УДК 539.3 А.И. Соловьев, канд. физ.-мат. наук,
Л.И. Курпа, канд. физ.-мат. наук

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Предлагается метод исследования краевых задач теории упругости для плоскости с круговым отверстием и двумя прямолинейными полубесконечными трещинами (разрезами) на прямой, не проходящей через центр отверстия. Этот метод основан на применении соотношений между базисными решениями уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах и приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективные асимптотический и численный анализы напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений.

Объектами особого внимания механики разрушения являются вершина трещины – место возникновения наибольшей концентрации напряжений, и исходная точка дальнейшего разрушения материала. Наиболее важными параметрами в линейной механике разрушения являются коэффициенты интенсивности напряжений, знание которых позволяет изучить поведение тела с трещинами, в частности, сформулировать критерий локального разрушения материала [1].

Предлагаемый аналитический подход непосредственно связан с математической проблемой расчета ответственных авиационных и несущих строительных конструкций, которые должны обладать прочностной надежностью при наличии в материале исходных дефектов (трещин, полостей, включений и т.п.).

Рассмотрена симметричная по одной координате задача о равновесии упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием и двумя прямолинейными полубесконечными разрезами (рис. 1). Разложением по малому геометрическому параметру получена асимптотическая формула для коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

Пусть (x,y), (x_1,y_1), (ρ_1,φ_1), (α,β), (α,σ) – декартовы, полярные и биполярные координаты, определяемые равенствами:

$$x_1 = x,\ y_1 = y - h,\ x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1,\ y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1;$$

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha + \cos\beta} = \frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\sigma},\ y = \frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha + \cos\beta} = \frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\sigma}$$

$$\left(a > 0;\ h > 0, -\pi \le \beta,\sigma \le \pi,\ -\infty < \alpha < \infty\right).$$

Базисные решения уравнения Ламе

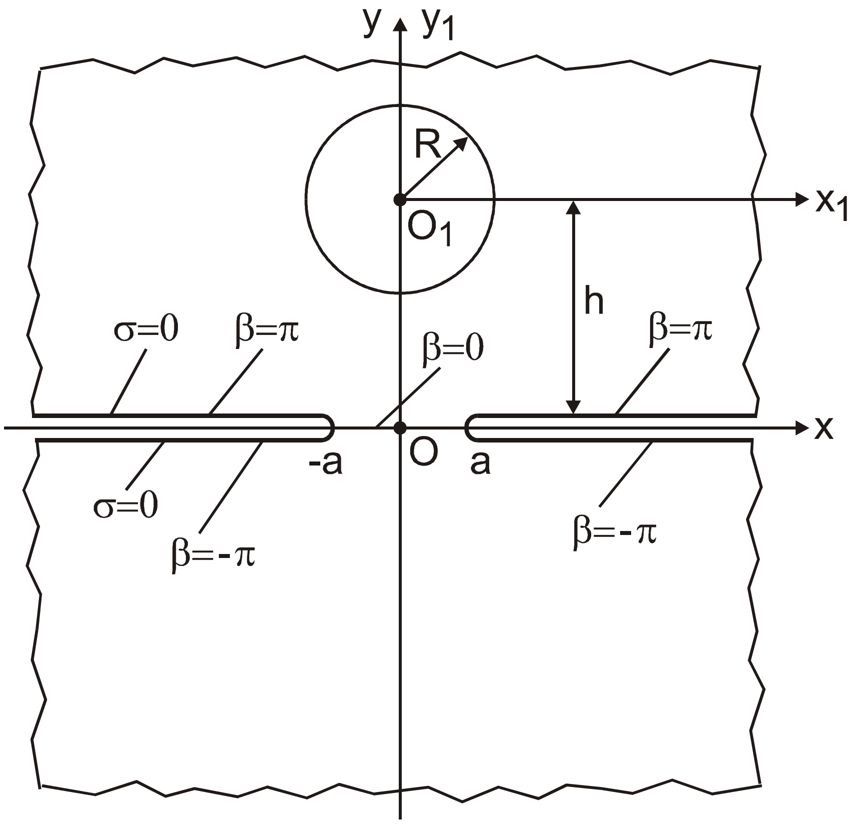

Рисунок 1 – Геометрия области

$$\text{grad div}\,\vec{u}+(1-2\nu)\Delta\vec{u}=0 \tag{1}$$

($\vec{u}$ – вектор упругих перемещений; ν – коэффициент Пуассона) в полярных и биполярных координатах, обладающие симметрией по координате $x(\alpha)$, выберем в форме вектор-функций

$$\begin{cases}\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1)=\rho_1^{n-1}\left[\sin(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\vec{e}_x+\cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\vec{e}_y\right];\\ \vec{u}_{2,n}(\rho_1,\varphi_1)=2\left(y_1\,\text{grad}-\varkappa\vec{e}_y\right)\left[\rho_1^{n+1}\cos(n+1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\right]-(n+1-\varkappa)\vec{u}_{1,n+2}(\rho_1,\varphi_1);\\ \vec{u}_{3,n}(\rho_1,\varphi_1)=\rho_1^{-(n+1)}\left[-\sin(n+1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\vec{e}_x+\cos(n+1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\vec{e}_y\right];\\ \vec{u}_{4,n}(\rho_1,\varphi_1)=\left(y_1\,\text{grad}-\varkappa\vec{e}_y\right)\left[2\rho_1^{-(n-1)}\cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)\right]+(n-1+\varkappa)\vec{u}_{3,n-2}(\rho_1,\varphi_1);\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\vec{u}_1^{\pm}(\alpha,\beta;\tau)=e^{\mp\tau\beta}\left(\sin\tau\alpha\,\vec{e}_x\pm\cos\tau\alpha\,\vec{e}_y\right);\\ \vec{u}_2^{\pm}(\alpha,\beta;\tau)=\left(y\,\text{grad}-\varkappa\vec{e}_y\right)\left(e^{\mp\tau\beta}\cos\tau\alpha\right);\\ \vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)=e^{\tau\sigma}\sin\tau\alpha\,\vec{e}_x+\left(e^{\tau\sigma}\cos\tau\alpha-1\right)\vec{e}_y;\\ \vec{u}_4(\alpha,\sigma;\tau)=2\left(y\,\text{grad}-\varkappa\vec{e}_y\right)\left(e^{\tau\sigma}\cos\tau\alpha-1\right)\end{cases} \tag{3}$$

($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ – орты декартовой системы координат, $\varkappa = 3-4\nu$).

Решения (2), (3) связаны между собой равенствами

$$\begin{cases} \vec{u}_1^{\pm}(\alpha,\beta;\tau) = \pm e^{\pm i\tau\gamma} \pm \sum\limits_{n=2}^{\infty} D_{n-1}(\pm\tau)(h+ia)^{-(n-1)}\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1); \\ \vec{u}_2^{\pm}(\alpha,\beta;\tau) = -(\varkappa \pm \dfrac{2ah}{a^2+h^2}\tau)e^{\pm i\tau\gamma} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} D_{n+1}(\pm\tau)(h+ia)^{-(n+1)}\vec{u}_{2,n}(\rho_1,\varphi_1) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty} D_{n-1}(\pm\tau)(n-1-\varkappa)(h+ia)^{-(n-1)}\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1) - \\ \qquad - h\sum\limits_{n=2}^{\infty} D_n(\pm\tau)n(h+ia)^{-n}\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1); \\ \vec{u}_{3,n}(\rho_1,\varphi_1) = (h+ia)^{-(n+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{n+1}(\tau)\vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)d\tau; \\ \vec{u}_{4,n}(\rho_1,\varphi_1) = (h+ia)^{-(n-1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{n-1}(\tau)[\vec{u}_4(\alpha,\sigma;\tau) + (n-1+\varkappa)\vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)]d\tau - \\ \qquad - 2h(n-1)(h+ia)^{-n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)\vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)d\tau. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь

$$D_m(\tau) = \frac{2ia\tau}{a+ih}e^{i\tau\gamma}F\left(1-m, 1-i\tau; 2; \frac{2a}{a+ih}\right),\ \gamma = \ln\frac{a+ih}{a-ih},\ D_0(\tau) = e^{i\tau\gamma};$$

$$C_m(\tau) = -\frac{ima}{a+ih}\frac{e^{-i\tau\gamma}}{\operatorname{sh}\pi\tau}F\left(1-m, 1+i\tau; 2; \frac{2a}{a+ih}\right) \quad (m = 1,2,\ldots);$$

$$F(-n,b;c;z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b)_k}{k!(c)_k}z^k$$ – гипергеометрический полином [2];

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = (-1)^k\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-k)},$$ $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

При выводе разложений (4) использованы соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа в полярных и биполярных координатах [3] и их линейные комбинации, обладающие симметрией по координате $x(\alpha)$:

$$e^{\mp\tau\beta}\sin\tau\alpha = \pm\sum_{n=1}^{\infty} D_n(\pm\tau)(h+ia)^{-n}\rho_1^n\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right),\ \left(\rho_1 < \sqrt{a^2+h^2}\right)$$

$$e^{\mp\tau\beta}\cos\tau\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\pm\tau)(h+ia)^{-n}\rho_1^n\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right);$$

$$\rho_1^{-n}\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right) = (h+ia)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)\left(e^{\tau\sigma}\cos\tau\alpha - 1\right)d\tau, (-\pi < \sigma < \pi - \operatorname{Im}\gamma);$$

$$\rho_1^{-n}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right) = -(h+ia)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)e^{\tau\sigma}\sin\tau\alpha\, d\tau.$$

Применим разложения (4) к решению задачи о равновесии упругой плоскости, ослабленной отверстием $0 \le \rho_1 < R$ и двумя прямолинейными полубесконечными трещинами (разрезами) |x| > a, y = 0. Пусть берега разрезов $\beta = \pm\pi$ свободны от внешних усилий, а граница отверстия $\rho_1 = R$ подвержена давлению интенсивности σ_0 = const ($\sigma_0 > 0$).

Тогда граничные условия имеют вид

$$\sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = 0\ \left(\beta = \pm\pi\right);\ \sigma_{\rho_1} = -\sigma_0,\ \tau_{\rho_1\varphi_1} = 0\ \left(\rho_1 = R\right). \tag{5}$$

С учетом симметрии задачи относительно оси Ox общее решение уравнения (1) представим в виде

$$\begin{aligned}\vec{u} = &\int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau)\vec{u}_1^{\,+}(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\tau)\vec{u}_1^{\,-}(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\tau)\vec{u}_2^{\,+}(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau)\vec{u}_2^{\,-}(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}\vec{u}_{3,n}\left(\rho_1,\varphi_1\right) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(2)}\vec{u}_{4,n}\left(\rho_1,\varphi_1\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Удовлетворяя условиям (5) на основе общего решения (6) и соотношений (4), исключая затем плотности интегралов $A_i(\tau)$, $B_i(\tau)$ (i=1, 2) и заменяя коэффициенты рядов $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ безразмерными величинами $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ по формулам $B_n^{(1)} = -\dfrac{\sigma_0 R^{n+2}}{2G}x_n^{(1)}$, $B_n^{(2)} = -\dfrac{\sigma_0 R^{n}}{2G}x_n^{(2)}$ (G – модуль сдвига), после некоторых преобразований для отыскания $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$\begin{aligned}x_n^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(11)}x_k^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(12)}x_k^{(2)} + f_n \qquad \left(n = 0,1,2,\ldots\right);\\ x_n^{(2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(21)}x_k^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(22)}x_k^{(2)} \qquad \left(n = 2,3,\ldots\right),\end{aligned} \tag{7}$$

в которой

$$f_0 = 1;\ f_n = 0\ \ (n = 1,2,\ldots);$$

$$d_{nk}^{(11)} = \left(n-1\right)d_{nk}^{(21)} + \frac{1}{2}\lambda^{n+k+2}I_{n,k}^{(2)};$$

$$d_{nk}^{(12)} = (n-1)\,d_{nk}^{(22)} + \frac{1}{2}\lambda^{n+k}\left[I_{n,k-2}^{(1)} + (k-1)I_{n,k-2}^{(2)} - 2(k-1)\,\varepsilon I_{n,k-1}^{(2)}\right];$$

$$d_{nk}^{(21)} = \frac{1}{2}\lambda^{n+k}\left[I_{n-2,k}^{(1)} + (n-1)I_{n-2,k}^{(2)} + (n+1)\lambda^2 I_{n,k}^{(2)} - 2n\varepsilon I_{n-1,k}^{(2)}\right];$$

$$d_{nk}^{(22)} = \frac{1}{2}\lambda^{n+k-2}\Big\{(n+k-2)I_{n-2,k-2}^{(1)} + (nk-n-k+2)I_{n-2,k-2}^{(2)} -$$

$$-2(k-1)\varepsilon\left[I_{n-2,k-1}^{(1)} + (n-1)I_{n-2,k-1}^{(2)}\right] + (n+1)\lambda^2\left[I_{n,k-2}^{(1)} + (k-1)I_{n,k-2}^{(2)}\right] -$$

$$-2n\varepsilon\left[I_{n-1,k-2}^{(1)} + (k-1)I_{n-1,k-2}^{(2)}\right] - 2(n+1)(k-1)\lambda^2\varepsilon I_{n,k-1}^{(2)} + 4n(k-1)\varepsilon^2 I_{n-1,k-1}^{(2)}\Big\};$$

$$d_{0k}^{(11)} = \lambda^{k+2} I_{0,k}^{(2)},\; d_{0k}^{(12)} = -\lambda^k\left[2(k-1)\,\varepsilon I_{0,k-1}^{(2)} - I_{0,k-2}^{(1)} - (k-1)I_{0,k-2}^{(2)}\right];$$

$$I_{m,k} = I_{m,k}^{(1)} - I_{m,k}^{(2)},\; I_{m,k}^{(j)} = (k+1)J_{m,k}^{(j)} \quad (j=1,2);$$

$$\left\{\begin{matrix} J_{m,k}^{(1)} \\ J_{m,k}^{(2)} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(k+1)(\varepsilon+i)^{m+k+2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix} D_{m+1}(\tau) \\ D_{m+1}(-\tau) \end{matrix}\right\}\frac{C_{k+1}(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,d\tau;$$

$$J_{k,m}^{(j)} = J_{m,k}^{(j)} \quad (j=1,2);\; \lambda = \frac{R}{a},\; \varepsilon = \frac{h}{a}.$$

Существенно, что коэффициент интенсивности нормальных напряжений

$$K_I = \lim_{\substack{x\to a \\ (x<a)}}\left[\sigma_y\big|_{\beta=0}\sqrt{2(a-x)}\right]$$

выражается непосредственно через решение системы (7):

$$K_I = \frac{\sigma_0\sqrt{a}}{2(1+\varepsilon^2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\alpha_k\left[x_k^{(1)} + k\,x_{k+2}^{(2)}\right] - 2(k+1)\alpha_{k+1}\,\varepsilon\, x_{k+2}^{(2)}\right\}\lambda^{k+2},$$

$$\alpha_m = \frac{m+1}{(\varepsilon+i)^m}\left[e^{\frac{\gamma}{2}}F\left(-m;\frac{1}{2};2;\frac{2}{1+i\varepsilon}\right) + e^{-\frac{\gamma}{2}}F\left(-m;\frac{3}{2};2;\frac{2}{1+i\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \frac{2(m+1)}{(1+\varepsilon^2)^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{m}\frac{2^k(-m)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!(2)_k}\sum_{j=0}^{m+1-k}C_{m+1-k}^{j}\,\varepsilon^{m+1-k-j}\cos\frac{\pi}{2}(k+j-1).$$

Используя равенства [2, 4]

$$\frac{\pi\tau}{\mathrm{sh}\pi\tau}=\Gamma(1-i\tau)\Gamma(1+i\tau),\ \frac{\pi}{\mathrm{ch}\pi\tau}=\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right);$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)ds=2\pi i\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)};$$

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(s)\Gamma(s+c-a-b)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)(1-z)^{-s}ds=$$

$$=2\pi i\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z);$$

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}F(a,c-b;c;\frac{z}{z-1})=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b')_j}{j!(c')_j}z^jF(a+j,b;c;y)=F_2(a,b,b';c,c';y,z),$$

$$F_2(a,b,b';a,a;y,z)=(1-y)^{-b}(1-z)^{-b'}F(b,b';a;\frac{yz}{(1-y)(1-z)});$$

$$a(z-1)F(a+1,b;c;z)=-(2a-c-az+bz)F(a,b;c;z)-(c-a)F(a-1,b;c;z);$$

$$bF(a,b+1;c;\xi)=(b-a)F(a,b;c;\xi)+aF(a+1,b;c;\xi);$$

$$(b-a)(1-\xi)F(a,b;c;\xi)=(c-a)F(a-1,b;c;\xi)+(b-c)F(a,b-1;c;\xi),$$

для вычисления величин $J^{(1)}_{m,k}$, $J^{(2)}_{m,k}$ получаем рекуррентные формулы

$$J^{(1)}_{m+1,k+1}=-\frac{1}{k+2}\left\{(m+3)J^{(1)}_{m+2,k}-2(m+k+3)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}J^{(1)}_{m+1,k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[(m+1)J^{(1)}_{m,k}+kJ^{(1)}_{m+1,k-1}\right]\right\}\quad(m,k=0,1,2,...);$$

$$J^{(2)}_{m+1,k+1}=\frac{1}{k+2}\left\{(m+3)J^{(2)}_{m+2,k}-2(m-k+1)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}J^{(2)}_{m+1,k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[(m+1)J^{(2)}_{m,k}-kJ^{(2)}_{m+1,k-1}\right]\right\}\quad(k\le m;m,k=0,1,2,...);\quad(8)$$

$$J^{(1)}_{m+2,0}=\frac{2m+5}{m+4}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}J^{(1)}_{m+1,0}-\frac{m+1}{m+4}\frac{1}{1+\varepsilon^2}J^{(1)}_{m,0}\quad(m=0,1,2,...);$$

$$J^{(2)}_{m+1,0}=\frac{1}{2\varepsilon}\left[J^{(1)}_{m,0}+J^{(2)}_{m,0}\right]\quad (m=0,1,2,\ldots);\ J^{(j)}_{k,m}=J^{(j)}_{m,k}\quad (j=1,2);$$

$$J^{(1)}_{0,0}=-\frac{1}{2(1+\varepsilon^2)^2},J^{(1)}_{1,0}=-\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)^3},J^{(2)}_{0,0}=\frac{1}{2(1+\varepsilon^2)}$$

и явное выражение

$$J^{(1)}_{m,k}=-\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^2(\varepsilon+i)^{m+k}}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!(2)_j}\left(\frac{2}{1+i\varepsilon}\right)^j\sum_{s=0}^{k}\frac{(-k)_s\left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!(2)_s(j+s+2)}\left(\frac{2}{1+i\varepsilon}\right)^s. \quad (9)$$

Формулы (8) удобны для вычисления матрицы $\left(d^{(ij)}_{nk}\right)$ бесконечной системы (7), но малопригодны для изучения свойств этой системы. Записывая (9) в интегральной форме

$$J^{(1)}_{m,k}=-\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^2(\varepsilon+i)^{m+k}}\int_0^1 xF(-m,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+i\varepsilon})F(-k,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+i\varepsilon})dx,$$

используя интегральное представление [2, 4]

$$F(-n,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+i\varepsilon})=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}\left(1-\frac{2xt}{1+i\varepsilon}\right)^n dt$$

и учитывая, что

$$\left|1-\frac{2xt}{1+i\varepsilon}\right|\le 1\quad (0\le x,t\le 1),\ \left|F(-n,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+i\varepsilon})\right|\le\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}dt=1,$$

получаем

$$\left|J^{(1)}_{m,k}\right|\le\frac{1}{2(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(m+k+2)}}. \quad (10)$$

Для величин $J^{(2)}_{m,k}$ выполняется неравенство

$$\left|J_{m,k}^{(2)}\right| \le \frac{2}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(m+k+2)}}. \tag{11}$$

Из оценок (10), (11) следует, что при $\bar{\lambda} = \frac{R}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} < 1$

$$\sigma_n^{(ij)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left|d_{nk}^{(ij)}\right| \to 0 \quad (n\to\infty, 0<\bar{\lambda}<1),$$

т.е. бесконечная система (7) квазирегулярна при $0<\bar{\lambda}<1$ и вполне регулярна при $0<\bar{\lambda}\le\bar{\lambda}_0<1$ для некоторого $\bar{\lambda}_0\in(0;1)$. Ограничение $0<\bar{\lambda}<1$ на возможные значения параметра $\bar{\lambda}$ естественным образом связано с формулировкой рассматриваемой задачи и означает, что окружность $\rho_1=R$ (граница отверстия) не пересекается и не касается трещин $\beta=\pm\pi$.

Решая бесконечную систему методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка $\bar{\lambda}^4$, для коэффициента интенсивности нормальных напряжений получаем асимптотическую формулу

$$K_I = \frac{\sigma_0\sqrt{a}}{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left\{2\bar{\lambda}^2 + \left[1+\frac{3\varepsilon^4}{(1+\varepsilon^2)^2}\right]\bar{\lambda}^4\right\} + O\left(\bar{\lambda}^6\right).$$

Список использованных источников

1. Сиратори М. Вычислительная механика разрушения / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334 с.

2. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

3. Соловьев А.И. О равновесии плоскости, ослабленной отверстием и двумя трещинами / А.И. Соловьев, В.В. Цымбалюк // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, №8. – С.105 – 111.

4. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Поступила в редакцию 14.12.2009.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков