $\mu_m = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{G_m}{E_m}}$; $m=1,2$.

Крайові умови мають такий вигляд:

$$N_1|_{x=0} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F^{(1)}(\varphi), \quad (3.7.5)$$

$$N_m|_{x=L} = E_m \delta_m \frac{\partial U_m}{\partial x} \Big|_{x=L} = H^{(m)}(\varphi), \quad U_2|_{x=0} = u^{(2)}(\varphi).$$

Крім того, на переміщення накладається умова періодичності

$$U_m(x, \varphi) = U_m(x, \varphi + 2\pi n). \quad (3.7.6)$$

Жорсткість клейового шару, яку введено у співвідношення (3.7.3), може бути задана кількома способами. За класичним підходом зсув зосереджується виключно в клейовому шарі. У цьому випадку $P = G_0 \delta_0^{-1}$, де G_0 – модуль зсуву клею, δ_0 – товщина клейового прошарку.

З першого рівняння системи (3.7.4) отримаємо

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right), \quad (3.7.7)$$

Підставивши в друге рівняння системи (3.7.4), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_1^2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial \varphi^4} - \beta_3^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_4^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3.7.8)$$

де $\beta_1^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$, $\beta_2^2 = \mu_1^2 \mu_2^2$, $\beta_3^2 = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$, $\beta_4^2 = \frac{\mu_1^2}{\alpha_2} + \frac{\mu_2^2}{\alpha_1}$.

Частинний розв'язок рівняння (3.7.8) будемо шукати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від кутової координати, а інша – тільки від лінійної координати:

$$U_1^* = \Phi(\varphi) X(x).$$

За фізичним сенсом кожний частинний розв'язок U_1^* має бути 2π -періодичною функцією. Таким чином, функції $\Phi(\varphi)$ – періодичні з періодом 2π . Будь-яку неперервну періодичну функцію з періодом 2π можна розвинути у ряд Фур'є. Припустимо, що функції $\Phi(\varphi)$ в частинних розв'язках (3.7.8) набувають значень $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}$. Знайдемо відповідні функції $X_n(x)$.

1. Якщо $\Phi(\varphi) = \text{const}$, то, підставивши $U_1^* = \Phi_0(\varphi)X_0(x)$ у рівняння (3.7.8), при умові, що $\frac{\partial^2 U_1^*}{\partial \varphi^2} = 0$, $\frac{\partial^4 U_1^*}{\partial \varphi^4} = 0$, отримаємо $\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} - \beta_3^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = 0$, або

$$\frac{d}{dx^2} \left[\frac{d^2 X_0(x)}{dx^2} - \beta_3^2 X_0(x) \right] = 0. \quad (3.7.9)$$

Розв'яжемо отримане рівняння. Для цього двічі зінтегруємо обидві його частини за змінною x . Отримаємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною

$$\frac{d^2 X_0(x)}{dx^2} - \beta_3^2 X_0(x) = \tilde{A}_1 x + \tilde{A}_0. \quad (3.7.10)$$

Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\frac{d^2 X_0(x)}{dx^2} - \beta_3^2 X_0(x) = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд $\mathcal{G}^2 - \beta_3^2 = 0$. Корні цього характеристичного рівняння – $\mathcal{G} = \pm \beta_3$. Отже, загальний однорідний розв'язок рівняння (3.7.10) запишемо у вигляді

$$X_0^{h.o.}(x) = A_3 \text{ch}(\beta_3 x) + A_4 \text{sh}(\beta_3 x).$$

Частинний розв'язок рівняння (3.7.10) запишемо у вигляді

$$X_0^{u.n.}(x) = A_0 + A_1 x.$$

Тоді загальній розв'язок рівняння (3.7.10), а отже, і рівняння (3.7.9) буде мати вигляд

$$X_0 = A_0 + A_1 x + A_3 \operatorname{ch}(\beta_3 x) + A_4 \operatorname{sh}(\beta_3 x).$$

2. Якщо $\Phi_n(\varphi) = \sin n\varphi$ або $\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi$, то, підставивши частинні розв'язки $U_n^* = \Phi_n(\varphi) X_n(x)$ у рівняння (3.7.8), при умові, що

$$\frac{\partial^2 U_1^*}{\partial \varphi^2} = -n^2 \tilde{\Phi}_n(\varphi) X_n(x), \quad \frac{\partial^4 U_1^*}{\partial \varphi^4} = n^4 \tilde{\Phi}_n(\varphi) X_n(x) \quad \text{та} \quad \frac{\partial^4 U_1^*}{\partial x^2 \partial \varphi^2} = -n^2 \tilde{\Phi}_n(\varphi) X_n''(x),$$

де $\tilde{\Phi}_n(\varphi) = \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(\varphi) \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} - \beta_1^2 n^2 \tilde{\Phi}_n(\varphi) \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \beta_2^2 n^4 \tilde{\Phi}_n(\varphi) X_n(x) - \\ - \beta_3^2 \tilde{\Phi}_n(\varphi) \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \beta_4^2 n^2 \tilde{\Phi}_n(\varphi) X_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Після групування маємо

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - (\beta_1^2 n^2 + \beta_3^2) \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (\beta_2^2 n^4 + \beta_4^2 n^2) X_n = 0,$$

тобто звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$k^4 - (\beta_1^2 n^2 + \beta_3^2) \cdot k^2 + (\beta_2^2 n^4 + \beta_4^2 n^2) = 0.$$

Корні цього характеристичного рівняння мають вигляд $\pm k_{1,n}$ і $\pm k_{2,n}$, де

$$k_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta_1^2 n^2 + \beta_3^2 + (-1)^m \cdot \sqrt{(\beta_1^2 n^2 + \beta_3^2)^2 - 4(\beta_2^2 n^4 + \beta_4^2 n^2)}}.$$

При $n \rightarrow \infty$ залежність $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ від n прямує до лінійної.

Доведемо, що $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ є дійсними числами.

Насамперед зазначимо, що вирази під основним коренем – додатні,

оскільки навіть у виразі для $k_{1,n}$ додатний доданок $\beta_1 n^2 + \beta_3$ є більшим за від'ємний доданок $\sqrt{\left(\beta_1 n^2 + \beta_3\right)^2 - 4\left(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2\right)}$ для будь-якого $n > 0$.

Розглянемо докладніше вираз під внутрішнім коренем. Підставивши значення коефіцієнтів, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\beta_1 n^2 + \beta_3\right)^2 - 4\left(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2\right) = \left(\frac{G_1}{R_1^2 E_1} - \frac{G_2}{R_2^2 E_2}\right)^2 t^2 + \\ & + \frac{2G_0 R_0}{\delta_0} \left(\frac{G_1}{R_1^3 E_1^2 \delta_1} + \frac{G_2}{R_2^3 E_2^2 \delta_2} - \frac{G_2}{R_1^2 E_1 E_2 R_2 \delta_2} - \frac{G_1}{R_1^2 E_1 E_2 R_2 \delta_2}\right) t + \\ & + \frac{G_0^2 R_0^2}{\delta_0^2} \left(\frac{1}{\delta_1 E_1 R_1} + \frac{1}{\delta_2 E_2 R_2}\right)^2, \end{aligned}$$

де $t = n^2$.

Для того щоб цей вираз був додатним при будь-якому $n > 0$ (тобто також при $t > 0$), необхідно, по-перше, щоб коефіцієнт при t^2 був додатним. Ця умова виконується, оскільки коефіцієнт є квадратом різниці. По-друге, необхідно, щоб дискримінант виразу був від'ємним.

Неважко переконатися, що

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2G_0 R_0}{\delta_0}\right)^2 \left(\frac{G_1}{R_1^3 E_1^2 \delta_1} + \frac{G_2}{R_2^3 E_2^2 \delta_2} - \frac{G_2}{R_1^2 E_1 E_2 R_2 \delta_2} - \frac{G_1}{R_1^2 E_1 E_2 R_2 \delta_2}\right)^2 - \\ & - 4 \left(\frac{G_1}{R_1^2 E_1} - \frac{G_2}{R_2^2 E_2}\right)^2 \frac{G_0^2 R_0^2}{\delta_0^2} \left(\frac{1}{\delta_1 E_1 R_1} + \frac{1}{\delta_2 E_2 R_2}\right)^2 = -16 \frac{G_0^2 R_0^2 \left(G_1 E_1 R_2^2 - G_2 E_2 R_1^2\right)^2}{\delta_1 \delta_2 \delta_0^2 E_1^3 E_2^3 R_1^5 R_2^5}. \end{aligned}$$

Очевидно, що дискримінант – від'ємний.

Отже, коефіцієнти $k_{1,n}$ і $k_{2,n}$ у загальному випадку є дійсними числами для будь-яких значень $n > 0$.

З огляду на вищесказане, подамо переміщення U_1 у вигляді суперпозиції відповідних частинних розв'язків U_1^* . Потім, використовуючи співвідношення

(3.7.7), знайдемо переміщення U_2 . Провівши відповідні дії, отримаємо

$$\begin{aligned}
 U_m = & A_0 + A_1 x + \gamma_0^{(m)} \left[A_3 \operatorname{ch}(\beta_3 x) + A_4 \operatorname{sh}(\beta_3 x) \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}} \left(a_{1,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}} \left(a_{3,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \cos n\varphi + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{1,n}^{(m)}}{k_{1,n}} \left(b_{1,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{\gamma_{2,n}^{(m)}}{k_{2,n}} \left(b_{3,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi,
 \end{aligned}$$

де A_1, \dots, A_4 , $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ і $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ – невідомі коефіцієнти, що визначаються із граничних умов; множники $k_{m,n} \operatorname{sh} k_{m,n} L$ і $k_{m,n} \operatorname{ch} k_{m,n} L$ в знаменнику використовуються для нормування й полегшення аналізу збіжності розв’язку; коефіцієнти $\gamma_0^{(1)} = \gamma_{1,n}^{(1)} = \gamma_{2,n}^{(1)} = 1$, $\gamma_0^{(2)} = 1 - \alpha_1 \beta_3^2$, $\gamma_{1,n}^{(2)} = 1 - \alpha_1 (k_{1,n}^2 - n^2 \mu_1^2)$, $\gamma_{2,n}^{(2)} = 1 - \alpha_1 (k_{2,n}^2 - n^2 \mu_1^2)$.

Зазначимо, що у формулах для переміщень U_1 і U_2 перші доданки, що знаходяться поза знаком суми, є класичним одновимірним розв’язком Фолькерсена й описують переміщення, спричинені результативними рівномірними зусиллями. А складові під знаками сум, що описують напруження, спричинені самозрівноважувальними зусиллями, експоненціально зменшуються при віддаленні від краю з’єднання вглиб області склеювання. Те ж саме можна сказати і про зусилля (3.7.2). Ця властивість розв’язку повністю відповідає принципу Сен-Венана.

Покладемо, що поздовжнє навантаження прикладено до зовнішньої труби по правому торцю $x=L$, на лівому торці внутрішньої труби $x=0$ задано переміщення (3.7.5).

Тоді поздовжні зусилля в несних шарах (3.7.2) можна записати у вигляді

$$N_m = E_m \delta_m \left\{ A_1 + \gamma_0^{(m)} \left[A_3 \beta_3 \operatorname{sh}(\beta_3 x) + A_4 \beta_3 \operatorname{ch}(\beta_3 x) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{1,n}^{(m)} \left(a_{1,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \gamma_{2,n}^{(m)} \left(a_{3,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \cos n\varphi + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{1,n}^{(m)} \left(b_{1,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \gamma_{2,n}^{(m)} \left(b_{3,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi \Big\}.
\end{aligned}$$

Зусилля й переміщення на торцях (3.7.5) розвинемо в ряди Фур'є:

$$u^{(2)}(\varphi) = \frac{c_0^{(2)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(2)} \cos n\varphi + s_n^{(2)} \sin n\varphi), \quad F^{(1)}(\varphi) = \frac{c_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(1)} \cos n\varphi + s_n^{(1)} \sin n\varphi),$$

$$H^{(m)}(\varphi) = \frac{C_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(m)} \cos n\varphi + S_n^{(m)} \sin n\varphi),$$

$$\text{де } c_0^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) d\varphi, \quad c_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad s_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{(2)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$c_0^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) d\varphi, \quad c_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad s_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^{(1)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$C_0^{(m)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) d\varphi, \quad C_n^{(m)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad S_n^{(m)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{(m)}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Задовольнивши крайові умови, отримаємо системи лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_1, \dots, A_4, a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ і $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$:

$$\begin{cases}
A_1 + \gamma_0^{(1)} A_4 \beta_3 = \frac{c_0^{(1)}}{2E_2 \delta_2}, \\
A_1 + \gamma_0^{(1)} [A_3 \beta_3 \operatorname{sh}(\beta_3 L) + A_4 \beta_3 \operatorname{ch}(\beta_3 L)] = \frac{C_0^{(1)}}{2E_1 \delta_1}, \\
A_1 + \gamma_0^{(2)} [A_3 \beta_3 \operatorname{sh}(\beta_3 L) + A_4 \beta_3 \operatorname{ch}(\beta_3 L)] = \frac{C_0^{(2)}}{2E_2 \delta_2}, \\
A_0 + \gamma_0^{(2)} A_3 = \frac{c_0^{(2)}}{2};
\end{cases} \quad (3.7.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_{1,n}^{(1)} a_{2,n} + \gamma_{2,n}^{(1)} a_{4,n}}{\operatorname{ch} k_{1,n} L + \operatorname{ch} k_{2,n} L} = \frac{c_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(1)} (a_{1,n} + a_{2,n}) + \gamma_{2,n}^{(1)} (a_{3,n} + a_{4,n}) = \frac{C_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)} (a_{1,n} + a_{2,n}) + \gamma_{2,n}^{(2)} (a_{3,n} + a_{4,n}) = \frac{C_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}, \\ \frac{\gamma_{1,n}^{(2)} a_{1,n}}{k_{1,n} \operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\gamma_{2,n}^{(2)} a_{3,n}}{k_{2,n} \operatorname{sh} k_{2,n} L} = c_n^{(2)}; \end{array} \right. \quad (3.7.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma_{1,n}^{(1)} b_{2,n} + \gamma_{2,n}^{(1)} b_{4,n}}{\operatorname{ch} k_{1,n} L + \operatorname{ch} k_{2,n} L} = \frac{s_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(1)} (b_{1,n} + b_{2,n}) + \gamma_{2,n}^{(1)} (b_{3,n} + b_{4,n}) = \frac{S_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)} (b_{1,n} + b_{2,n}) + \gamma_{2,n}^{(2)} (b_{3,n} + b_{4,n}) = \frac{S_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}, \\ \frac{\gamma_{1,n}^{(2)} b_{1,n}}{k_{1,n} \operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\gamma_{2,n}^{(2)} b_{3,n}}{k_{2,n} \operatorname{sh} k_{2,n} L} = s_n^{(2)}. \end{array} \right. \quad (3.7.13)$$

Розв'язавши ці системи, знаходимо A_1, \dots, A_4 , $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ і $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$.

Доведено, що швидкість зменшення коефіцієнтів $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ та $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ перевищує швидкість зменшення коефіцієнтів $c_n^{(m)}$, $C_n^{(m)}$, $s_n^{(m)}$, $S_n^{(m)}$, які є пропорційними $n^{-\theta}$, де $\theta \geq 1$.

З метою перевірки отриманого розв'язку розв'яжемо й дослідимо модельну задачу. Розглянемо клейове з'єднання двох труб завдовжки $L = 50$ мм з зовнішніми радіусами $R_2 = 30$ мм, $R_1 = 33$ мм, завтовшки $\delta_2 = 4$ мм, $\delta_1 = 2,9$ мм. Товщина клейового шару $\delta_0 = 0,1$ мм. Пружні характеристики матеріалів з'єднання – $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 27$ ГПа, $G_0 = 0,34$ ГПа. Задамо граничні умови на торцях склеєних труб:

$$U_2|_{x=0} = u^{(2)}(\varphi) = 0, \quad F^{(1)}(\varphi) = 0, \quad H^{(2)}(\varphi) = 0,$$

$$H^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} F_0, & -\frac{\pi}{8} \leq \varphi < \frac{\pi}{8}; \quad \frac{3\pi}{8} \leq \varphi < \frac{5\pi}{8}; \quad \frac{7\pi}{8} \leq \varphi < \frac{9\pi}{8}; \quad \frac{11\pi}{8} \leq \varphi < \frac{13\pi}{8}; \\ 0, & \frac{\pi}{8} \leq \varphi < \frac{3\pi}{8}; \quad \frac{5\pi}{8} \leq \varphi < \frac{7\pi}{8}; \quad \frac{9\pi}{8} \leq \varphi < \frac{11\pi}{8}; \quad \frac{13\pi}{8} \leq \varphi < \frac{15\pi}{8}. \end{cases}$$

Більш наочну схему прикладання навантаження показано на рис. 3.7.3, де зображено торці розглянутої склеєної конструкції.

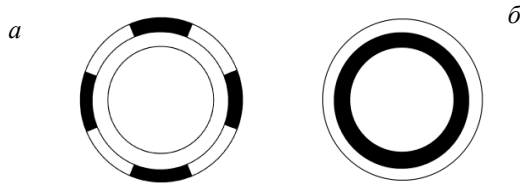


Рис. 3.7.3. Крайові умови при $x = L$ (а), і $x = 0$ (б)

Навантажені ділянки виділено чорним кольором. Ділянки без навантаження – білі. Зусилля, прикладені на чотирьох секторах до зовнішньої труби, передаються через клейовий шар до внутрішньої труби, жорстко закріпленої по всьому торцю. На рис. 3.7.4 зображено графік дотичних напружень $\tau_0(\varphi, x)$ (3.7.3) у вигляді поверхні в координатах (φ, x) .

З огляду на симетрію задачі, на рисунку показано напруження на одній восьмій частині кола, $\varphi \in [0; \pi/4]$. Графіки напружень зображено в безрозмірній формі як відношення діючих дотичних напружень τ до гіпотетичних напружень $T_0 = F_0 R_1 / 2LR_0$, які виникли б у клейовому шарі при рівномірному розподілі прикладеного навантаження по довжині з'єднання. Двійка в знаменнику обумовлена тим, що навантаження F_0 прикладено лише на половині довжини кола зовнішньої труби (див. рис. 3.7.3, а).

З рисунка видно, що максимальних значень напруження набувають у середині навантажених ділянок. А на опертому торці напружений стан практично рівномірний за коловою координатою.

Для оцінювання точності запропонованої моделі було проведено розрахунок напруженого стану розглянутої конструкції за допомогою МСЕ у тривимірній постановці. Крайові умови дають змогу розглянути сектор з

крайовими умовами типу «roller» на бічних сторонах. Зусилля на торці замінюються еквівалентними нормальними напруженнями. На рис. 3.7.5 показано розподіл дотичних напружень у серединній поверхні клейового шару (також у безрозмірній формі).

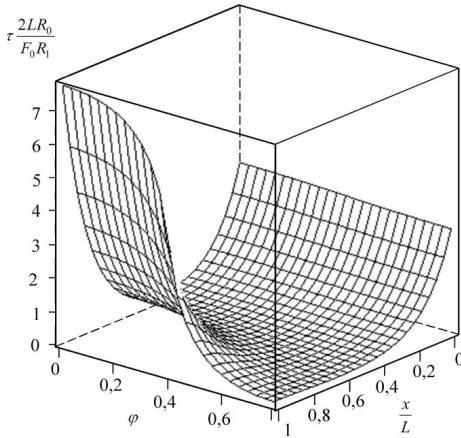


Рис. 3.7.4. Напруження в клейовому шарі

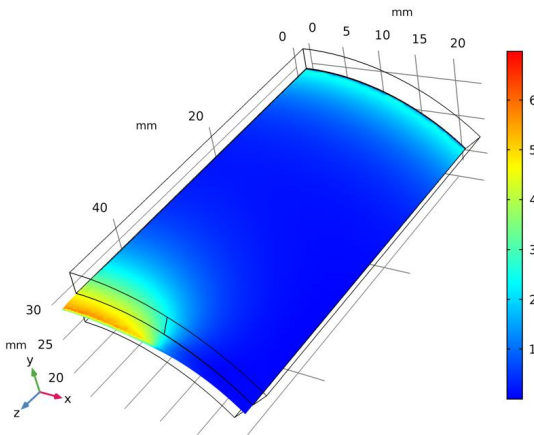


Рис. 3.7.5. Напруження в клейовому шарі, розраховані за допомогою МСЕ

Для розрахунку НДС було створено тривимірну скінченно-елементну модель. Для наочного порівняння результатів наведемо на одному графіку

напруження у клейовому шарі, які розраховано за запропонованою методикою і за допомогою МСЕ. На рис. 3.7.6 показано напруження в клейовому шарі при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/4$.

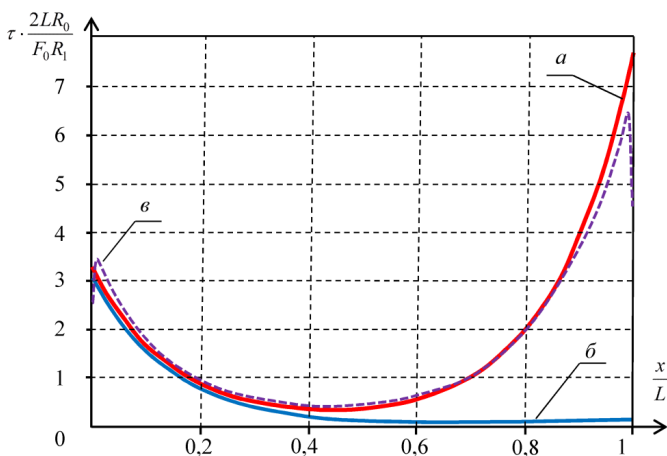


Рис. 3.7.6. Напруження в клейовому шарі, обчислені за аналітичною методикою при $\varphi = 0$ (а), $\varphi = \pi/4$ – (б) і за допомогою МСЕ (в) при $\varphi = 0$

Як бачимо, криві *a* і *v* практично збігаються, відрізняючись лише біля країв склейки, де клей перебуває в складному напруженому стані. Відповідно до моделі напруженого стану клейового шару (3.7.3) дотичні напруження – максимальні біля країв склейки, що суперечить закону парності дотичних напружень, оскільки зовнішній край клейового шару є вільним від навантаження.

Запропоновано модель напружено-деформованого стану клейового з'єднання двох коаксіальних циліндричних труб. Побудовано аналітичний розв'язок задачі з визначення НДС цієї конструкції. Основним припущенням, яке дає змогу спростити задачу, є припущення про малість поперечних деформацій і переміщень елементів, що з'єднуються. Задачу зведено до системи двох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно поздовжніх переміщень несних шарів. Модельна задача, яку було розв'язано, показала, що запропонована модель має точність, достатню для задач проектування.

Висновки за розділом

1. Побудова розв'язку задачі з визначення напруженого стану клейового з'єднання двох пластин у двовимірній постановці, у якій урахується нерівномірність розподілу напружень по ширині й довжині з'єднання, є вкрай складною задачею. Аналітичний розв'язок цієї задачі поки що є невідомим, тому для спрощення постановки задачі запропоновано дві математичні моделі, які дають змогу побудувати аналітичні розв'язки. У першій моделі напруженого стану пластини вважаються абсолютно піддатливими на зсув і навантаженими рівномірно розподіленими зусиллями. Такий підхід дає змогу дослідити вплив деформацій, зумовлених коефіцієнтами Пуассона. Друга запропонована модель напруженого стану базується на гіпотезі про абсолютну жорсткість несних шарів в одному з напрямків, завдяки чому можна побудувати аналітичні розв'язки багатьох задач, які досі не розглядалися дослідниками.

2. Запропоновану математичну модель застосовано для побудови аналітичних розв'язків задач про напружений стан пластин, навантажених нерівномірними по ширині нормальними зусиллями, і пластин, навантажених нерівномірними дотичними зусиллями. Також цю модель розвинуто на опис напруженого стану з'єднань внапуск коаксіальних труб.

3. Усі отримані аналітичні розв'язки є математично обґрунтованими. При побудові розв'язків застосовувався класичний метод відокремлення змінних. Розв'язки являють собою функціональні ряди, збіжність яких доведено. Крім формальної достовірності знайдені розв'язки задовольняють фундаментальному принципу Сен-Венана.

4. Розв'язано модельні задачі й проведено порівняння результатів розрахунків із результатами скінченно-елементного моделювання. Порівняння показало, що запропоновані моделі мають достатню для інженерних розрахунків точність.

5. Наведені у розділі результати викладено в роботах [67, 68, 144, 156].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Склеювання – це метод створення зазвичай нерознімних з'єднань, що дає змогу поєднати елементи конструкції в єдине ціле за допомогою внесення в зазор між конструктивними елементами клею, який після полімеризації перетворюється на міцний полімер, створюючи при цьому адгезивний зв'язок зі з'єднувальними поверхнями.

2. Клейові з'єднання внапуск – це найбільш поширений вид клейових з'єднань, які мають широкий спектр переваг перед класичними видами з'єднань, такими як болтове, заклепове та зварне з'єднання. Цими перевагами є технологічність, мала маса, герметичність, висока аеродинамічна ефективність тощо. Значущими перевагами клейових з'єднань є можливість поєднання в конструкції різнорідних матеріалів і забезпечення передавання зусиль між елементами конструкції внаслідок уведення в конструкцію мінімальної кількості нових елементів без порушення суцільності конструктивних елементів. Останнє є важливим щодо волокнистих композитів. Недоліком таких з'єднань є висока чутливість до порушень технології склеювання. Але розвиток хімії полімерів дає можливість прогнозувати появу клеїв високої міцності, які дадуть можливість створювати з'єднання в простих умовах у широкому діапазоні температур при мінімальній підготовці поверхонь.

3. У з'єднанні внапуск біля краю клейового шва виникає область концентрації напружень. Напруження в цій області значною мірою залежать від конструктивних рішень і застосовуваних матеріалів. Руйнування з'єднання зазвичай починається саме з цієї зони концентрації напружень, з краю клейового шва. Унаслідок високої чутливості до розподілу напружень у з'єднанні від геометричних і пружних параметрів шарів, а також від крайових умов на межі області склеювання розрахунок напружень у клейовому з'єднанні є нетривіальною задачею, розв'язання якої дає змогу проєктувати з'єднання та вказувати напрями підвищення міцності конструкції.

4. Клейовий шов має товщину, на декілька порядків меншу за товщину пластин чи оболонок, що з'єднуються. Разом з високими градієнтами напружень у клейовому шарі це ускладнює застосування тривимірних скінченно-елементних моделей, бо потребує застосування великої кількості малих елементів. Тому застосування саме аналітичних моделей, побудованих на основі перевірених та обґрунтованих математичних моделей балок, пластин, оболонок та пружних основ, не втрачає актуальності й сьогодні. Такі моделі напруженого стану з'єднання хоча й мають певні обмеження, але дозволяють описати напружено-деформований стан склеєної конструкції із задовільною для інженерних задач точністю.

5. Наявні на цей час аналітичні математичні моделі з'єднань внапуск базуються на системи гіпотез, які з одного боку спрощують задачу і дають змогу побудувати розв'язок в аналітичній формі, а з іншого – обмежують область застосування цих моделей. Наприклад, більшість математичних моделей з'єднань внапуск описують напружений стан з'єднання плоских пластинок, і в них припускається, що розподіл напружень по ширині конструкції є рівномірним. Але є такі задачі, де ця гіпотеза є неприйнятною. Це ставить перед фахівцями широке коло нових задач зі створення математичних моделей з'єднань внапуск.

6. Математичне моделювання – це завжди компроміс між точністю і простотою моделі, тому будь-яке дослідження в області механіки конструкцій, у тому числі напруженого стану з'єднань, ніколи не буде повним, вичерпним і завершеним. Завжди можна узагальнити, покращити математичну модель, підвищити її точність і розширити межі її застосування. Ціною цього буде підвищення математичної складності розрахункових формул або необхідність застосування нових методів розв'язання задачі.

7. Автори монографії дали опис нових математичних моделей з'єднань і відповідних нових задач. Авторами охоплено проблему уточнення напруженого стану біля краю клейового шва, у найбільш проблемній зоні з'єднання, побудовано математичні моделі осесиметричного напруженого стану обшивки

з круглим вирізом, підсиленням концентричною накладкою, приділено увагу з'єднанню коаксіальних концентричних оболонок і побудовано розв'язки задач зі знаходження напруженого стану з'єднань у двовимірній постановці з урахуванням нерівномірності напружень по ширині з'єднання. Усі отримані теоретичні результати обґрунтовано математично й перевірено шляхом порівняння з результатами скінченно-елементного моделювання.

8. Коло задач, розв'язаних авторами, не можна назвати повним. Отримані авторами результати ще можна розвивати і доповнювати. Є велика кількість задач механіки з'єднань, які ще чекають розв'язання й дослідження, наприклад: знаходження напруженого стану з'єднань ремонтних накладок в умовах складного напруженого стану, а також напруженого стану з'єднань в умовах динамічного навантаження конструкцій, визначення напруженого стану з'єднань пластин і циліндричних оболонок у двовимірній постановці з урахуванням вигину конструкції тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Adams, R. D. Effect of poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint / R. D. Adams, N. A. Peppiatt // *Journal of Strain Analysis*. – 1973. – Vol. 8, iss. 2. – P. 134–139.
2. Adams, R. D. Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints/ R. D. Adams, N. A. Peppiatt // *The Journal of Adhesion*. – 1977. – Vol. 9. – P. 1–18.
3. Adams, R. D. Strength predictions for lap joints, especially with composite adherends / R. D. Adams // *The Journal of Adhesion*. – 1989. – Vol. 30. – P. 219–242.
4. Albat, A. M. A direct linear-elastic analysis of double symmetric bonded joints and reinforcements / A. M. Albat, D. P. Romilly // *Composites Science and Technology*. – 1999. – No. 59. – P. 1127–1137.
5. Amidi, Sh. An analytical model for interfacial stresses in double-lap bonded joints / Sh. Amidi, J. Wang // *The Journal of Adhesion*. – 2018. – P. 1–25. DOI: 10.1080/00218464.2018.1464917.
6. Amidi, Sh. Three-parameter viscoelastic foundation model of adhesively bonded single-lap joints with functionally graded adherends / Sh. Amidi, J. Wang // *Engineering Structures*. – 2018. – Vol. 170. – P. 118–134. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.076.
7. Analysis tools for adhesively bonded composite joints. Pt. 1: Higher-order theory / B. A. Bednarczyk et al. // *AIAA Journal*. – 2006. – Vol. 44, no. 1. – P. 171–181.
8. Anyfantis, K. N. Analysis and design of composite-to-metal adhesively bonded joints : PhD thesis/ K. N. Anyfantis. – Athens: National Technical University Of Athens School Of Naval Architecture And Marine Engineering, 2012. – 277 p.
9. Effects of laminate carbon/epoxy composite patches on the strength of double-strap adhesive joints: Experimental and numerical analysis (Technical Report) / S. Akpinar, S. Temiz, M. D. Aydın, A. Ozel // *Materials and Design*. – 2013. Vol. 51. – P. 501–512.

10. Avila, A. F. Stress analysis on a wavy-lap bonded joint for composites / A. F. Avila, P. O. Bueno // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2004. – Vol. 24. – P. 407–414.
11. Aydin, M. D. 3-D nonlinear stress analysis on adhesively bonded single lap composite joints with different ply stacking sequences / M. D. Aydin // *The Journal of Adhesion*. – 2008. – Vol. 84. – P. 15–36.
12. Bonded Repairs of Composite Panels Representative of Wing Structure / J. G. Bakuckas, R. Chadha, P. Swindell, M. Fleming, J. Z. Lin, J. B. Ihn, M. Freisthler // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2019. – P. 565–580. DOI: 10.1007/978-3-030-21503-3_45.
13. Banea, M. D. Adhesively bonded joints in composite materials: an overview / M. D. Banea, L. F. M. da Silva // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Pt. L: Journal of Materials Design and Applications*. – 2009. – No. 223. – P. 1–18.
14. Barakhov, K. One-Dimensional Axisymmetric Model of the Stress State of the Adhesive Joint / K. Barakhov, D. Dvoretzskaya, O. Poliakov // *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf.*, – Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. – Kharkiv, 2020. – P. 310–319 (*Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188*).
15. Barbosa, D. R. Experimental and numerical assessment of tensile loaded tubular adhesive joints / D. R. Barbosa, R. D. S. G. Campilho, R. J. B. Rocha // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Pt. L: Journal of Materials: Design and Applications*. – 2018. – Vol. 233, iss. 3. – P. 452–464.
16. Bigwood, D. A. Non-linear adhesive bonded joint design analyses / D. A. Bigwood, A. D. Crocombe // *International Journal Adhesion and Adhesives*. – 1990. – Vol. 10, no 1. – P. 31–41.
17. Bogdanovich, A. E. Three-dimensional finite element analysis of double lap composite adhesive bonded joint using sub modeling approach / A. E. Bogdanovich, I. Kizhakkethara // *Composites: Pt. B*. – 1999. – Vol. 30. – P. 537–551.

18. Bonded lap joints of composite laminates with tapered edges / Oterkus E. et al. // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 1459–1489.
19. Broughton W. R., Crocker L. E., and Urquhart J. M. Strength of Adhesive Joints: A Parametric Study. Project PAJex1. – Report 3, NPL Report MATC(A)27. 2001.
20. Chadegani, A. Strain-energy release rate analysis of adhesive-bonded composite joints with prescribed interlaminar crack / A. Chadegani, C. Yang, E. Dan-Jumbo // *Journal of Aircraft*. – 2009. – Vol. 46, no. 1. – P. 203–215.
21. Characteristics of in-plane shear loaded adhesive lap joints: experiments and analysis [Electronic resource] : final report 2003. URL: <http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar03-21.pdf> (01.03.2021).
22. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels / O. Chukwujekwu, N. Singh, U. E. Enemuoh, S. V. Rao // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 71. – P. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
23. Cheikh, M. Modelling the stress vector continuity at the interface of bonded joints / M. Cheikh, P. Coorevits, A. Loredo // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2001. – Vol. 21. – P. 249–257.
24. Cognard, J. Y. Numerical analysis and optimisation of cylindrical adhesive joints under tensile loads / J. Y. Cognard, H. Devaux, L. Sohier // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2010. – Vol. 30, iss. 8. – P. 706–719. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2010.07.003.
25. Comparison of analytical, numerical, and experimental methods in deriving fracture toughness properties of adhesives using bonded double lap joint specimens / A. R. Setoodeh, H. Hadavinia, F. R. Biglari, K. Nikbin // *The Journal of Adhesion*. – 2005. – Vol. 81, no. 5. – P. 529–553.
26. Cuc, A. Structural health monitoring of adhesively bonded joints with piezoelectric wafer active sensors [Electronic resource] / A. Cuc. – 2010. – 329 p. URL: <http://scholarcommons.sc.edu/etd/329> (02.03.2021).

27. Analysis of mixed adhesive bonded joints. Pt. I: Theoretical formulation / L. F. M. Da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K. Spelt // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2009. – Vol. 23. – P. 1–34.
28. Analytical models of adhesively bonded joints. Pt. I: Literature survey / L. F. M. Da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K. Spelt // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2009. – Vol. 29. – P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005
29. Da Silva L. F. M., Öchsner A., Adams R. D. (eds) *Design Rules and Methods to Improve Joint Strength* // *Handbook of Adhesion Technology*. Springer, Berlin, Heidelberg. – 2011. – https://doi.org/10.1007/978-3-642-01169-6_27
30. Damage detection in adhesively bonded single lap joints by using backface strain: proposing a new position for backface strain gauges / M. Z. Sadeghi, J. Weiland, A. Preisler, J. Zimmermann, A. Schiebahn, U. Reisingen, K. U. Schroeder // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2020. – Vol. 97. – Art. 102494. DOI:10.1016/j.ijadhadh.2019.102494
31. Analysis of the Effects of Thin Sealant Layers in Aircraft Structural Joints / C. Dechwayukul, C. A. Rubin, G. T. Hahn, C. Dechwayukul // *AIAA Journal*. – 2003. – Vol. 41, no. 11. – P. 2216–2228.
32. Delale, F. Stresses in adhesively bonded joints: A closed-form solution / F. Delale, F. Erdogan, M. N. Aydinoglu // *Journal of Composite Materials*. – 1981. – Vol. 15. – P. 249–271.
33. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels / A. C. Okafor, N. Singh, U. E. Enemuoh, S. V. Rao // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 71. – P. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
34. Dragoni, E. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Pt. I: Critical review and finite element assessment of published models / E. Dragoni, L. Goglio // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2013. – Vol. 47. – P. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.
35. Duong, C. N. An analytical estimate of thermal effects in a composite

bonded repair: plane stress analysis / C. N. Duong, J. Yu // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39. – P. 1003–1014.

36. Topology optimisation of adhesive joints using non-parametric methods / H. Ejaz, A. Mubashar, I. A. Ashcroft, E. Uddin, M. Khan // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2018. – Vol. 81. – P. 1–10. doi:10.1016/j.ijadhadh.2017.11.003

37. Esmaeel, R. A. Stress analysis of tubular adhesive joints with delaminated adherend / R. A. Esmaeel, F. Taheri // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2009. – Vol. 23. – P. 1827–1844. DOI: 10.1163/016942409X12459095670511.

38. Failure load prediction of adhesively bonded single lap joints by using various FEM techniques / M. Z. Sadeghi, A. Gabener, J. Zimmermann, K. Savarana, J. Weiland, U. Reisgen, K. U. Schroeder // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2020. – Vol. 97. – Art. 102493. DOI:10.1016/j.ijadhadh.2019.102493.

39. Finite element prediction of fatigue crack propagation lifetime in composite bonded joints / M. M. Abdel Wahab, I. A. Ashcroft, A. D. Crocombe, P. A. Smith // *Composites. Pt. A*. – 2004. – Vol. 35. – P. 213–222.

40. Frostig, Y. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet – high-order theory approach / Y. Frostig, O. T. Thomsen, F. Mortensen // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1999. – Vol. 125. – P. 1298–1307.

41. Functionally graded adherends in adhesive joints: An overview / M. Q. dos Reis, E. A. S. Marques, R. J. C. Carbasa, L. F. M. da Silva // *Journal of Advanced Joining Processes*. – 2020. – Vol. 2. – Art. 100033. DOI: 10.1016/j.jajp.2020.100033.

42. Galliot, C. Drop weight tensile impact testing of adhesively bonded carbon/epoxy laminate joints / C. Galliot, J. Rousseau, G. Verchery // *Int. J. of Adhesion & Adhesives*. – 2012. – Vol. 35. – P. 68–75.

43. Goglio, L. Precision of the one-dimensional solutions for bonded double lap joints / L. Goglio, M. Rossetto // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2011. – Vol. 31. – P. 301–314.

44. Goland, M. The stresses in cemented joints / M. Goland, E. Reissner // *J Appl Mech.* – 1944. – Vol. 66. – P. A17–A27.
45. Gonçalves, J. P. M. A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints / J. P. M. Gonçalves, M. F. S. F. de Moura, P. M. S. T. de Castro // *International Journal of Adhesion and Adhesives.* – 2002. – Vol. 22. – P. 357–365.
46. Gustafson, P. A. Dimensionless parameters in symmetric double lap joints: an orthotropic solution for thermo mechanical loading / P. A. Gustafson, A. Bizard, A. M. Waas // *International Journal of Solids and Structures.* – 2007. – Vol. 44. – P. 5774–5795.
47. Gustafson, P. A. The influence of adhesive constitutive parameters in cohesive zone finite element models of adhesively bonded joints / P. A. Gustafson, A. M. Waas // *International Journal of Solids and Structures.* – 2009. – Vol. 46. – P. 2201–2215.
48. Guz, A. N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks: review / A. N. Guz // *International Applied Mechanics.* – 2014. – Vol. 50, no. 1. – P. 1–57. DOI:10.1007/s10778-014-0609-y.
49. Haghani, R. Stress distribution in adhesive joints with tapered laminates – effect of tapering. Stress distribution in adhesive joints with tapered laminates length and material properties / R. Haghani, M. Al-Emrani, R. Kligler // *Journal of Composite Materials.* – 2010. – Vol. 44, no. 3. – P. 387–302.
50. Harris, J. A. Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods / J. A. Harris, R. D. Adams // *International Journal of Adhesion and Adhesives.* – 1984. – Vol. 4, no. 2. – P. 65–78.
51. Hildebrand, M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals/ M. Hildebrand // *International Journal of Adhesion and Adhesives.* – 1994. – Vol. 14, no. 4. – P. 261–267.
52. Hoyt, D. M. Strength and fatigue life modeling of bonded joints in composite structure / D. M. Hoyt, S. H. Ward, P. J. Minguet // *Journal of Composites*

Technology and Research. – 2002. – Vol. 24. DOI: 10.1520/CTR10569J.

53. Hybrid and adhesively bonded joints with dissimilar adherends: a critical review // A. Yousefi Kanani, S. Green, X. Hou, J. Ye // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2020. – P. 1–39. DOI:10.1080/01694243.2020.1861859

54. Katnama, K. B. Bonded repair of composite aircraft structures: a review of scientific challenges and opportunities / K. B. Katnama, L. F. M. da Silva, T. M. Young // *Progress in Aerospace Sciences*. – 2013. – Vol. 61. – P. 26–42.

55. Kaya, A. Three dimensional stress analysis in adhesively bonded joints / A. Kaya // *Mathematical and Computational Applications*. – 1998. – Vol. 3, no. 2. – P. 101–111.

56. Development of design allowables for the design of composite bonded double-lap joints in aerospace applications / M. A. Khan, G. S. Aglietti, A. D. Crocombe, A. D. Viquerat, C. O. Hamar // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2018. – Vol. 82. – P. 221–232. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2018.01.011.

57. Khan, M. A. Interfacial stresses in single-side composite patch-repairs with material tailored bondline / M. A. Khan, S. Kumar // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2017. – Vol. 25, iss. 4. – P. 304–318. DOI: 10.1080/15376494.2016.1255824.

58. Kim, H. Stress analysis of adhesively-bonded joints under in-plane shear loading / H. Kim, K. T. Kedward // *Journal of Adhesion*. – 2001. – Vol. 76. – P. 1–36.

59. New Possibilities of Creating the Efficient Dimensionally Stable Composite Honeycomb Structures for Space Applications / A. Kondratiev, V. Gaidachuk, T. Nabokina, A. Tsaritsynskyi // In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 1113. Springer, Cham. – 2020. – P. 45–59. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_5

60. Kumar, R. S. Stress analyses of epoxy bonded tubular socket joints composed of fuzzy fiber reinforced composite adherends / R. S. Kumar, R. Sharma, 194

N. Gangwar // 2nd International Conference on Design, Materials and Manufacture 2019, ICDEM 2019; Surathkal, India, 6–8 Dec. 2019. DOI:10.1063/5.0004175

61. Kurennov, S. S. The Stressed State of the Double-Layer Rectangular Plate Under Shift. The Simplified Two-Dimensional Model / S. S. Kurennov, K. P. Barakhov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – Vol. 3. – P. 166–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.16.

62. Stress State of Two Adhesive Joints of Coaxial Pipes Under Non-uniform Axial Load / S. S. Kurennov, K. P. Barakhov, D. V. Dvoret'skaya, O. V. Chubukina // VI Міжнар. конф. : Актуальні проблеми інженерної механіки : тези доп. 12–15 трав. 2020. – Одеса, 2020. – С. 209–212.

63. The Nonuniform in Width Stressed State of the Lap Adhesive Joint / S. S. Kurennov, A. G. Poliakov, K. P. Barakhov, D. V. Dvoret'skaya // Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2019) : Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 28–30 Nov. 2019. Cham (Switzerland). – 2020. – P. 75–85 (Advances in Intelligent Systems and Computing; Vol. 1113).

64. Kurennov, S. Axisymmetric Stressed State of the Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension / S. Kurennov, K. Barakhov, D. Dvoret'skaya // Proceedings of Odessa Polytechnic University. – 2019. – Iss. 1(57). – P. 5–13. DOI: 10.15276/opu.1.57.2019.01.

65. Stress State of Two Glued Coaxial Tubes Under Nonuniform Axial Load / S. Kurennov, K. Barakhov, D. Dvoret'skaya, O. Poliakov // Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – Synergetic Engineering (ICTM'2020): Intern. Sci. and Techn. Conf., Kharkiv, Ukraine; 29–30 Oct. 2020. – Kharkiv, 2020. – P. 389–400 (Lecture Notes in Networks and Systems Vol. 188).

66. Kurennov, S.S. Stressed State of the Axisymmetric Adhesive Joint of Two Cylindrical Shells under Axial Tension / S. S. Kurennov, K. P. Barakhov, A. G. Poliakov // Materials Science Forum, 2019, Actual Problems of Engineering Mechanics. Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – P. 519–527.

67. Kurennov, S. S. A Simplified two-dimensional model of adhesive joints.

Nonuniform load / S. S. Kurennov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2015. – Vol. 51, iss. 4. – P. 479–488.

68. Kurennov, S. S. An Approximate two-dimensional model of adhesive joints. Analytical solution / S. S. Kurennov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2014. – Vol. 50, iss. 1. – P. 105–114. DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z.

69. Kurennov, S. S. Determining stresses in an adhesive joint with a longitudinal unadhered region using a simplified two-dimensional theory / S. S. Kurennov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2019. – Vol. 60, iss. 4. – P. 740–747. DOI: 10.1134/s0021894419040199.

70. Kurennov, S. S. Refined mathematical model of the stress state of adhesive lap joint: experimental determination of the adhesive layer strength criterion / S. S. Kurennov // *Strength of Materials*. – 2020. – Iss. 5. – P. 779–789. DOI: 10.1007/s11223-020-00231-5.

71. Kurennov, S. S. Through-thickness stress distribution in the adhesive joint for the multilayer composite material / S. S. Kurennov, A. G. Koshevoi, A. G. Polyakov // *Russian Aeronautics*. – 2015. – Vol. 58. – P. 145–151. DOI: 10.3103/S1068799815020026

72. Lang, T. P. Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints / T. P. Lang, P. K. Mallick // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 1998. – Vol. 18. – P. 167–177

73. Effect of the geometric shapes of repair patches on bonding strength / H. Lee, S. Seon, S. Park, R. Walallawita, K. Lee // *The Journal of Adhesion*. – 2019. – P. 1–18. doi:10.1080/00218464.2019.1649660

74. Lee, J. Bending analysis of a laminated composite patch considering the free-edge effect using a stress-based equivalent single-layer composite model / J. Lee, M. Cho, H. S. Kim // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2011. – Vol. 53, iss. 8. – P. 606–616. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2011.05.007.

75. Lee, S. J. A Closed-form solution for the torque transmission capability of the adhesively bonded tubular double lap joint / S. J. Lee, D. G. Lee // *Journal of Adhesion*. – 1994. – Vol. 44. – P. 271–284.

76. Lubkin, J. L. Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes / J. L. Lubkin, E. Reissner // Transactions – ASME. – 1956. – No. 78. – P. 1213–1221.
77. Luo, Q. Analytical solutions for adhesive composite joints considering large deflection and transverse shear deformation in adherends / Q. Luo, L. Tong // Int. J. of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45. – P. 5914–5935.
78. Mathias, J. D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J. D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921–6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016
79. Mortensen, F. A simple approach for the analysis of embedded ply drops in composite and sandwich laminates / F. Mortensen, O. T. Thomsen // Composites Science and Technology. – 1999. – Vol. 59. – P. 1213–1226.
80. Mortensen, F. Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach / F. Mortensen, O. T. Thomsen // Composites Science and Technology. – 2002. – Vol. 62. – P. 1011–1031.
81. Nemes, O. Modeling of cylindrical adhesively bonded joints / O. Nemes, F. Lachaud // Journal of Adhesion Science and Technology. – 2009. – Vol. 23. – P. 1383–1393.
82. Nemes, O. Contribution to the study of cylindrical adhesive joining / O. Nemes, F. Lachaud, A. Mojtabi // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2006. – Vol. 26. – P. 474–480.
83. Numerical analysis of the effect of thermal residual stresses on the performances of bonded composite repairs in aircraft structures / A. Albedah, B. B. Bouiadjra et al. // Composites. Pt. B: Engineering. – 2011. – Vol. 42, no. 3. – P. 511–516.
84. Numerical study of flexible tubular metal-polymer adhesive joints / M. A. Dantas, R. Carbas, E. A. S. Marques, M. P. L. Parente, D. Kushner, L. F. M. da Silva // The Journal of Adhesion. – 2020. – Art. 1822173. DOI:10.1080/00218464.2020. статья в печати

85. Numerical study of lap joints with composite adhesives and composite adherends subjected to in-plane and transverse loads / S. M. R. Khalili et al. // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2008. – Vol. 28. – P. 411–418.

86. Ojalvo, I. U. Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints / I. U. Ojalvo, H. L. Eidinoff // *AIAA Journal*. – 1978. – Vol. 16, iss. 3. – P. 204–211. doi:10.2514/3.60878

87. Olia, M. Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending / M. Olia, J. N. Rossettos // *International Journal of Solids and Structures*. – 1996. – Vol. 33, iss. 18. – P. 2681–2693.

88. Osnes, H. Computational analysis of geometric nonlinear effects in adhesively bonded single lap composite joints / H. Osnes, A. Andersen // *Composites: Pt. B*. – 2003. – Vol. 34. – P. 417–427.

89. Oterkus, E. Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints / E. Oterkus, A. Barut, E. Madenci // *NASA Technical Report AIAA Paper 2004–1560, ID 20040084438*. – 2004. Acquired Aug. 03. 18 p.

90. Özer, H. A Comparative Evaluation of Numerical and Analytical Solutions to the Biadhesive Single-Lap Joint / H. Özer, Ö. Öz // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2014. – P. 1–16. doi:10.1155/2014/852872

91. Pandey, P. C. Nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives / P. C. Pandey, H. Shankaragouda, A. Kr. Singh // *Computers and Structures*. – 1999. – Vol. 70. – P. 387–413.

92. Panigrahi, S. K. Three dimensional failure analysis and damage propagation behavior of adhesively bonded single lap joints in laminated frp composites / S. K. Panigrahi, B. Pradhan // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. – 2007. – Vol. 26, no. 2. – P. 183–201.

93. Pugno, N. Tubular bonded joint under torsion: theoretical analysis and optimization for uniform torsional strength / N. Pugno, G. Surace // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. – 2001. – Vol. 36, iss. 1. – P. 17–34.

94. A comprehensive experimental study on bi-adhesive single lap joints using DIC technique / F. Ramezani, M. R. Ayatollahi, A. Akhavan-Safar,

L. F. M. Da Silva // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2020. – 102674. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2020.102674>.

95. Rapp, P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II. Displacement formulation for orthotropic adherends / P. Rapp // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2015. – Vol. 15. iss. 2. – P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.

96. Radice, J. J. On the analysis of adhesively bonded structures: A high order semi-elastic adhesive layer model / J. J. Radice, J. R. Vinson // *Composites Science and Technology*. – 2008. – Vol. 68, iss. 2. – P. 376–386. doi:10.1016/j.compscitech.2007.06.024

97. Romilly, D. P. Elastic analysis of hybrid bonded joints and bonded composite repairs / D. P. Romilly, R. J. Clark // *Composite Structures*. – 2008. – Vol. 82. – P. 563–576.

98. Rubber model for adhesive lap joints / R. D. Adams, S. H. Chambers, P. J. A. Del Strother, N. A. Peppiatt // *Journal of Strain Analysis*. – 1973. – Vol. 8, no. 1. – P. 52–57.

99. A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads / T. Sawa, J. Liu, K. Nakano, J. Tanaka // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2000. – Vol. 14, iss. 1. – P. 43–66. doi:10.1163/156856100742104

100. Experimental investigation on strength of stepwise tailored single lap adhesive joint using second-generation acrylic adhesive via shear and low-cycle shear tests / Y. Sekiguchi, M. Nakanouchi, K. Haraga, I. Takasaki, C. Sato // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2019. – 102438. doi:10.1016/j.ijadhadh.2019.102438

101. Sharifi, S. Stress analysis of adhesively bonded double-lap joints subjected to combined loading / S. Sharifi, N. Choupani // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2008. – Vol. 41. – P. 758–763.

102. Shishesaz, M. Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation / M. Shishesaz, N. Bavi // *Journal of Adhesion*

Science and Technology. – 2013. – Vol. 27, no. 11. – P. 1197–1225.

103. Skoryi, I. A. Stresses in adhesive joints in cylindrical shells and panels / I. A. Skoryi, L. P. Terekhova // *Polymer Mechanics*. – 1972. – Vol. 8, iss. 6. – P. 964–972. DOI: 10.1007/BF00858340.

104. Smeltzer, S. S. An inelastic analysis methodology for bonded joints with shear deformable, anisotropic adherends: Ph.D. dissertation / Smeltzer S. S. – North Carolina State University. Raleigh, 2003.

105. Smeltzer, S. S. Analytical and numerical results for an adhesively bonded joint subjected to pure bending / S. S. Smeltzer, E. Lundgren // 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1–4 May 2006, Newport, Rhode Island. – 2006. – P. 4472–4483 ID: 20060020138.

106. Starovoitov, E. I. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovskii // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54, iss. 3. – P. 299–312. DOI:10.1007/s11029-018-9740-x

107. Stere, M. Calculation of hybrid joints used in modern aerospace structures / M. Stere, D. Baran // *Incas Bulletin*. – 2011. – Vol. 3, iss. 4. – P. 161–169.

108. Stress analysis of adhesive in a cracked steel plate repaired with CFRP / Zhang Y. et al. // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2018. – Vol. 145. – P. 210–217. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.02.029.

109. Stress State of a Threaded joint in a dental implant – bone system / A. Y. Grigorenko, V. V. Los', V. A. Malanchuk, N. N. Tormakhov // *International Applied Mechanics*. – 2020. – Vol. 56. – P. 33–39. DOI: 10.1007/s10778-020-00994-z.

110. Thermal and geometrically non-linear stress analyses of an adhesively bonded composite tee joint / M. K. Apalak, R. Gunes, M. O. Turaman, A. A. Cerit // *Composites*. Pt. A. – 2003. – Vol. 34. – P. 135–150.

111. Timoshenko, S. P. Theory of Plates and Shells / S. P. Timoshenko, 200

S. Woinowsky-Krieger. – New York : McGraw-Hill. 1959. – 595 p.

112. Bonded Repair of Aircraft Composite Sandwich Structures / J. S. Tomblin, L. Salah, J. M. Welch, M. D. Borgman // Report DOT/FAA/AR-03/74. – 2004.

113. Tong, L. The effect of adherend alignment on the behavior of adhesively bonded double lap joints / L. Tong, A. Sheppard, D. Kelly // International Journal of Adhesion & Adhesives. – 1996. – No. 16. – P. 241–247.

114. Tong, L. Adhesive elements for stress analysis of bonded patch to curved thin-walled structures / L. Tong, X. Sun // Computational Mechanics. – 2003. – Vol. 30. – P. 143–154. DOI: 10.1007/s00466-002-0374-3.

115. Tong, L. Nonlinear stress analysis for bonded patch to curved thinwalled structures / L. Tong, X. Sun // International Journal of Adhesion & Adhesives. – 2003. – Vol. 23. – P. 349–364.

116. Transient hygro-thermo-mechanical stresses analysis in multi-layers bonded structure with coupled bidirectional model / R. Kessentini, O. Klinkova, I. Tawfiq, M. Haddar // International Journal of Mechanical Sciences. – 2019. – Vol. 150. – P. 188–201. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.10.004.

117. Tsai, M. Y. An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint / M. Y. Tsai, J. Morton // International Journal Solids and Structures. – 1994. – Vol. 31, no. 18. – P. 2537–2563.

118. Tsai, M. Y. An experimental investigation of nonlinear deformations in single-lap joints / M. Y. Tsai, J. Morton // Mechanic of Materials. – 1995. – No. 20. – P. 183–194.

119. Tsai, M. Y. Experimental and numerical studies of a laminated composite single-lap adhesive joint / M. Y. Tsai, J. Morton, F. L. Matthews // Journal of Composite Materials. – 1995. – Vol. 29, no. 9. – P. 1254–1275.

120. Tsai, M. Y. Improved theoretical solutions for adhesive lap joints / M. Y. Tsai, D. W. Oplinger, J. Morton // International Journal Solids Structures. – 1998. – Vol. 35, no. 12. – P. 1163–1185.

121. Tvergaard, V. Effect of plastic anisotropy on crack growth resistance

under mode 1 loading / Tvergaard V., Legarth B. N. // *International Journal of Fracture*. – 2004. – Vol. 130. – P. 411–425.

122. Veisytabar, M. Stress analysis of adhesively-bonded single stepped-lap joints based on three-parameter fractional viscoelastic foundation model / M. Veisytabar, A. Reza, Y. Shekari // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. – 2022. – Vol. 5. – P. 933–949. <https://doi.org/10.1177/14644207211062497>

123. Verification of Selected Failure Criteria for Adhesive Bonded Elements with Different Stiffness through the Use of Methacrylic Adhesive / P. Maćkowiak, B. Ligaj, D. Płaczek, M. Kotyk // *Materials*. – 2020. – Vol 13, iss. 18. – Art. 4011. DOI: 10.3390/ma13184011.

124. Vihak, V. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region / V. Vihak, Y. Tokovyi, A. Rychahivskyy // *Journal of Computational Applied Mechanics*. – 2002. – Vol. 3, no. 2. – P. 193–206.

125. Vinson, J. R. Adhesive bonding of polymer composites / J. R. Vinson // *Polymer Engineering And Science*. – 1989. – Vol. 29, no. 19. – P. 1325–1331.

126. Volkersen, O. Die Niekraft in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschritten / O. Volkersen // *Luftfahrtforschung*. – 1938. – Vol. 5. – P. 41–47.

127. Wang, D.-A. A computational study of local stress intensity factor solutions for kinked cracks near spot welds in lap-shear specimen / D.-A. Wang, J. Pan // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42. – P. 6277–6298.

128. Wang, J. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints / J. Wang, C. Zhang // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2009. – Vol. 29. – P. 495–502.

129. Wong, E. H. Interface and interconnection stresses in electronic assemblies – A critical review of analytical solutions / E. H. Wong, J. Liu // *Microelectronics Reliability*. – 2017. – Vol. 79. – P. 206–220. DOI:10.1016/j.microrel.2017.03.010.

130. Xiao, X. Stiffness prediction of the double lap shear joint. Pt. 1. Analytical solution / X. Xiao, P. H. Foss, J. A. Schroeder // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2004. – No. 24. – P. 229–237.
131. Yang, C. Stress-strain analysis of adhesive-bonded single-lap composite joints under cylindrical bending / C. Yang, S. S. Pang // *Composites Engineering*. – 1993. – Vol. 3, no. 2. – P. 1051–1063.
132. Yarovaya, A. V. Bending of circular sandwich plate on elastic foundation / A. V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2005. – No. 37. – P. 598–605. DOI: 10.1007/s11223-006-0007-8.
133. Ye, L. Role of Matrix Resin in Delamination Onset and Growth in Composite Laminate / L. Ye // *Journal of Composite Science and Technology*. – 1988. – Vol. 33. – P. 257–277.
134. Yunxing, Du. An improved four-parameter model on stress analysis of adhesive layer in plated beam / Du. Yunxing, Liu Yuzhong, Zhou Fen // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2019. – Vol. 91. – P. 1–11. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2019.02.005.
135. Zemlyanova, A. Y. Reinforcement of a plate weakened by multiple holes with several patches for different types of plate-patch attachment / A. Y. Zemlyanova // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2016. – Vol. 21, iss. 3. – P. 281–294. DOI: 10.1177/1081286513519812.
136. Zhao, B. Closed-form solutions for elastic stress-strain analysis in unbalanced adhesive single-lap joints considering adherend deformations and bond thickness / B. Zhao, Z.-H. Lu, Y.-N. Lu // *International Journal of Adhesion & Adhesives*. – 2011. – Vol. 31. – P. 434–445.
137. Zhao, B. A Two-dimensional approach of single-lap adhesive bonded joints / B. Zhao, Z.-H. Lu // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2009. – Vol. 16. – P. 130–159.
138. Zhao, X. Single lap joints with rounded adherend corners: experimental results and strength prediction / X. Zhao, R. D. Adams, L. F. M. da Silva // *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 2011. – No. 25. – P. 837–856.

139. Артюхин, Ю. П. Модифицированная теория Голанда – Рейсснера склеенных пластин / Ю. П. Артюхин // Исследования по теории пластин и оболочек : сб. ст. / Казан. нац. ун-т. – Казань, 1975. – Вып. 11. – С. 136–148.

140. Артюхин, Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях / Ю. П. Артюхин // Исследования по теории пластин и оболочек : сб. ст. / Казан. нац. ун-т. – Казань, 1973. – Вып. 10. – С. 3–27.

141. Балашова, О. С. Напряженное состояние клеевого соединения с двухсторонней накладкой / О. С. Балашова // Будівельні конструкції : міжвідом. наук.-техн. зб. – Київ, 2000. – Вип. 52. – С. 31–36.

142. Барахов, К. П. Узагальнення моделі Голанда і Рейсснера на випадок осової симетрії / К. П. Барахов // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2021. – № 2 (170). – С. 12–19.

143. Барахов, К. П. Узагальнення моделі Фолькерсена на випадок осової симетрії / К. П. Барахов // Открытые информационные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». – Харьков, 2020. – Вып. 90. – С. 78–89.

144. Барахов, К. Напружений стан клейового з'єднання коаксіальних товстостінних труб. Спрощена модель / К. Барахов, С. Куреннов // Сучасні проблеми механіки та математики : зб. наук. пр / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 1. – С. 224.

145. Васильев, В. В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости / В. В. Васильев // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 62–72.

146. Васильев, В. В. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы / В. В. Васильев, С. А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 40–49.

147. Термопружний напружений стан склопластикової труби в зоні з'єднання з металевим фланцем / С. М. Верещака, А. В. Дейнека, В. В. Данілючев, І. В. Верещака // Вісник Сумського національного аграрного

університету. Серія: Механізація та автоматизація виробничих процесів. – 2015. – № 11 (27). – С. 124–128.

148. Верещака, С. М. Прочность бандажного и муфтового соединений стеклопластиковых труб / С. М. Верещака, В. В. Данильцев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – 2015. – № 55 (1164). – С. 35–42.

149. Верещака, С. Розрахунок на міцність склопластикових труб у зоні фланцевих з'єднань / С. Верещака, В. Данильцев, Д. Жигилій // Машинознавство. – 2013. – №1–2 (187–188). – С. 9–13.

150. Карпов, Я. С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов : монография / Я. С. Карпов. – Харьков : ХАИ, 2006. – 359 с.

151. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.

152. Короткова, С. Е. Механика клеевых соединений / С. Е. Короткова. – Алчевск : ДГМИ, 1998. – 187 с.

153. Короткова, С. Е. Нелинейные деформации клеевого слоя в соединении с односторонней накладкой / С. Е. Короткова // Сборник научных трудов / Донбас. гор.-металлург. ин-т. – Алчевск, 1999. – Вып. 9. – С. 195–201.

154. Короткова, С. Е. Расчет коротких клеевых соединений типа нахлестка / С. Е. Короткова // Будівельні конструкції : міжвідом. наук.-техн. зб. – Київ, 2000. – Вип. 52. – С. 127–134.

155. Куреннов, С. С. Осесимметричное напряженное состояние пластины с круговым вырезом, усиленным круглой накладкой / С. С. Куреннов, К. П. Барахов // Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні : II Міжнар. наук.-техн. конф. : тези доп., 5–8 жовт. 2020. – Харків, 2020. – С. 350–352.

156. Куреннов, С. С. Двумерное напряженное состояние клеевого соединения. Неклассическая задача / С. С. Куреннов, А. Г. Поляков, К. П. Барахов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2018. – 61, № 3. – С. 132–138.

157. Куреннов, С. С. Двухпараметрическая модель упругого основания в

расчете напряженного состояния клеевого соединения [Электронный ресурс] / С. С. Куреннов // Труды МАИ. – 2013. – № 66. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=40246> (02.03.2021).

158. Куреннов, С. С. О распределении напряжений по толщине клеевого соединения / С. С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т». – Харьков, 2016. – Вып. 4. – С. 80–89.

159. Куреннов, С. С. Напруження в клейовому з'єднанні двох коаксіальних труб. Спрощена двовимірна модель / С. С. Куреннов, К. П. Барахов // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя, 2019. – № 2. – С. 81–89.

160. Кутьинов, В. Ф. Расчет клеевых соединений / В. Ф. Кутьинов // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ. – 1979. – Вып. 7. – С. 14–30.

161. Максименко, В. Н. Расчет напряженного состояния клееклепаных слоистых пластин с трещиной / В. Н. Максименко, А. В. Тягний // Ученые записки ЦАГИ. – 1990. – № 5. – С. 92–101.

162. Максимюк, В. А. Напряженно-деформированное состояние гибких ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 71–80.

163. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.

164. Петрова, А. П. Клеи и герметики для авиастроения / А. П. Петрова, Н. Ф. Лукина, А. А. Донской // Клеи. Герметики. Технологии. – 2007. – № 8. – С. 26–36.

165. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев : Наук. думка, 1968. – 891 с.

166. Сильвестров, В. В. Ремонт пластины с круговым вырезом посредством заплатки / В. В. Сильвестров, А. Ю. Землянова // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 176–183.

167. Хома, И. Ю. Напряженное состояние нетонкой трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием / И. Ю. Хома, О. Г. Дашко // Прикладная механика. – 2015. – Т. 50, № 4. – С. 112–124.

Наукове видання

Сергій Сергійович
КУРЄННОВ,
Костянтин Петрович
БАРАХОВ

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
КЛЕЙОВИХ З'ЄДНАНЬ ВНАПУСК.
АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД**

ISBN 617-8130-13-8



9 786178 1130138

Відповідальний за випуск *С. С. Куреннов*
Редакція авторська

Підписано до друку 29.12.2022.

Формат 60×84 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.

Ум. друк. арк. 12,09. Наклад 100 прим.

Видавець: Мірошніченко Олег Анатолійович
61002, м. Харків, вул. Дарвіна, 16, кв. 25.

Свідоцтво Державного комітету телебачення і радіомовлення України
серія ДК № 5818 від 28.11.2017 р.
ел. пошта: merash@i.ua

Надруковано у друкарні «Impress»
61002, Харків, вул. Пушкінська, 56
Тел.: (057) 714-42-11, 752-08-38
www.impress.biz.ua