ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 17 1957

# О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРА ГАМИЛЬТОНА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ВЕКТОРОВ

*Я. Л. Геронимус*

## § 1

Рассмотрим систему связанных векторов $\{\overline{F}\}$, приложенных в точках с радиус-векторами $\{\overline{r}\}$; как известно, центром Гамильтона этой системы векторов называется точка, относительно которой главный векторный момент минимален, а главный вириал равен нулю. Радиус-вектор центра Гамильтона таков[1]:

$$\overline{r}_0 = \frac{V_0 \overline{R} + \overline{R} \times \overline{L}_0}{R^2}, \tag{1.1}$$

где $\overline{R}$ — главный вектор, $\overline{L}_0$ и $V_0$ — главный векторный момент и главный вириал системы относительно начала координат

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{r} \times \overline{F}, \ V_0 = \sum \overline{r} \cdot \overline{F}, \ \overline{R} = \sum \overline{F}. \tag{1.2}$$

Если $q$ и $q_1$ — кватернионы

$$q = Sq + Vq = Sq + \overline{i} q_x + \overline{j} q_y + \overline{k} q_z$$

и если воспользоваться основным правилом перемножения кватернионов

$$qq_1 = Sqq_1 + Vqq_1, \quad Sqq_1 = Sq \cdot Sq_1 - (q_x q_{1x} + q_y q_{1y} + q_z q_{1z}),$$

$$Vqq_1 = Sq\, Vq_1 + Sq_1\, Vq + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ q_x & q_y & q_z \\ q_{1x} & q_{1y} & q_{1z} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

то легко получим

$$rF = -\overline{r} \cdot \overline{F} + \overline{r} \times \overline{F},$$

откуда

$$\sum rF = -V_0 + \overline{L}_0. \tag{1.4}$$

Если через $p$ обозначить параметр винта

$$p = \frac{\overline{R}\, \overline{L}_0}{R^2}, \tag{1.5}$$

---

[1] См., например, [1, § 38].

то по (1.1), (1.5) имеем

$$p+\bar{r}_0=\frac{V_0\bar{R}+\bar{R}\times\bar{L}_0+\bar{R}\cdot\bar{L}_0}{R^2}=(-V_0+\bar{L}_0)\left(-\frac{\bar{R}}{R^2}\right)=$$

$$=(-V_0+\bar{L}_0)\cdot\frac{1}{\bar{R}},$$

и окончательно, пользуясь кватернионами, находим

$$\bar{r}_0+p=\frac{\Sigma rF}{\Sigma F}.^{1} \tag{1.6}$$

Если в частном случае все векторы параллельны, то $p=0$ и формула (1.6) преобразуется в формулу для радиус-вектора центра параллельных векторов.

## § 2

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда все векторы $\{\bar{F}\}$ параллельны одной и той же плоскости, которую можем принять, не уменьшая общности, за плоскость $Oxy$. Так как в этом случае $F_z=0$, то мы имеем

$$\bar{R}=\bar{i}R_x+\bar{j}R_y,\quad V_0=\sum(xF_x+yF_y);$$

$$L_x=-\sum zF_y,\ L_y=\sum zF_x,\ L_z=\sum(xF_y-yF_x); \tag{2.1}$$

$$\bar{r}_0=\frac{(\bar{i}R_k+\bar{j}R_y)\,V_0+\bar{i}R_yL_z-\bar{j}R_xL_z}{R^2}+\bar{k}\frac{R_xL_y-R_yL_x}{R^2}.$$

Вводя комплексные числа

$$f=F_x+iF_y,\ \rho=\sum f=R_x+iR_y,\ \zeta=x+iy,\ \zeta_0=x_0+iy_0, \tag{2.2}$$

мы имеем

$$\zeta_0=\frac{(R_x+iR_y)\,V_0+(R_y-iR_x)\,L_z}{R^2}=\frac{\rho\,(V_0-iL_z)}{|\rho|^2}=\frac{V_0-iL_z}{\bar{\rho}}, \tag{2.2'}$$

$$z_0-ip=\frac{(R_xL_x-R_vL_x)-i\,(R_xL_x+R_yL_y)}{R^2}=-i\frac{(R_x-iR_y)(L_x+iL_y)}{R^2}.$$

Ввиду того, что

$$V_0-iL_z=\sum(x+iy)\,(F_x-iF_y)=\sum\zeta\bar{f}, \tag{2.3}$$

$$(R_x-iR_y)\,(L_x+iL_y)=\bar{\rho}\left(-\sum zF_y+i\sum zF_x\right)=i\bar{\rho}\sum zf,$$

находим окончательно для центра Гамильтона и параметра винта следующие формулы:

$$\zeta_0=\frac{\Sigma\zeta\bar{f}}{\Sigma\bar{f}},\quad z_0-ip=\frac{\Sigma zf}{\Sigma f}. \tag{2.4}$$

Пользуясь этими формулами, легко докажем следующее свойство центра Гамильтона: е с л и  в с е  в е к т о р ы, п е р п е н д и к у л я р н ы е  о д н о й

---

[1] Точнее — первая часть (1.6) такова: $(\Sigma rF)\dfrac{1}{\Sigma F}$; см. [4], стр. 346—347.

и той же прямой, повернуть в плоскостях, перпендикулярных этой прямой, на один и тот же угол вокруг их фиксированных точек приложения, то центр Гамильтона и параметр винта этой системы векторов останутся неизменными.

Действительно, при повороте на угол $\varphi$ надо заменить в (2.4) $f$ на $fe^{i\varphi}$, от чего не изменяется ни $\zeta_0$, ни $z_0$, ни $p$.

§ 3

Введем единичный вектор $\bar{\tau} = \bar{i}\cos\varphi + \bar{j}\sin\varphi$, спроектируем все векторы $\{\bar{F}\}$ на направление $\bar{\tau}$, то есть найдем $F_\tau = \bar{F}\cdot\bar{\tau} = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi$, и рассмотрим систему параллельных векторов $\bar{F}'_\tau = \bar{\tau}(F_x\cos\varphi + F_x\sin\varphi)$. Центр этих параллельных векторов легко найти

$$\bar{r}_\tau = \frac{\cos\varphi\,\Sigma\bar{r}F_x + \sin\varphi\,\Sigma\bar{r}F_y}{R_x\cos\varphi + R_y\sin\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{3.1}$$

Обозначим через $C_1$ и $C_2$ центры параллельных векторов для $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Соответствующие радиус-векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ таковы:

$$\bar{r}_1 = \frac{\Sigma\bar{r}F_x}{R_x}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\Sigma\bar{r}F_y}{R_y}. \tag{3.2}$$

В таком случае из (3.1) находим

$$\bar{r}_\tau = \frac{\bar{r}_1\cdot R_x\cos\varphi + \bar{r}_2\cdot R_y\sin\varphi}{R_x\cos\varphi + R_y\sin\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{3.3}$$

то есть центры параллельных векторов при любом $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ лежат на прямой $C_1C_2$, называемой центральной прямой Мебиуса[1].

Обозначим через $C_3$ центр параллельных векторов для того случая, когда $\bar{\tau} = \frac{\bar{R}}{R}$. Мы найдем

$$\bar{r}_3 = \frac{\bar{r}_1 R_x^2 + \bar{r}_2 R_y^2}{R_x^2 + R_y^2}. \tag{3.4}$$

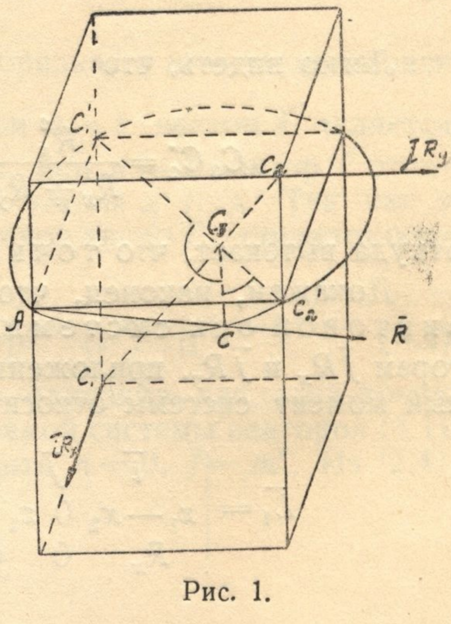

Рис. 1.

Покажем весьма простое построение центра Гамильтона при помощи найденных центров $C_1$ $C_2$, $C_3$ (рис. 1).

Спроектируем точки $C_1$ и $C_2$ на плоскость $z = z_3$; опишем на отрезке $C_1' C_2'$, как на диаметре, окружность. Через точку $A$ этой окружности проведем направление главного вектора $\bar{R}$. Тогда вторая точка пересечения этой прямой с окружностью является центром Гамильтона $C$.

[1] См. [5] §§ 144 — 145.

Для доказательства находим из (2.4)

$$z_0 - ip = \frac{\Sigma z(F_x + iF_y)}{\Sigma(F_x + iF_y)} = \frac{\Sigma zF_x + i\,\Sigma zF_y}{R_x + iR_y} =$$

$$= \frac{R_x^2 z_1 + R_y^2 z_2}{R_x^2 + R_y^2} + i\,\frac{R_x R_y (z_2 - z_1)}{R_x^2 + R_y^2};$$

отсюда $z_0 = z_3$, то есть центр Гамильтона лежит в плоскости $z = z_3$. Из (2.4) имеем

$$x_0 + iy_0 = \frac{\Sigma(xF_x + yF_y) + i\,\Sigma(yF_x - xF_y)}{R_x - iR_y} =$$

$$= \frac{R_x\,\Sigma(xF_x + yF_y) - R_y\,\Sigma(yF_x - xF_y) + i[R_y\,\Sigma(xF_x + yF_y) + R_x\Sigma(yF_x - xF_y)]}{R_x^2 + R_y^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_0 &= x_3 + \frac{R_x R_y}{R_x^2 + R_y^2}(y_2 - y_1), \\ y_0 &= y_3 - \frac{R_x R_y}{R_x^2 + R_y^2}(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно, отрезок $C_3C$ перпендикулярен отрезку $C_1'C_2'$, причем его длина такова:

$$C_3C = \frac{|R_x R_y|}{R_x^2 + R_y^2}\cdot C_1' C_2', \tag{3.6}$$

Легко видеть, что

$$C_3 C_2'' = \frac{R_x^2}{R_x^2 + R_y^2}\, C_1' C_2', \quad C_1' C_3 = \frac{R_y^2}{R_x^2 + R_y^2} C_1' C_2',$$

откуда вытекает, что точка $C$ лежит на окружности.

Докажем, наконец, что точка $A$ лежит на центральной винтовой оси системы; так как вся система эквивалентна векторам $\bar{j}R_x$ и $\bar{j}R_y$, приложенным в точках $C_1$ и $C_2$, то главный векторный момент системы относительно точки $A$

$$\bar{L}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 - x_2 & 0 & z_1 - z_3 \\ R_x & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & y_2 - y_1 & z_1 - z_3 \\ 0 & R_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R_x R_y (z_1 - z_2)}{R_x^2 + R_y^2}\,\bar{R}$$

совпадает по направлению с главным вектором $\bar{R}$.

Укажем простое построение модуля параметра винта (рис. 2); так как

$$|p| = \frac{|R_x R_y (z_2 - z_1)|}{R_x^2 + R_y^2}, \tag{3.7}$$

то надо описать полуокружность на отрезке $C_1 C_1''$ и через точку $C_3$ провести перпендикуляр к $C_1 C_1''$. Тогда $|p| = C_3' C_4$. Для доказательства достаточно заметить, что

$$C_3' C_1 = \frac{R_y^2}{R_x^2 + R_y^2} |z_2 - z_1|, \quad C_1'' C_3' = \frac{R_x^2}{R_x^2 + R_y^2} |z_2 - z_1|.$$

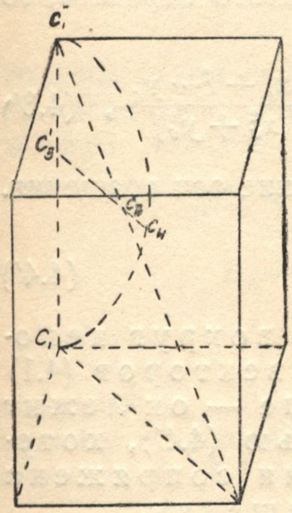


Рис. 2.

Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие приводимости рассматриваемой системы векторов к одному вектору: центральная линия должна быть перпендикулярна $Oz$.

Рассмотрим теперь случай, когда $L_z = \Sigma (xF_y - yF_x) = 0$; мы имеем из (2.2′)

$$x_0 = \frac{V_0 R_x}{R_x^2 + R_y^2}, \quad y_0 = \frac{V_0 R_y}{R_x^2 + R_y^2}, \tag{3.8}$$

то есть в этом случае центр Гамильтона лежит в плоскости, определяемой главным вектором $\bar{R}$ и осью $Oz$, причем имеет место соотношение

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\, R = V_0. \tag{3.9}$$

## § 4

Рассмотрим, в частности, твердое тело, вращающееся вокруг оси $Oz$. Пусть векторы $\bar{F}$ таковы:

$$\bar{F} = m \frac{d^n \bar{r}}{dt^n}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

где $\frac{d^n \bar{r}}{dt^n}$ является ускорением точки $n$-го порядка, а $m$ — элементарная масса этой точки тела. Таким образом, при $n = 1$ вектор $\bar{F}$ является количеством движения элементарной массы, при $n = 2$ вектор $\bar{F}$ отличается лишь знаком от силы инерции этой массы и т. д. Так как в данном случае имеем $\zeta = |\zeta| e^{i\alpha}$, то комплексное число $f$, соответствующее вектору $\bar{F}$, таково:

$$f = m \zeta^{(n)} = m |\zeta| (e^{i\alpha})^{(n)} = m \zeta [e^{-i\alpha} (e^{i\alpha})^{(n)}], \tag{4.2}$$

причем множитель в квадратных скобках одинаков для всех точек тела; поэтому центр Гамильтона рассматриваемой системы векторов (4.1) не зависит от $n$, то есть мы можем положить $n = 0$, $f = m\zeta$. Из (2.4) найдем

$$\zeta_0 = \frac{\sum m |\zeta|^2}{\sum m \bar{\zeta}} = \frac{I_z (x_c + i y_c)}{M (x_c^2 + y_c^2)},$$

$$z_0 = Re \left\{ \frac{\sum m z \zeta}{\sum m \varsigma} \right\} = Re \frac{(x_c - i y_c)(I_{xz} + i I_{yz})}{M (x_c^2 + y_c^2)},$$

и окончательно координаты центра Гамильтона в этом случае таковы:

$$x_0 = \frac{I_z x_c}{M (x_c^2 + y_c^2)}, \quad y_0 = \frac{I_z y_c}{M (x_c^2 + y_c^2)}, \quad z_0 = \frac{I_{xz} x_c + I_{yz} y_c}{M (x_c^2 + y_c^2)}. \tag{4.3}$$

Отсюда

$$I_z z_0 = I_{xz} x_0 + I_{yz} y_0, \tag{4.4}$$

то есть центр Гамильтона лежит в плоскости, сопряженной с осью вращения относительно эллипсоида инерции, построенного для точки $O$ на оси вращения.

Если ввести систему координат $Cx'y'z'$ с началом в центре тяжести тела и воспользоваться формулами параллельного переноса, то новые координаты центра Гамильтона таковы:

$$x'_0 = \frac{I_{z'} x_c}{M(x_c^2 + y_c^2)}, \quad y'_0 = \frac{I_{z'} y_c}{M(x_c^2 + y_c^2)}, \quad z'_0 = \frac{I_{x'z'} x_c + I_{y''} y_c}{M(x_c^2 + y_c^2)}, \tag{4.3'}$$

где координаты $(-x_c, -y_c)$ характеризуют положение оси вращения.

Так как из (4.3′) имеем

$$I_{z'} z'_0 = I_{x'z'} x'_0 + I_{y'z'} y'_0, \tag{4.4'}$$

то ясно, что при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси центр Гамильтона системы векторов (4.1) сохраняет неизменное положение в теле — он лежит в пересечении оси качаний с плоскостью (4.4′), которая в центральном эллипсоиде инерции сопряжена с диаметром $Cz'$, параллельным оси вращения.

## § 5

Пусть теперь тело движется плоско-параллельным движением параллельно плоскости $Oxy$. Мы имеем для каждой точки $M$ тела

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{k}(z - z_c) + \bar{r}_1,$$

где вектор $\bar{r}_1$ лежит в плоскости $P$, параллельной плоскости $Oxy$. Отсюда

$$\bar{r}^{(n)} = \bar{r}_c^{(n)} + \bar{r}_1^{(n)}.$$

Обозначая через $Q_n$ мгновенный центр ускорений $n$-го порядка, то есть точку плоскости $P$, для которой ускорение $n$-го порядка равно нулю, мы имеем для этой точки

$$0 = (\bar{r}_c)^{(n)} + (\bar{r})_2^{(n)},$$

откуда

$$\bar{r}^{(n)} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^{(n)} = \overline{Q_n M}^{(n)}.$$

Следовательно, ускорение $n$-го порядка любой точки в данный момент времени таково, как если бы тело вращалось вокруг оси, проходящей через точку $Q_n$, перпендикулярную к плоскости движения.

Таким образом, при плоско-параллельном движении твердого тела центр Гамильтона системы векторов (4.1) лежит в пересечении плоскости (4.4′) с осью качаний, если за ось подвеса взять ось, проходящую через мгновенный центр ускорений $n$-го порядка, перпендикулярно плоскости, параллельно которой происходит движение.

В частности, для нахождения кривой, описываемой в теле центром Гамильтона системы векторов количеств движения точек тела, нужно построить подвижной аксоид, затем построить для каждой мгновенной оси вращения, принимаемой за ось подвеса, соответствующую ось качаний и, наконец, пересечь полученную цилиндрическую поверхность плоскостью (4.4′).

§ 6

Рассмотрим теперь движение твердого тела вокруг неподвижной точки $O$. Возьмем за оси координат главные оси инерции для точки $O$, причем положим

$$x_c = y_c = 0, \quad I_x = I_y, \tag{6.1}$$

то есть будем считать, что $Oz$ является осью кинетической симметрии. Рассмотрим сначала векторы количеств движения точек тела; для них мы имеем

$$\overline{R} = \sum m\overline{v} = M\overline{v}_c + M(\overline{\omega} \times \overline{r}_c) = Mz_c(\overline{i}\,\omega_y - \overline{j}\,\omega_x),$$

$$\overline{L}_0 = \overline{i} I_x \omega_x + \overline{j} I_x \omega_y + \overline{k} I_z \omega_z,$$

$$V_0 = \sum \overline{r} \cdot m\overline{v} = \sum m[\overline{r} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{r})] = 0,$$

откуда $\overline{R} \cdot \overline{L}_0 = 0$, то есть в рассматриваемом случае система векторов количеств движения тела приводится к одному результирующему вектору; из (1.1) находим

$$\overline{r}_0 = \frac{\overline{R} \times \overline{L}_0}{R^2} = \frac{-\overline{i} I_z \omega_x \omega_z - \overline{j} I_z \omega_y \omega_z + \overline{k} I_x (\omega_x^2 + \omega_y^2)}{M z_c (\omega_x^2 + \omega_y^2)}, \tag{6.2}$$

откуда

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{\omega_y}{\omega_x}, \quad z_0 = \frac{I_x}{Mz_c}. \tag{6.3}$$

Таким образом, центр Гамильтона лежит в плоскости, определяемой осью кинетической симметрии тела и мгновенной осью вращения, и имеет неизменную координату $z_0 = \frac{I_x}{Mz_c}$.

В данном случае эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, является эллипсоидом вращения; поэтому проведя плоскость через ось кинетической симметрии и мгновенную ось вращения, мы получим в сечении эллипс, диаметр которого, сопряженный с этой осью, дает в пересечении с плоскостью $z = \frac{I_x}{Mz_c}$ центр Гамильтона.

Рассмотрим другой метод нахождения центра Гамильтона в рассматриваемом случае. Пусть мгновенная угловая скорость тела $\overline{\omega}$ разложена на составляющие (рис. 3)

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 = \overline{\omega}' + \overline{\omega}_3, \quad \overline{\omega}' = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2,$$

где $\overline{\omega}_1$ — угловая скорость собственного вращения, $\overline{\omega}_2$ — угловая скорость прецессии, идущая по неподвижной оси $Oz_1$, $\overline{\omega}_3$ — угловая скорость по оси $Ox$; вектор $\overline{q} = m\overline{v}$ можем представить в виде суммы двух составляющих

$$\overline{q} = \overline{q}_1 + \overline{q}_2, \quad \overline{q}_1 = m(\overline{\omega}' \times \overline{r}), \quad q_2 = m(\overline{\omega}_3 \times \overline{r}). \tag{6.4}$$

Векторы $\{\bar{q}_1\}$ соответствуют вращению вокруг оси $OA$ с угловой скоростью $\bar{\omega}'$; их можно заменить одним вектором

$$\bar{Q}_1 = \sum \bar{q}_1 = \bar{\omega}' \times M\bar{r}_c,$$

параллельным оси $Ox$ и проходящим через центр качания при вращении тела вокруг оси $OA$. Найдем точку на оси $OA$, для которой она будет главной осью инерции; нетрудно убедиться в том, что эта точка $A'$ лежит в пересечении оси $OA$ с окружностью, описанной, как на диаметре, на отрезке[1].

$$OB = \frac{I_x - I_z}{Mz_c}; \tag{6.5}$$

следовательно, искомый центр качания лежит на прямой $A'B \perp OA$.

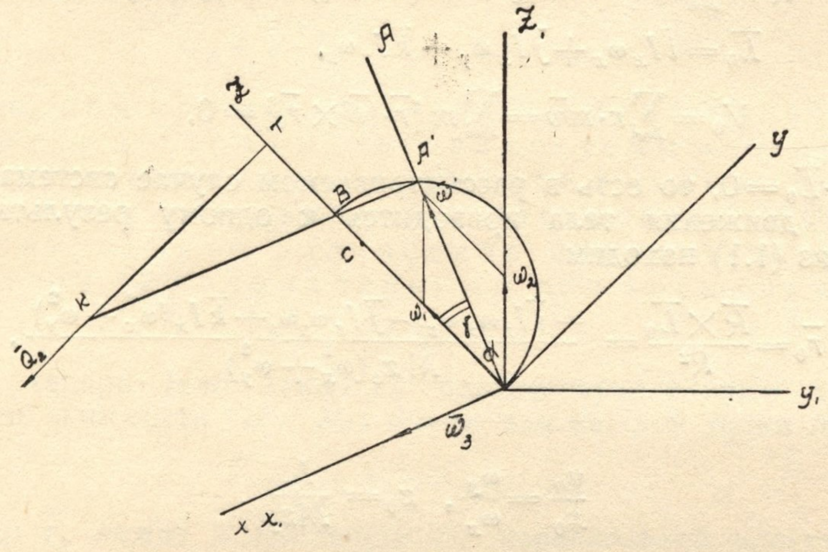


Рис. 3.

С другой стороны, векторы $\{\bar{q}_2\}$ соответствуют вращению вокруг оси $Ox$ с угловой скоростью $\bar{\omega}_3$; их можно заменить одним вектором

$$\bar{Q}_2 = \sum \bar{q}_2 = \bar{\omega}_3 \times M\bar{r}_c,$$

перпендикулярным к оси $Oz$ и проходящим через центр качания, соответствующий вращению тела вокруг оси $Ox$; откладывая отрезок $OT = \frac{I_x}{Mz_c}$, мы восставляем в точке $T$ перпендикуляр к $Oz$. Так как векторы $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ должны пересекаться, ибо система приводится к одному результирующему вектору $\bar{Q}$, то мы приходим к следующему выводу: при любой мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ результирующий вектор количеств движения точек тела проходит через точку $K$, лежащую в плоскости $zOz_1$ в пересечении перпендикуляров, восставленных к осям $Oz$ и $OA$ в точках $T$ и $A'$, причем $OT = \frac{I_x}{Mz_c}$, $OA' = \frac{I_x - I_z}{Mz_c} \cos\gamma$.

---

[1] См., например, [2].

Пусть сперва $\omega_3 = 0$[1]: легко видеть, что в этом случае точка $K$ будет центром Гамильтона. Это вытекает из того, что он должен лежать в пересечении линии действия вектора $\overline{Q}_1$, проходящего через точку $K$ параллельно оси $Ox$, с плоскостью нулевого вириала, проходящей через точку $O$ перпендикулярно вектору $\overline{Q}_1$.

Если фиксировать угол $\alpha$, но изменять отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, то есть изменять положение мгновенной оси вращения, то геометрическим местом центров Гамильтона будет прямая $KT$.

Пусть теперь $\overline{\omega}_3 \neq 0$, а $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ заданы; из (6.2) находим

$$x_0 = -\frac{I_z \omega_3 \omega_z}{Mz_c(\omega_x^2 + \omega_y^2)}, \quad y_0 = -\frac{I_z \omega_y \omega_z}{Mz_c(\omega_x^2 + \omega_y^2)}, \quad z_0 = \frac{I_x}{Mz_c}, \tag{6.6}$$

откуда ясно, что геометрическим местом центров Гамильтона при изменении $\omega_3$ является окружность

$$x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_z(\omega_1 + \omega_2 \cos\alpha)}{Mz_c \omega_2 \sin\alpha} y_0 = O,$$

$$z_0 = \frac{I_x}{Mz_c}, \tag{6.7}$$

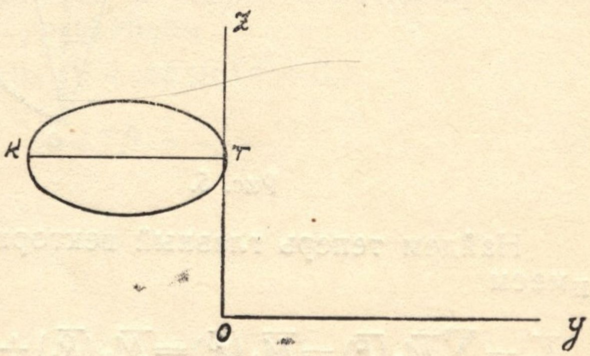


Рис. 4.

лежащая в плоскости $z_0 = \frac{I_x}{Mz_c}$ и имеющая своим диаметром отрезок $KT$ (рис. 4).

## § 7

Рассмотрим теперь силы инерции твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, то есть пусть $\overline{F} = -m\overline{w}$; ограничимся случаем регулярной прецессии[2], то есть будем считать $\alpha$, $\omega_1$, $\omega_2$, постоянными величинами.

Так как

$$\overline{w} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}, \tag{7.1}$$

то мы имеем:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad \overline{F}_1 = -m\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}), \quad \overline{F}_2 = -m\overline{\varepsilon} \times \overline{r}. \tag{7.2}$$

Силы $\{\overline{F}_1\}$ соответствуют равномерному вращению тела вокруг мгновенной оси вращения $OA$ с угловой скоростью $\overline{\omega}$; их можно заменить одной равнодействующей $\overline{R}_1$, идущей по линии $A'B$ (рис. 5,) причем $R_1 = Mz_c \sin\gamma\, \omega^2$; силы $\{\overline{F}_2\}$ соответствуют вращению вокруг оси $Ox$ с угловой скоростью, равной нулю, и угловым ускорением $\varepsilon$; их можно заменить одной равнодействующей $\overline{R}_2$, проходящей через точку $T$ перпендикулярно линии $OT$, причем $R_2 = Mz_c|\varepsilon|$; таким об-

---

[1] Мы имеем, например, такой случай при регулярной прецессии.

[2] Этот случай был впервые рассмотрен А. П. Минаковым [3, § 7]. Наш метод отличается от метода Минакова.

разом, силы инерции твердого тела при регулярной прецессии приводятся к одной равнодействующей $\overline{R}$, лежащей в плоскости $zOz_1$ и проходящей через найденную выше точку $K$; сила $\overline{R}$ перпендикулярна к оси прецессии $Oz_1$ и имеет модуль $R = Mz_c\omega_2^2 \sin\alpha$; последнее утверждение вытекает из того, что главный вектор инерционных сил таков:

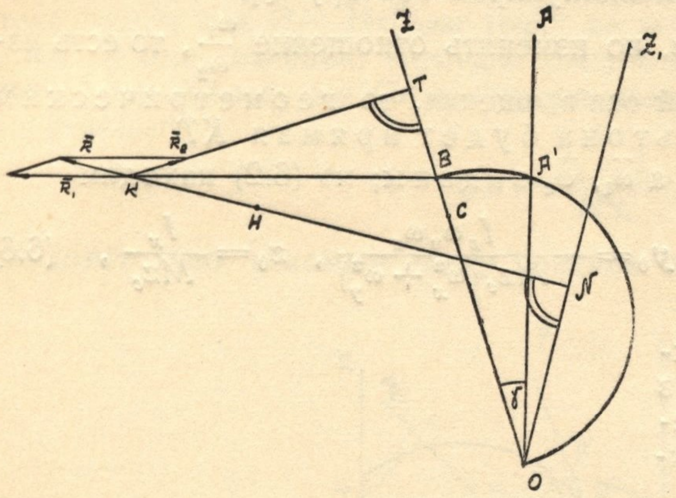


Рис. 5.

$$\overline{R} = -\sum m\overline{w} = -M\overline{w}_c;$$

если задан только угол $\alpha$, а отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ может изменяться, то геометрическим местом точки $K$ является прямая $KT$, не зависящая от положения мгновенной оси вращения.

Найдем теперь главный векторный момент инерционных сил. Мы имеем

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{M}_0(\overline{R}) = \overline{M}_0(\overline{R}_1) + \overline{M}_0(\overline{R}_2) = \overline{i}\cdot\{OA'\ R_1 - OT\cdot R_2\} =$$

$$= \overline{i}\left\{\frac{I_x - I_z}{Mz_c}\cdot\cos\gamma\cdot Mz_c\sin\gamma\,\omega^2 - \frac{I_x}{Mz_c}\cdot Mz_c|\varepsilon|\right\};$$

пользуясь очевидными соотношениями

$$\omega\cos\gamma = \omega_1 + \omega_2\cos\alpha,\ \omega\sin\gamma = \omega_2\sin\alpha,\ |\overline{\varepsilon}| = |\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2| = \omega_1\omega_2\sin\alpha, \quad (7.3)$$

мы легко получаем известную формулу для гироскопического момента при регулярной прецессии:

$$\overline{L}_0 = I_z(\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2)\left\{1 - \frac{I_x - I_z}{I_z}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\alpha\right\}. \quad (7.4)$$

Пользуясь этой формулой, мы легко найдем расстояние $ON$ линии действия, равнодействующей от неподвижной точки

$$ON = \frac{I_z}{Mz_c}\left\{\frac{I_x - I_z}{I_z}\cos\alpha - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}. \quad (7.5)$$

Для нахождения центра Гамильтона надо найти точку пересечения прямой $NK$ с перпендикулярной к ней плоскостью нулевого вириала, имеющей уравнение: $\overline{r}\cdot\overline{R} = V_0$; так как

$$\frac{d}{dt}\sum mr^2 = 2\sum\overline{r}\cdot m\overline{r}' = 0,\ \frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = 2\sum mv^2 + 2\sum\overline{r}\cdot m\overline{r}'' = 0, \quad (7.6)$$

то мы имеем:

$$V_0 = \sum\overline{r}\cdot\overline{F} = -\sum\overline{r}\cdot m\overline{r}'' = \sum mv^2 = 2T = I_{OA}\omega^2,$$

где $T$ — живая сила тела, а $I_{OA}$ — его момент инерции относительно мгновенной оси вращения $OA$

$$I_{OA} = I_z \cos^2\gamma + I_x \sin^2\gamma; \tag{7.7}$$

отсюда расстояние $HN$, где $H$ центр Гамильтона, таково:

$$HN = \frac{V_0}{R} = \frac{(I_z \cos^2\gamma + I_x \sin^2\gamma)\,\omega^2}{Mz_c\,\omega_2^2 \sin\alpha} = \frac{1}{Mz_c}\left\{ I_x \sin\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{I_z}{\sin\alpha}\left[\frac{\omega_1}{\omega_2} + \cos\alpha\right]^2\right\}. \tag{7.8}$$

Если рассмотреть систему координат $y_1Oz_1$ и считать угол $\alpha$ заданным, а отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ переменным, то геометрическим местом центра Гамильтона является парабола с осью, перпендикулярной оси $Oz_1$ (рис. 6), характеризуемая уравнением

$$b \sin\alpha\, y_1 + (z_1 - a\cos\alpha)^2 + ab\sin^2\alpha = 0,$$

$$a = OT = \frac{I_x}{Mz_c}\,, \quad b = TB = \frac{I_z}{Mz_c}\,, \tag{7.9}$$

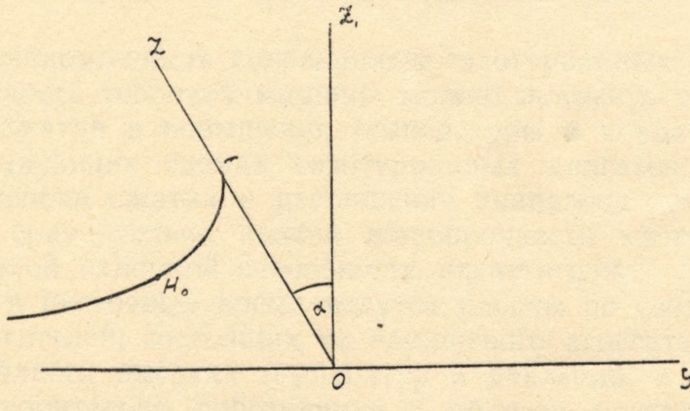


Рис. 6.

получаемым исключением $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ из (7.5) и (7.8); при $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 0$ центр Гамильтона будет в точке $H_0$; при увеличении $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ он перемещается по параболе в сторону убывающих значений $z_1$ [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретическая механика под ред. проф. Н. В. Розе, ч. 1, ГТТИ ,Л.—М., 1932.

2. Я. Л. Геронимус. О применении метода замещающих точек в динамике плоского движения. Прикладная математика и механика, т. II, вып. 4, 1939, стр. 493—498.

3. А. П. Минаков. О центрах в механике и о приведении сил инерции в твердом теле к простейшему виду. Научно-исслед. труды Московского текстильного ин-та, т. X, 1948, стр. 210—222.

4. W. Hamilton. Elemente der Quaternionen, т. II, 1884.

5. A. Möbius. Gesammelte Werke, т. III, 1886.

[1] Вопрос о перемещении центра Гамильтона при изменении $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ был поставлен А. П. Минаковым; он пишет: „...в общем случае, т. е. когда $\alpha \neq 90°$, влияние $\omega_1$ на положение центра Гамильтона становится более сложным и интересным, но мы не будем здесь касаться этого вопроса“. ([3], стр. 222).