УДК 629.13.039 М.П. Львов, канд. техн. наук

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для оценки статической прочности авиационных конструкций принято использовать метод разрушающих нагрузок. Применение этого метода требует учета физической нелинейности деформирования, то есть данных о нелинейной зоне диаграмм растяжения и сжатия используемых полуфабрикатов. Вопросы аппроксимации нелинейной части диаграмм деформирования рассмотрены, например, в работе [1], однако приведенные там способы недостаточно точно описывают наиболее важный для задач устойчивости интервал между пределом пропорциональности и пределом текучести.

Анализ данных, приведенных в литературе (например [2]), показывает, что числовые значения почти всех механических характеристик конструкционных материалов имеют широкий разброс, а приводимые в различных источниках диаграммы деформирования следует рассматривать как единичные реализации случайных процессов.

Учитывая изложенное, представляется допустимым использовать приближенные интерполяционные формулы для нелинейной части диаграмм деформирования. В настоящей работе для конструкционных материалов, не имеющих площадки текучести при растяжении, предлагается интерполяционная формула

$$\sigma = \sigma_0 + S \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0} \qquad (1)$$

для описания диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ растяжения или сжатия деформируемых сплавов в диапазоне от предела пропорциональности $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{пц}}$ до условного предела текучести $\boldsymbol{\sigma}_{02}$. Для определения коэффициентов зависимости (1) используются условия совпадения в точках $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{пц}}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{02}$, а также отсутствие излома в точке $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{пц}}$. Из этих трех условий получены достаточно простые формулы для трех параметров формулы (1):

$$\sigma_0 = \frac{2 \cdot \mathrm{E} \cdot \varepsilon_{02} \cdot \sigma_{пц} - (\sigma_{пц}^2 + \sigma_{02}^2)}{2 \cdot (\mathrm{E} \cdot \varepsilon_{02} - \sigma_{02})}, \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon_{02} = \frac{\sigma_{02}}{E} + 0{,}002; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{2 \cdot \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{пц}} - \boldsymbol{\sigma}_0)}; \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{пц}} + \boldsymbol{\sigma}_0}{2 \cdot \boldsymbol{E}}. \qquad (5)$$

Предлагаемая интерполяционная формула обладает двумя преимуществами: учитывает три механические характеристики реальной диаграммы деформирования и позволяет получить конечные выражения для интерполяционных коэффициентов. Численные эксперименты показывают, что применение формулы (1) дает удовлетворительные результаты при интерполяции реальных диаграмм деформирования и существенно упрощает вычисления при решении задач прочности и устойчивости при упругопластическом деформировании.

Рассмотрим применение предложенной интерполяции в процедурах определения общей и местной потери устойчивости продольных элементов каркаса тонкостенных несущих конструкций, типичных для летательных аппаратов.

Учет реальной диаграммы деформирования материала стержня при определении критических напряжений общей потери устойчивости рассматривается, например, в работе [3]. Остановимся на концепции Шэнли и формуле Энгессера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E_k}{\lambda^2}, \tag{6}$$

где λ – приведенная гибкость стержня, а E_k касательный модуль материала в точке $\sigma = \sigma_{кр}$, что превращает формулу (6) в уравнение. Для решения этого уравнения в [3] предлагается двукратное применение графической процедуры: вначале, задаваясь несколькими величинами критических напряжений, по диаграмме $\sigma(\varepsilon)$ находят графически касательные модули и, определяя λ из равенства (06), строят кривую $\lambda(\sigma_{кр})$, а затем по этой кривой графически находят величину $\sigma_{кр}$, соответствующую величине заданного λ.

Применение интерполяционной формулы (1) позволяет избежать применения графических процедур. Использование формулы (1) для определения касательного модуля позволяет представить формулу Энгессера в виде

$$\sigma_{кр} = 0.5 \cdot \left[\sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot S}{\lambda} \right)^2} \right], \tag{7}$$

где коэффициенты S и σ_0 определяются формулами (2) и (4). Как и формула (1), формула (7) справедлива в интервале $\sigma_{пц} \le \sigma \le \sigma_{02}$, то есть в диапазоне значений гибкости:

$$\frac{\pi \cdot S}{\sqrt{2 \cdot \sigma_{02} \cdot (\sigma_{02} - \sigma_0)}} \le \lambda \le \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{8}$$

Например, для диаграммы $\sigma(\varepsilon)$, приведенной в работе [3, с. 83], механические характеристики равны: ***E*** = 75 ГПа, $\sigma_{пц}$ = 200 МПа,

$\boldsymbol{\sigma_{02}}$ = 310 МПа, параметры формулы (1): $\boldsymbol{S}$ = 2,46 ГПа, $\boldsymbol{\sigma_0}$ = 159,66 МПа, $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ = $2{,}398 \cdot 10^{-3}$. Результаты расчетов по формуле (7) вполне удовлетворительно согласуются с результатами графических процедур, приведенными в [3, табл. 38, с.85].

При рассмотрении местной потери устойчивости поясов лонжеронов и полок стрингеров они рассматриваются как пластины. Для определения критических напряжений сжатия пластин в разных источниках предлагаются разные подходы. Чаще всего для прямоугольных пластин предлагаются формулы вида

$$\sigma_{кр} = \eta \cdot \frac{0{,}9 \cdot k \cdot E}{\left(b/\delta \right)^2}, \tag{9}$$

где η – коэффициент, учитывающий физическую нелинейность. В частности, в работе [4, с. 12] $\eta_K = \sqrt{E_k / E}$, где $\boldsymbol{E_K}$ – касательный модуль, а в работе [3, с.116] для различных условий опирания сторон даются различные формулы для η; в частности, для шарнирного опирания трех сторон $\eta_C = E_C / E$, где E_C – секущий модуль.

Известно (например [3]), что в задачах об устойчивости стержней за пределом пропорциональности наиболее адекватным подходом является подход Кармана, учитывающий разгрузку волокон при рассмотрении отклоненного состояния. Двойной модуль Кармана определяется аналитически только для прямоугольного сечения:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{4 \cdot E \cdot E_K}}{\left(\sqrt{\boldsymbol{E}} + \sqrt{\boldsymbol{E_K}} \right)^2}. \tag{10}$$

Учитывая, что поперечное сечение пластинки представляет собой совокупность прямоугольников и, следовательно, можно применить формулу (10), рассмотрим наряду с двумя упомянутыми выше двумя подходами также и третий, когда $\eta_T = T/E$.

Сравнительный расчет по трем различным формулам для $\boldsymbol{\eta}$, выполненный по данным о диаграмме $\sigma(\varepsilon)$, приведенным в табл. 13 с.115 справочника [3], показывает, что применение модуля Кармана дает нижнюю границу совокупности кривых $\sigma_{кр}(\lambda)$: если при напряжении $\sigma_{пц}$ ***= 200*** МПа предельная гибкость $\lambda_{пц}$ ***= 12,46***, то при напряжении $\boldsymbol{\sigma_{02}}$ ***= 300*** МПа оказалось: λ_C ***= 8,632***, λ_K ***= 7,053***, λ_T ***= 6,255*** (т. е. третья точка на плоскости $\lambda - \sigma$ расположена левее первых двух).

Таким образом, в случае расчета пластин подход Кармана дает два преимущества: не противоречит реальным условиям деформирования в отклоненном состоянии и дает нижнюю границу разброса критических напряжений. Кроме того, для пластин отсутствуют дополнительные трудности, связанные с определением модуля Кармана для сечений различных форм.

Трудоемкость расчетов при наличии нелинейной части диаграммы сжатия для всех трех обсуждаемых здесь подходов приблизительно одинакова и определяется необходимостью объемных графических построений. Интерполяционная формула (1) позволяет записать в аналитическом виде коэффициент η_T, и в этом случае формула (9) преобразуется в уравнение, связывающее величину $\lambda = b/\delta$ с величиной критического напряжения:

$$\frac{\sigma}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_{пц} - \sigma_0}} + 1 \right)^2 = \frac{0,9 \cdot k \cdot E}{\lambda^2}. \qquad (11)$$

В этом уравнении величина σ_0 является параметром квадратичной интерполяции и определяется через механические характеристики материала по формуле (2). Уравнение (11) позволяет легко найти λ по заданному σ, а для решения обратной задачи приходится решать (без графических процедур) трансцендентное уравнение относительно σ, что достаточно просто сделать, например, в приложении Mathcad.

Выводы

Предложена новая модель аналитического представления нелинейной части диаграммы деформирования материалов, обеспечивающая существенное упрощение различных вычислительных процедур при достаточной точности.

Список использованных источников

1. Серенсен С.В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович; под ред. акад. УССР С.В. Серенсена. – М.: Машгиз, 1963. – 451 с.
2. Справочник по авиационным материалам. Т.2. Цветные сплавы. Ч.1. Алюминиевые сплавы/ Под ред. А.Т. Туманова.– М., 1965.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справ. в 3 т. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
4. Андриенко В.М. Критические напряжения местной потери устойчивости профилей панелей /В.М. Андриенко, А.А. Белоус, Л.А. Нитовщикова – Тр. ЦАГИ, Вып. 964,– М.: БНИ ЦАГИ, 1965. – 23 с.

Поступила в редакцию 10.03.2010.
Рецензент: д-р техн. наук, ст. науч. сотр. В.И. Сливинский УкрНИИТМ, г. Днепропетровск