Выпуск 17 1957

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОЙ СИСТЕМЫ ТОНКИХ ДУГ УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Б. Л. Голинский

I

В работе дан вывод формул для подъемной силы и момента при обтекании системы дуг, мало отличающихся от дуг одной окружности:

1) в случае безграничного потока и

2) в случае полубезграничного потока, ограниченного горизонтальной стеной, на которой лежит центр круговых дуг. При выводе указанных формул применяется метод тонкого крыла и формулы обращения сингулярных интегралов, найденные Н. И. Ахиезером (1).

П. 1. Пусть L — неподвижная замкнутая кривая, а L_k, $k=1, 2, \dots N$ дуги, принадлежащие L.

Рассмотрим обтекание системы дуг $\{L_k\}_1^N$ (которую будем для кратности обозначать также буквой L) потоком, имеющим на бесконечности скорость с проекциями u_0, v_0. Пусть в потоке имеются также вихревые точки, расположенные на некоторых линиях C_r $(r=1, 2, \dots m)$, являющихся таким образом некоторыми свободными линиями разрыва тангенциальной составляющей скорости.

Дуги L_k, заменяющие профили крыльев, также являются линиями разрыва тангенциальной составляющей скорости и поэтому также могут быть заменены некоторым распределением выхревых точек, но эти вихри уже будут свободными и могут быть названы присоединенными.

Скорость в любой точке жидкости получается в результате сложения скоростей, вызванных 1) потоком на бесконечности, 2) присоединенными вихрями и 3) свободными вихрями. Назовем через $g(z)$ линейную плотность присоединенных вихрей, а через $k(z)$ — свободных вихрей, причем если $z \bar{\in} L_k$, $k=1, 2, \dots N$, то $g(z)=0$.

Пусть точка $z=x+iy$ пробегает против стрелки часов кривую L, уравнение которой есть $z=z(s)$, где s — дуга, отсчитываемая от некоторой точки на L.

Нормаль к L имеет направляющие косинусы $-\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$, и если в некоторой точке дуги L_k комплексная скорость течения равна $u-iv$, то проекция скорости на нормаль в этой точке будет

$$-u\frac{dy}{ds}+v\frac{dx}{ds}=Re\left\{i\frac{dz}{ds}(u-iu\right\}.$$

Записывая, что полная нормальная скорость в точке z дуги L_k равна нулю, получим следующее уравнение

$$Re\left\{i\frac{dz}{ds}w^*\right\}_L=u_0\frac{dy}{ds}-v_0\frac{dx}{ds}, \tag{1.1}$$

где w^* — комплексная скорость за счет присоединенных и свободных вихрей, а $\{\ \}_L$ означает, что содержимое скобок берется для точек на L.

Пусть L' — неподвижная замкнутая кривая, а L'_k $k=1, 2, \ldots N$ дуги, принадлежащие L', имеющие общие концы с L_k и мало отличающиеся от последних.

Точку ζ' из L'_k назовем соответствующей для точки ζ из L_k, если она лежит на нормали к L_k в точке ζ. Пусть точка $\zeta'=x'+iy'$ пробегает кривую L' против стрелки часов, уравнение которой есть $z'=z'(s)$, где s — дуга, отсчитываемая по кривой L.

Совершим линеаризацию уравнения (1.1), взяв левую часть на L' (считаем, что набор присоединенных вихрей расположен на L'), а правую часть оставим без изменения (чем приближенно учитываем форму дуги), после чего получим

$$\frac{1}{2\pi} Re\left\{\frac{dz'}{ds}\int'_{L'}\frac{g(\zeta)}{z'-\zeta}\,|\,d\zeta\,|\right\}+\frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{m} Re\left\{\frac{dz'}{ds}\int_{Cr}\frac{K(\zeta)}{z'-\zeta}\,|\,d\zeta\,|\right\}=F(s), \quad (1.2)$$

где

$$F(s)=\begin{cases} u_0\dfrac{dy}{ds}-v_0\dfrac{dx'}{ds} \text{ для точек на } L_k,\ k=1, 2, \ldots N, \\ 0 \text{ для точек на } L, \text{ не принадлежащих } L_k,\ k=1, 2, \ldots N, \end{cases} \quad (1.3)$$

причем штрих у знака интеграла означает, что интеграл рассматривается как главное значение в смысле Коши. Кроме того, следует помнить о том, что в заднем носике каждой из дуг L_k функция $g(z)$ обращается в нуль как $\sqrt{z-z_0}$, а в переднем — в бесконечность, как $\dfrac{1}{\sqrt{z-z_0}}$. Этим соображением, а также соображением формального порядка, связанного с применением специальных формул обращения, мы воспользуемся для расщепления вихревой плотности на функцию особенностей и непрерывную часть.

В работе рассмотрен случай, когда L' имеет уравнения

$$x'=R\cos t,\ y'=R\sin t,$$

а L имеет уравнения

$$x=R\cos t,\ y=\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ мало отличается от y', а в $2N$ точках $\{\alpha_k\}_1^N$, $\{\beta_k\}_1^N$ совпадает с y'.

Назовем систему интервалов $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_1^N$,

где

$$\alpha_1<\beta_k<\beta_N<2\pi, \text{ через } E.$$

П. 2. С математической точки зрения в основе применяемого нами метода тонкого крыла лежат некоторые формулы обращения, полученные Н. И. Ахиезером в работе (1). Все они имеют следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int'_{E} p(t)\,\omega(x-t)\,\gamma(t)\,dt+A \quad (1.4)$$

$$\gamma(x)=\frac{1}{\pi}\int_E' q(t)\,\omega(t-x)\,f(t)\,dt+B, \tag{1.5}$$

где E — один интервал или некоторая система интервалов,
A и B — некоторые константы, x принадлежит E,

$p(x)$ — некоторая неотрицательная функция, $q(x)=\dfrac{1}{p(x)}$, $\omega(z)$ некоторая аналитическая функция, имеющая полюс 1-го порядка в точке $z=0$.

Штрих у знака интеграла означает, что интеграл берется, как главное значение в смысле Коши. Если первую формулу (1.4) рассматривать как уравнение относительно $\gamma(x)$, то вторая формула (1.5) дает решение этого уравнения.

Рассмотрим только два случая, которыми мы воспользуемся в работе.

(*а*) E есть система N конечных интервалов $(a_1 b_1)\ldots(a_N b_N)$

$$p(x)=\sqrt{-\prod_{k=1}^{N}\frac{x-b_k}{x-a_k}},\quad \omega(z)=\frac{1}{z},\quad A=B=0 \tag{1.6}$$

(*б*) E есть система интервалов $(\alpha_1,\beta_1)\ldots(\alpha_N,\beta_N)$, где

$$0<\alpha_1<\beta_k<\beta_N<2\pi$$

$$p(x)=\sqrt{-\prod_{k=1}^{N}\frac{\sin\dfrac{x-\beta_k}{2}}{\sin\dfrac{x-\alpha_k}{2}}},\quad \omega(z)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2},\quad q(x)=\frac{1}{p(x)}. \tag{1.7}$$

A и B находятся из соотношений

$$A\sin\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_E q(x)f(x)\,dx-\frac{\cos\sigma}{2\pi}\int_E p(x)\gamma(x)\,dx \tag{1.8}$$

$$B\sin\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_E p(x)\gamma(x)\,dx-\frac{\cos\sigma}{2\pi}\int_E q(x)f(x)\,dx, \tag{1.9}$$

причем

$$\sigma=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k). \tag{1.10}$$

2

Рассмотрим обтекание системы дуг L потоком, в котором отсутствуют свободные вихри.

Пусть комплексная скорость потока на бесконечности будет $V_0 e^{-i\alpha}$. Интегральное уравнение обтекания (1.2), если воспользоваться тождеством

$$\frac{2ie^{ix}}{e^{it}-e^{ix}}=\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}-i, \tag{2.1}$$

запишется так

$$\frac{1}{2\pi}\int_E g(t)\,\mathrm{ctg}\,\frac{x-t}{2}\,dt = f(x), \tag{2.2}$$

где $f(x)$ согласно (1.3) имеет значение

$$f(x) = \begin{cases} V_0\left(\cos\alpha\,\dfrac{\varphi'(x)}{R} + \sin\alpha\sin x\right) & \text{для } x \in E \\ 0 & \text{для } x \bar{\in} E \end{cases}. \tag{2.3}$$

Заметим, что если L совпадает с L', то

$$f(x) = V_0\cos(\alpha - x). \tag{2.4}$$

Вихревую плотность $g(t)$ на основании вышесказанного будем искать в виде $g(t) = p(t)\gamma(t)$, где $p(t)$ имеет значение (1.6), а $\gamma(t)$—непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на концах интервалов, образующих E.

Из уравнения (2.2) следует, что в формуле (1.4) нужно положить $A = 0$ и тогда из (1.8) следует, что

$$\int_E p(x)\gamma(x)\,dx = \frac{1}{\cos\sigma}\int_E q(x) f(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Из (2.5), (1.9) и (1.5) следует, что

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_E q(t) f(t)\,\mathrm{ctg}\,\frac{t-x}{2}\,dt + \frac{\mathrm{tg}\,\sigma}{2\pi}\int_E q(t) f(t)\,dt, \tag{2.6}$$

где $q(t) = \dfrac{1}{p(t)}$, $p(t)$ имеет значение (1.7), а σ — значение (1.10). Для определения подъемной силы воспользуемся теоремой Н. Е. Жуковского $P = \rho V_0 \Gamma$, где Γ — суммарная вихревая плотность. На основании (2.5) получим

$$P = \rho\frac{V_0 R}{\cos\sigma}\int_E q(t) f(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Случай, когда E есть интервал (α, β), был рассмотрен Н. И. Ахиезером в [2].

Заметим, что формула (2.7) становится точной, когда $f(t)$ имеет значение (2.4), и тогда мы получаем

$$P = \frac{4\pi\rho R V_0^2}{\cos\sigma}\cdot r_1^*\cos(\alpha - \lambda_1^*), \tag{2.8}$$

где $r_1^* = \sqrt{a_1^{*2} + b_1^{*2}}$, $\mathrm{tg}\,\lambda_1^* = \dfrac{b_1^*}{a_1^*}$, a_i^*, b_i^* — первые коэффициенты Фурье функции $q(t)$.

Подставив их значения[1] в (2.8), найдем

$$P = \frac{\pi\rho R V_0^2}{\cos\sigma}\sum_{k=1}^{N}\left[\sin(\sigma + \alpha_k - \alpha) - \sin(\sigma + \beta_k - \alpha)\right]. \tag{2.9}$$

---

[1] $c_1^* = a_1^* + i b_1^* = \dfrac{i}{4}e^{i\sigma}\sum_{k=1}^{N}\left(e^{i\beta_k} - e^{i\alpha_k}\right)$.

Формула (2.9) может быть легко преобразована в формулу (3,4) из (4). Для одиночной дуги с $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \tau, \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \tau$

$$P = 4\pi\rho P V_0^2 \sin\frac{\tau}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\tau}{2}\right).$$

Для определения главного момента воспользуемся 2-й формулой С. А. Чаплыгина. После простых преобразований ее получим

$$M_0 = \rho R^2 V_0 \int\limits_E p(x) \gamma(x) \cos(x - \alpha)\, dx, \tag{2.10}$$

где $q(x)$ имеет значение (1.7), $f(x)$ — значение (2.3), а

$$R(x) = \operatorname{tg}\sigma(a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha) + l_1(x)\cos\alpha + m_1(x)\sin\alpha, \tag{2.12}$$

σ имеет значение (1.10), a_1, b_1 — первые коэффициенты Фурье функции $p(x)$; l_1, m_1—первые коэффициенты Фурье функции $p(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}$

Подставив их значения[1]) в (2.12), найдем

$$R(x) = K - \cos(x - \sigma - \alpha), \tag{2,13}$$

где

$$K = \frac{r_1}{\cos\sigma} \cdot \sin(\lambda_1 + \sigma - \alpha),\ r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^3},\ \operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{b_1}{a_1}.$$

Формула (2.10) становится точной, когда $f(x)$ имеет значение (2.4). После несложных преобразований получим

$$M_0 = 2\pi\rho R^2 V_0^2 \{2Kr_1^* \cos(\alpha - \lambda_1^*) - r_2^* \cos(\sigma + 2\alpha - \lambda_2^*) + a_0^* \cos\sigma\}, \tag{2.14}$$

где

$$r_i^* = \sqrt{a_i^{*2} + b_i^{*2}},\ \operatorname{tg}\lambda_i^* = \frac{b_i^*}{a_i^*}\ (i = 1, 2),\ a_i^*,\ b_i^* —$$

коэффициенты Фурье функции $q(x)$[2]).

---

[1]) $c_1 = a_1 + ib_1 = \frac{i}{4}\, e^{-i\sigma} \sum\limits_{k=1}^{N} (e^{i\alpha_k} - e^{i\beta_k}).$

Если

$$\lambda_k(x) = l_k(x) + im_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_E p\ (t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2} e^{ikt}\, dt,$$

то справедлива рекурентная формула

$e^{ix}(\lambda_{k-1} - ic_{k-1}) = \lambda_k + ic_k$. При $k = 1$ имеем

$e^{ix}(\lambda_0 - ic_0) = \lambda_1 + ic_1$, так как $\lambda_0 = \cos\sigma$, то

$\lambda_1 x = e^{i(x-\sigma)} - ic_1$ и $l_1 = \cos(x - \sigma) + b_1$, $m_1 = \sin(x - \sigma)a_1$.

[2]) $$c_2^* = a_2^* + ib_2^* = \frac{i}{4} e^{i\sigma} \left\{ \sum_{k \neq j} e^{i(\alpha_k + \alpha_j)} - \sum_{k \neq j} e^{i[\beta_k + \beta_j)} \sum_{kj=1}^{N} e^{i(\beta_k + \alpha_j)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k,j=1}^{N} e^{i(\beta_k + \beta_j)} - \frac{1}{4} \sum (e^{i\beta_k} - e^{i\alpha_k})^2 \right\}.$$

Полная комплексная скорость потока будет

$$w(z) = V_0 e^{-i\alpha} + w^*(z),$$

где

$$w^*(z) = \frac{R}{2\pi i}\int_E \frac{g(x)\,dx}{z - Re^{ix}},\ g(x) = p(x)\cdot\gamma(x). \tag{2.15}$$

Подставим в (2.15) вместо $\gamma(x)$ его значение (2.6), применим тождество (2.1), в котором $e^{ix} = \zeta$, $e^{it} = \zeta_0$ и положим

$$p(x) = -ie^{-i\sigma}\,\Omega(\zeta),\ \text{где}\ \Omega(\zeta) = \sqrt{\prod_{k=1}^{N}\frac{\zeta - e^{i\beta_k}}{\zeta - e^{i\alpha_k}}}, \tag{2.16}$$

а $\sigma = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k)$, после чего получим

$$w^*(z) = A(\operatorname{tg}\sigma + i)\cdot\frac{e^{-i\sigma}}{2\pi i}\int_L' \frac{\Omega(\zeta)\,d\zeta}{\left(\zeta - \frac{z}{R}\right)\zeta} +$$

$$+\frac{ie^{-i\sigma}}{2\pi}\int_E\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L' \frac{\Omega(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta_0 - \zeta)\left(\zeta - \frac{r}{R}\right)}\right\} q(x) f(x)\,dx, \tag{2.17}$$

где $A = \frac{1}{2\pi}\int_E f(t)\,q(t)\,dt$ $f(t)$ имеет значение (2.3), q — значение (1.7).

Штрих Y знака интеграла означает, что он берется как главное значение в смысле Коши.

Для вычисления этих интегралов применим формулу Коши и предельную теорему Сохоцкого-Привалова, в результате чего (2.17) представится

$$w^*(z) = A\gamma(\operatorname{tg}\sigma + i)\,e^{i-\sigma}\frac{1}{2\frac{r}{R}}\left[\Omega\left(\frac{r}{R}\right) - \Omega(0)\right] +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\,e^{-i\sigma}\Omega\left(\frac{z}{R}\right)\int_E \frac{q(x) f(x)}{e^{xi} - \frac{z}{R}}\,dx. \tag{2.18}$$

Введем функцию

$$F_0(z) = \frac{1}{R}\left[\frac{\Gamma}{2\pi i} - 2zw^*(z)\right], \tag{2.19}$$

где $\Gamma = R\int_E p(x)\,\gamma(x)\,dx$ — суммарная вихревая плотность. На основании (2.15)

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{R^{ix} + z}{Re^{ix} - z}\,g(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Подставим в (2.19) значение $w^*(z)$ из (2.18) и воспользуемся тем, что

$$\Omega(0) = e^{2i\sigma},\ \text{а}\ \frac{\Gamma}{2\pi R} = \frac{A}{\cos\sigma}$$

(равенство 2.1), тогда

$$F_0(z) = e^{-i\sigma} \cdot \Omega\left(\frac{z}{R}\right)\left\{-A\,\mathrm{tg}\,\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\, q(t)\, f(t)\, dt\right\}. \quad (2.21)$$

Найдя $F_0(z)$ из (2.21), определим скорость $w_0^*(z)$ из (2.19).

Замечание. Пусть $f(x)$ — любая функция и $f(x)\,q(x)$ суммируемая на $E\{(\alpha_k, \beta_k)\}_1^N$.

Перейдем к пределу в (2.21) при $z \to Re^{ix} (x \in E)$, тогда

$$\lim_{z \to Re^{ix}} Re\, F_0(z) = f(x).$$

Из (2.20) следует, что

$$\lim_{z \to \infty} F_0(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi R i}$$

и функция

$$F(z) = F_0(z) + \frac{\Gamma}{2\pi R i} + C\Omega\left(\frac{z}{R}\right),$$

где C — вещественная постоянная, решает краевую задачу типа Келдыша-Седова [1].

Рассмотрим поток в верхней полуплоскости, обтекающий систему дуг L_k' с центром на вещественной оси. Применяя принцип зеркального отображения особенностей, мы должны в уравнении (1.2) в качестве линий свободных вихрей C_r взять зеркальное отображение L_k' относительно вещественной оси и положить $k(\bar{\zeta}) = -g(\zeta)$.

После несложных преобразований уравнение (1.2) можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_E' g(t)\, \frac{\sin t}{\cos t - \cos x}\, dt = f(x), \quad (3.1)$$

где $f(x)$ имеет значение (2.3) $c\alpha = \pi$, а $E = \{(\alpha_k, \beta_k)\}_1^N$. Интегральное уравнение (3.1) легко разрешить относительно $g(t)$, если привести его к случаю (a) формулы (1.4). Для этого сделаем подстановку

$$\tau = R\cos t, \ \xi = R\cos x$$

и положим $g(Re^{it}) = p(\tau)\,\gamma(\tau)$, где $p(\tau)$ имеет значение (1,6) а $a_k b_k$ — проекции крайних точек L_k на ось x. При этой подстановке

$$f(x) = -\frac{V_0}{R}\frac{d\varphi}{dx} = V_0 \frac{d\varphi}{d\xi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} = -F(\xi) \quad (3.2)$$

и уравнение (3.1) будет

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_S' \frac{p(\tau)\,\gamma(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau = F(\xi), \quad (3.3)$$

где $S = \{(a_k \cdot b_k)\}_1^N$.

---

[1] В (3) решена подобная задача для системы отрезков вещественной оси.

Применив к (3.3) формулу обращения (1.5) случай (a), найдем

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_S' q(\tau) \frac{F(\tau)}{\xi - \tau} d\tau, \tag{34}$$

где

$$q(\tau) = \frac{1}{p(\tau)}.$$

Когда L совпадает с L', $F(\xi) = \frac{V_0}{R}\xi$ и для $\gamma(\xi)$ получим [1]

$$\gamma(\xi) = -\frac{V_0}{R}\left(\xi + \frac{\sigma}{2}\right). \tag{3.5}$$

Комплексная скорость потока будет

$$w(z) = -V_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_E g(Re^{ix}) \frac{|d\zeta|}{z - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_E g(Re^{ix}) \frac{|d\zeta|}{z - \bar{\zeta}}$$

или

$$w(z) = -V_0 + \frac{R}{\pi} \int_S p(\xi)\gamma(\xi) \frac{d\xi}{(z - \zeta)(z - \xi)}, \tag{3.6}$$

где

$$\zeta = Re^{ix}, \quad x = \arccos \frac{\xi}{R}.$$

Подъемную силу найдем по 1-й формуле С. А. Чаплыгина, которая даст

$$Y = \rho \frac{RV_0}{\pi} \int_S I(\xi) p(\xi) \gamma(\xi) d\xi - \frac{\rho R^2}{2\pi^2} \iint_{SS} p(\xi) p(\eta) \gamma(\xi) \gamma(\eta) U(\xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{3.7}$$

где $I(\xi)$ и $U(\xi, \eta)$ легко вычисляются и дают

$$I = \int_C \frac{dz}{(z - \zeta)(z - \bar{\zeta})} = \frac{\pi}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}}}. \tag{3.8}$$

$$U = \int_C \frac{dz}{(z - \zeta)(z - \bar{\zeta_1})(z - \zeta_1)(z - \bar{\zeta_1})} =$$

$$= \frac{\pi z}{2R^3(\xi - \eta)} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2}}} - \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{R^2}}} \right], \tag{3.9}$$

где $\zeta_1 = Re^{i\psi}$, $\psi = \arccos \frac{\eta}{R}$, C — контур, охватывающий кривые L и L'.

---

[1] Интеграл $\frac{1}{\pi} \int_S' \frac{q(\tau)\, d\tau}{\tau - \xi} = \left(\xi + \frac{\sigma}{2}\right)$. $\sigma = \sum_{k=1}^{N} b_k - a_k$.

Подставив значения интегралов (3.8) и (3.9) в (3.7), полагая

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{R^2}}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\xi^{2n}}{R^{2n}},\ A_0=1,\ A_1=\frac{1}{2},A_n=\frac{1.3.5...2n-1}{2^n}\quad(3.10)$$

и вводя моменты $\mu_k=\int\limits_S p(\xi)\gamma(\xi)\xi^k d\xi$,

найдем для (3.7) выражение

$$Y=\rho V_0\left(\mu_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\mu^{2n}}{R^{2n}}\right)-\frac{\rho}{2\pi R}\left\{\mu_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{R^{2n}}(\mu_0\mu_{2n}+\mu_1\mu_{2n-1}+\ldots+\mu_{2n}\mu_0\right\}\quad(3.11)$$

Для определения момента подъемной силы относительно центра применим 2-ю формулу С. А. Чаплыгина, которая в этом случае даст

$$M_0=-Re\left\{-\rho\frac{V_0R}{\pi}\int\limits_S p(\xi)\gamma(\xi)I_1(\xi)d\xi+\frac{\rho R^2}{2\pi^2}\int\limits_S\int\limits_S p(\xi)p(\eta)\gamma(\xi)\gamma(\eta)U_1(\xi,\eta)d\xi d\eta\right\},\quad(3.12)$$

где $I_1(\xi)$ и $U_1(\xi,\eta)$ легко вычисляются и дают

$$I_4=\int\limits_C\frac{zdz}{(z-\zeta)(z-\bar\zeta)}=\frac{\pi}{\sin x}\cdot e^{ix},\ ReI_1=\pi\operatorname{ctg}x=\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{R^2}}}\quad(3.13)$$

$$U_1=\int\limits_C\frac{z\,dz}{(z-\zeta)(z-\bar\zeta)(z-\zeta_1)(z-\bar\zeta_1)}=$$

$$=\frac{\pi}{2R^2}\frac{1}{\xi-\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{R^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\eta^2}{R^2}}}\right\}.\quad(3.14)$$

Подставив в (3.12) значения интегралов (3.13), (3.14) и разложение (3.10), получим

$$M_0=\rho V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{R^{2n}}\mu_{2n+1}-\frac{\rho}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{R^{2n}}(\mu_0\mu_{2n}+\mu_1\mu_{2n-1}+\ldots+\mu_{2n}\mu_0).\quad(3.15)$$

Если L совпадает с L', то на основании (3.5)

$$\mu_k=-\frac{V_0}{R}\int\limits_S p(\xi)\left(\xi+\frac{\sigma}{2}\right)\xi^k d\xi=-\frac{V_0}{2R}(2\nu_{k+1}+\sigma\nu_k),\quad(3.16)$$

где

$$\nu_k=\int\limits_S p(\xi)\xi^k d\xi.$$

Для одиночной дуги с $a_1=1$, $b_1=-1$, имеем $\sigma=-2$

и

$$\nu_k=\int_{-1}^{1n}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\xi^k d\xi,\ \text{причем}\ \nu_0=\pi,\ \nu_{2k}=\nu_{2k-1}=\frac{\pi.1.3.5...2k-1}{2^k\ k!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Изв. АН СССР, т. IX, № 4, 1945, стр. 275—290.

2. Н. И. Ахиезер. О построении потока, обтекающего тонкий профиль. Збірник праць Ін-ту АН УССР, № 4, стр. 152—156.

3. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 270—275.

4. С. А. Чаплыгин. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. Полное собр. соч., т. II, изд. АН СССР, Л., 1933, стр. 266.