Г. С. ШПАК

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Обозначим через N класс аналитических функций, регулярных в области $|z|<1$, через $N_s \subset N$ — подкласс однолистных функций, и через $S \subset N$ — подкласс функций $\omega(z)$, удовлетворяющих в области $|z|<1$ неравенству $|\omega(z)|<1$.

Пусть функция $F(z;\ \rho) \in N_s$, зависящая от вещественного параметра $\rho (\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2)$, отображает круг $|z|<1$ на односвязную область $G(F;\ \rho)$ плоскости ξ. Полагаем, что $F(z; \rho)$, как функция параметра ρ, удовлетворяет следующим условиям:

1) она непрерывна на отрезке $[\rho_1, \rho_2]$;

2) если $\rho_1 \leqslant \rho' < \rho'' \leqslant \rho_2$, то $G(F;\ \rho') \subset G(G(F;\ \rho''))$;

3) если точка $\zeta_0 \in G(F; R)$, $(\rho_1 < R \leqslant \rho_2)$, но $\zeta_0 \overline{\in}\ G(F;\ \rho_1)$, то всегда найдется единственное значение ρ^* $(\rho_1 < \rho^* < R)$, при котором точка ζ_0 окажется на границе области $G(F;\ \rho^*)$.

Рассмотрим функцию $f(z) \in N$ построенную следующим образом:

$$f(z) = F[\omega(z); \rho], \quad |z| \leqslant 1, \tag{1.1}$$

где $\omega(z) \in S$. Если обозначим через $G(f)$ область значений функции $f(z)$ при $|z|<1$, то $G(f) \subset G\ (F;\ \rho)$. Функцию $f(z)$ будем называть п о д ч и н е н н о й в круге $|z|<1$ функции $F(z;\ \rho)$, а последнюю — м а ж о р а н т о й по отношению к первой и будем обозначать это так:

$$f(z) \prec F(z;\ \rho).$$

Понятие подчиненной функции, введенное Литтльвудом [1], широко применялось Рогозинским ([2], [3]), Голузиным [4] и другими математиками. Рогозинский [2] ввел в рассмотрение мажоранту, линейно зависящую от вещественного параметра. Наш выбор мажоранты является более общим.

Рассмотрим следующие проблемы коэффициентов:

I. *Даны комплексные числа* $\{b_к\}_0^n$; *найти условия того, чтобы эти числа могли быть первыми коэффициентами разложения в ряд Маклорена некоторой функции* $f(z) \in N$, *которая в области* $|z|<1$ *должна иметь мажорантой заданную функцию* $F(z;\ R) \in N_s$ $(\rho_1 \leqslant R \leqslant \rho_2)$.

II. *При выполнении этих условий найти число* $\rho' \leqslant R$, *являющееся нижней гранью тех значений* ρ, *при которых возможно подчинение*

$$f(z) \prec F(z;\ \rho')$$

Вторая проблема является обобщением задачи Каратеодори-Фейера [5], а также задачи Ахиезера-Крейна [6] о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, когда область $G(F;\rho)$ есть круг радиуса ρ в первом случае и полоса ширины 2ρ, симметрично расположенная относительно одной из координатных осей, — во втором.

§ 1. Условия, необходимые для подчинения

В единичном круге справедливы разложения

$$f(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} b_\kappa z^\kappa, \tag{1.2}$$

$$\zeta=F(z;\ \rho)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} A_\kappa(\rho)z^\kappa, \tag{1.3}$$

где $\{A_\kappa(\rho)\}_0^\infty$ являются известными непрерывными функциями параметра ρ. В некоторой окрестности точки $\zeta_0=A_0(\rho)$ справедливо разложение обратной функции

$$z=F^{-1}(z;\ \rho)=\varphi(\zeta;\ \rho)=\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa(\rho)(\zeta-\zeta_0)^\kappa. \tag{1.4}$$

Подставив ζ из (1.3), находим, сравнивая коэффициенты,

$$a_1(\rho)=\frac{1}{A_1(\rho)},\ \ a_2(\rho)=-\frac{A_2(\rho)}{A_1^3(\rho)},\ \ldots \tag{1.5}$$

Рассмотрим разложение функции

$$\omega(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\alpha_\kappa z^\kappa,\ |z|<1; \tag{1.6}$$

по (1.1) и (1.4)

$$\omega(z)=\varphi[f(z);\ \rho]=\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa(\rho)\,[f(z)-A_0(\rho)]^\kappa,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha_0=\varphi(b_0,\ \rho),\quad \alpha_1=b_1\varphi'(b_0,\ \rho),\\ \alpha_2=\frac{b_1^2}{2}\varphi''(b_0,\ \rho)+b_2\varphi'(b_0,\ \rho),\ \ldots\end{gathered} \tag{1.7}$$

Эти формулы значительно упрощаются, если $A_0(\rho)=A_0$ не зависит от ρ и если $b_0=A_0$; в этом случае, согласно (1.4), (1.5),

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\frac{b_1}{A_1(\rho)},\ \ \alpha_2=\frac{b_2A_1^2(\rho)-b_1^2\,A_2(\rho)}{A_1^3(\rho)},\ \ldots \tag{1.8}$$

Для того чтобы заданные числа $\{b_\kappa\}_0^n$ могли быть первыми коэффициентами Маклорена функции $f(z)$, подчиненной в области $|z|<|$ функции $F(z;\ \rho)$ при некотором фиксированном значении параметра, необходимо и достаточно, чтобы числа $\{\alpha_\kappa\}_0^n$ были первыми коэффициентами Маклорена функции $\omega(z)\in S$. Найденные по формулам (1.7) коэффициенты $\{\alpha_\kappa\}_0^n$ позволяют построить функцию $\omega(z)$, обеспечивающую выполнение условия (1.1).

Если

$$D_\kappa = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_\kappa \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{\kappa-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_0 \\ \bar{\alpha}_0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\alpha}_\kappa & \bar{\alpha}_{\kappa-1} & \ldots & \bar{\alpha}_0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.9}$$

то, как показал Шур [7], чтобы функция $\omega(z)$ могла принадлежать классу S, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1.\ D_0 > 0,\quad D_1 > 0, \ \ldots \ D_n > 0; \tag{1.10}$$

в этом случае можно построить бесчисленное множество функций $\omega(z) \in S$, имеющих одни и те же заданные первые коэффициенты $\{\alpha_\kappa\}_0^n$;

$$2.\ D_0 > 0, \ldots D_{\nu-1} > 0,\ D_\nu = D_{\nu+1} = \ldots = D_n = 0, \quad (\nu \leqslant n); \tag{1.11}$$

в этом случае можно построить единственную функцию $\omega(z) \in S$, причем она полностью определяется своими коэффициентами $\{\alpha_\kappa\}_0^\nu$ и имеет следующую форму:

$$\omega^*(z) = \frac{p_\nu(z)}{p_\nu^*(z)},\ p_\nu^*(z) = z^\nu \bar{p}_\nu\left(\frac{1}{z}\right), \tag{1.12}$$

где $p_\nu(z)$ — многочлен степени ν, все корни которого лежат в области $|z|<|$. Функцию $\omega^*(z)$ будем называть экстремальной. Она обладает тем свойством, что $|\omega(z)|=1$ для $|z|=1$, так что значения соответствующей функции $f^*(z)=F[\omega^*(z);\rho]$ заполняют область $G(F,\rho)$.

Теорема 1. *Чтобы функция $f(z) \in \mathrm{N}$ с заданными коэффициентами $\{b_\kappa\}_0^n$ могла быть подчинена в области $|z|<|$ функции $F(z;R) \in \mathrm{N}_s$,*

$$F(z;R) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_\kappa(R) z^\kappa,\quad \rho_1 \leqslant R \leqslant \rho_2,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий: при $n=0$ должно выполняться неравенство

$$|\varphi(b_0,R)| \leqslant 1,\quad \varphi = F^{-1}; \tag{1.13}$$

если $|\varphi(b_0,R)|=1$, то экстремальная функция такова: $f^*(z)=b_0$.

Прц $n=1$, кроме (1.13) со знаком неравенства, должно выполняться условие

$$|b_1| \leqslant \frac{1-|\varphi(b_0,R)|^2}{|\varphi'(b_0,R)|}; \tag{1.14}$$

если здесь имеет место знак равенства, то экстремальная функция такова:

$$f^*(z) = F\left\{\frac{b_1\varphi'(b_0,R)z + \varphi(b_0,R)|b_1\varphi'(b_0,R)|}{|b_1\varphi'(b_0,R)| + b_1\varphi'(b_0;R)\bar{\varphi}(b_0,R)z};R\right\} \tag{1.15}$$

В частности, если $b_0=A_0$, $\varphi(b_0, R)=0$, условие (1.14) приобретает вид

$$|b_1|\leqslant|A_1(R)|; \tag{1.16}$$

в случае равенства экстремальная функция

$$f^*(z)=F\left(\frac{b_1 z}{A_1};\ R\right). \tag{1.17}$$

При $n=2$ и $b_0=A_0$, кроме (1.16) со знаком неравенства, должно выполняться условие

$$\left|\frac{b_2}{A_1}-\frac{A_2 b_1^2}{A_1^3}\right|\leqslant 1-\left|\frac{b_1}{A_1}\right|^2; \tag{1.18}$$

если здесь имеет место знак равенства, экстремальная функция такова:

$$\begin{gathered} f^*(z)=F\left(z\frac{\alpha_2 z+\alpha_1|\alpha_2|}{|\alpha_2|+\bar{\alpha}_1\alpha_2 z};\ R\right), \\ \alpha_1=\frac{b_1}{A_1},\quad \alpha_2=\frac{b_2}{A_1}-\frac{A_2 b_1^2}{A_1^3}, \end{gathered} \tag{1.19}$$

Для доказательства воспользуемся критерием Шура. При $n=0$ имеем условие $D_0=1-|\alpha_0|^2\geqslant 0$, т. е.

$$|\alpha_0|=|\varphi(b_0, R)|\leqslant 1. \tag{1.20}$$

Число b_0 может быть выбрано произвольно, лишь бы соответствующая ему точка плоскости ζ лежала в области $\overline{G}(F, R)$. Если в (1.20) имеет место знак равенства, точка, соответствующая числу $b_0=F(\alpha_0, R)$, взята на границе области; тогда по (1.12) имеем

$$\omega^*(z)=\alpha_0,\ f^*(z)=b_0.$$

Если же в (1.20) имеет место строгое неравенство, т. е. аффикс числа b_0 лежит внутри области $G(F; R)$, для выбора b_1 имеем условие

$$D_1=(1-|\alpha_0|^2)^2-|\alpha_1|^2\geqslant 0$$

или

$$|\alpha_1|\leqslant 1-|\alpha_0|^2. \tag{1.21}$$

Используя формулы (1.7), получаем неравенство (1.14). Если в нем имеет место знак равенства, (1. 12) нам дает

$$\omega^*(z)=\frac{c_0 z+c_1}{\bar{c}_0+\bar{c}_1 z}=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots,$$

откуда следует

$$\omega^*(z)=\frac{\alpha_1 z+\alpha_0|\alpha_1|}{|\alpha_1|+\bar{\alpha}_0\alpha_1 z}. \tag{1.22}$$

Воспользовавшись соотношениями (1.7) и (1.1), получим (1.15).

В частном случае, когда $b_0=A_0$, $\alpha_0=\varphi(b_0, R)=0$, условие (1.13) всегда будет выполнено. При $n=1$ неравенство (1.21) по формулам (1.8) приобретает вид (1.16). Если же в (1.16) имеет место знак равенства, то по (1.22) и (1.8) $\omega^*(z)=\dfrac{b_1 z}{A_1(R)}$, что и доказывает (1.17).

Наконец, при $n=2$ в нашем частном случае, если в (1.16) имеем строгое неравенство, условие Шура дает

$$D_2=(1-|\alpha_1|^2)^2-|\alpha_2|^2\geqslant 0, \tag{1.23}$$

что нетрудно по формулам (1.8) преобразовать к виду (1.18).

Если в (1.16) имеет место неравенство, а в (1.18) — равенство, по формуле (1.12)

$$\omega^*(z)=\frac{c_0z^2+c_1z+c_2}{\bar{c}_0+\bar{c}_1z+\bar{c}_2z^2}=\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots,$$

где $c_2=0$, так как $\omega^*(0)=0$. Определив коэффициенты $a_к$ из разложения в ряд, получим

$$w^*(z)=z\frac{\alpha_2z+\alpha_1|\alpha_2|}{|\alpha_2|+\bar{\alpha}_1\alpha_2z},$$

что, согласно (1.1), дает (1.19)

§ 2. Определение экстремальной области

Рассмотрим теперь вторую задачу. Пусть числа $\{b_к\}_0^n$ выбраны так, что при значении $\rho=R$ выполнены условия (1.10). Это значит, что можно построить бесчисленное множество функций $f(z)\in N$ имеющих заданные первые коэффициенты $\{b_к\}_0^n$, для которых функция $F(z;R)$ является мажорантой. Будем непрерывно уменьшать параметр ρ, начиная со значения $\rho=R$, и будем искать $\rho'=\inf\rho$ при условии $f(z)\prec F(z,\rho)$. Затем рассмотрим подчинение $f(z)\prec e^{i\alpha}F(z;\rho), 0\leqslant\alpha<2\pi$. Считая ρ' функцией от α, найдем $\rho''=\min\rho'(\alpha)$. Тогда имеет место

Теорема 2. *Функция $f(z)\in N$, имеющая заданные первые коэффициенты Маклорены $\{b_к\}_0^n$, может быть подчинена в области $|z|<1$ функции $F(z,\rho)$ лишь при условии $\rho\geqslant\rho'$, где ρ' — наибольший корень уравнения,*

$$D_n(\rho)=0. \tag{2.1}$$

Если $\{D_к\}_\nu^n=0$, то $f^*(z)=F[\omega^*(z);\rho']$, где функция

$$\omega^*(z)=\frac{p_\nu(z)}{p_\nu^*(z)},\quad p_\nu^*(z)=z^\nu\bar{p}_\nu\left(\frac{1}{z}\right)$$

полностью определяется коэффициентами $\{b_к\}_0^\nu$.

Подчинение

$$f(z)\prec e^{i\alpha}F(z;\rho),\quad 0\leqslant\alpha<2\pi \tag{2.2}$$

невозможно ни при каком α, если $\rho<\rho''$, где $\rho''=\min\rho'(\alpha)$. Если, в частности, $b_0=A_0=0$, то при задании b_1 ρ'' — наибольший корень уравнения

$$|A_1(\rho)|=|b_1|; \tag{2.3}$$

а при этом произвольно, экстремальная функция такова:

$$f^*(z) = e^{i\alpha} F\left[\frac{b_1 e^{-i\alpha}}{A_1(\rho'')} z;\ \rho''\right] \tag{2.4}$$

при задании коэффициентов b_1, b_2, $\rho'' = \min \rho'(\alpha)$, *где* $\rho'(\alpha)$ — *наибольший корень уравнения*

$$\left|\frac{b_2}{A_2(\rho)} - \frac{b_1^2 A_2(\rho)}{A_1^3(\rho)} e^{-i\alpha}\right| = 1 - \left|\frac{b_1}{A_1(\rho)}\right|^2; \tag{2.5}$$

значение α *соответствует минимальному значению* $\rho'(\alpha)$; *экстремальная функция такова:*

$$f^*(z) = e^{i\alpha} F\left(z \frac{\alpha_2 z + \alpha_1 |\alpha_2|}{|\alpha_2| + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 z};\ \rho''\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{b_1 e^{-i\alpha}}{A_1(\rho)}, \quad \alpha_2 = \frac{A_1^2(\rho'') b_2 e^{-i\alpha} - b_1^2 A_2(\rho'') e^{-2i\alpha}}{A_1^3(\rho'')}, \tag{2.6}$$

Условие $D_0(R) > 0$ показывает, что аффикс числа b_0 лежит внутри области $G(F; R)$; если он лежит вне области $G(F; \rho_1)$, то по второму и третьему свойствам функции $F(z; \rho)$ существует такое значение $\rho^* (\rho_1 < \rho^* < R)$, при котором аффикс b_0 лежит на границе области $G(F; \rho^*)$, т. е. уравнение $D_0(\rho) = 0$ имеет корень ρ^*.

Будем уменьшать ρ от R до ρ^*[1]. Определители $\{D_k(\rho)\}_0^n$ положительны при $\rho = R$ и являются непрерывными функциями от ρ. Пусть $\rho'(\rho_1 < \rho^* \leqslant \rho' < R)$ — наибольшее значение параметра, при котором хоть один из определителей обращается в нуль. Полагаем $D_\nu(\rho') = 0$ $(0 \leqslant \nu \leqslant n)$. По выбору ρ' все остальные определители не могут быть отрицательными при $\rho = \rho'$. Но в силу теоремы Шура будут равны нулю определители $\{D_k\}_{\nu+1}^n$, т. е. ρ' является наибольшим корнем уравнения $D_n(\rho) = 0$. Из сказанного следует, что $\omega(z)$ определяется формулой (1.12). Значение $\rho = \rho'$ уменьшить нельзя.

Возьмем теперь в качестве мажоранты функцию $e^{i\alpha} F(z; \rho)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Рассматривая ρ' как функцию от α, будем искать $\rho'' = \min \rho'(\alpha)$. Так как из условия подчинения вытекает соотношение

$$e^{i\alpha} f(z) = F[\omega(z); \rho], \tag{2.7}$$

то во всех предыдущих формулах достаточно заменить $\{b_k\}$ на $\{e^{-i\alpha} b_k\}$. Решение уравнения (2.1) дает нам в этом случае $\rho' = \rho'(\alpha)$.

Пусть $b_0 = A_0 = 0$; тогда из (2.7) следует, что $F(\alpha_0, \rho) = 0$. Но так как функция $F(z; \rho)$ однолистная, то $\alpha_0 = 0$. По (1.8)

$$\alpha_1 = \frac{b_1 e^{-i\alpha}}{A_1(\rho)}, \quad \alpha_2 = \frac{A_1^2(\rho) b_2 e^{-i\alpha} - A_2(\rho)_1^2 e^{-2i\alpha}}{A_1^3(\rho)}. \tag{2.8}$$

При задании b_1 ρ' ищем как наибольший корень уравнения $|\alpha_1| = 1$;

$$|A_1(\rho)| = |b_1|.$$

[1] См. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [6, стр. 22], где это рассуждение приводится для области, являющейся полосой.

Очевидно, ρ' не зависит от α, так что $\rho''=\rho'$. Экстремальную функцию находим по формуле (1.17).

Если заданы коэффициенты b_1, b_2, то $\rho''=\min \rho'(\alpha)$, где $\rho'(\alpha)$, согласно (1.23) и (2.8), наибольший корень уравнения (2.5). Экстремальную функцию находим по формулам (1.19) и(2.8.)

§ 3.Оценка для максимума вещественной части при задании минимума

Теорема 3. *Если функция $f(z)=b_0+b_1z+\ldots \in N$ с заданными коэффициентами b_0, b_1 регулярна в круге $|z|<1$ и удовлетворяет неравенству $Rf(z)\geq -a$, то $\sup\limits_{|z|<1} Rf\geqslant(z)\rho'$, где ρ' — наибольший корень уравнения*

$$\frac{\pi|b_1|}{2(\rho+a)}=\sin\frac{\pi(Rb_0+a)}{\rho+a}; \tag{3.1}$$

знак равенства достигается только для экстремальной функции

$$f^*(z)=\frac{\rho'-a}{2}-\frac{\rho'+a}{\pi}i\ln\frac{1+\omega^*(z)}{1-\omega^*(z)}; \tag{3.2}$$

$$\omega^*(z)=i\frac{b_1z+|b_1|\operatorname{tg}\lambda}{|b_1|+b_1z\operatorname{tg}\lambda},\quad \lambda=\frac{(2Rb_0-\rho'+a)\pi}{4(\rho'+a)};$$

если $b_1=0$, то $\rho'=Rb_0$ и $f^*(z)=b_0$.

Для доказательства в качестве мажоранты выберем функцию

$$\zeta=\frac{\rho-\alpha}{2}-\frac{\rho+a}{\pi}i\ln\frac{1+z}{1-z},\quad \rho>-a, \tag{3.3}$$

осуществляющую конформное отображение области $|z|<1$ на полосу $-a<R\zeta<\rho$; в (3.3) берем значение логарифма, обращающееся в нуль при $z=0$. Величину a считаем фиксированной.

Выражение обратной функции таково:

$$\varphi(\zeta;\rho)=i\operatorname{tg}\frac{\pi(2\zeta-\rho+a)}{4(\rho+a)}; \tag{3.4}$$

Не нарушая общности рассуждений, считаем b_0 вещественным. Из условия (1.13) в случае знака неравенства следует:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(2b_0-\rho+a)}{4(\rho+a)}\right|<1,$$

или $\rho>b_0$. Условие (1.14), взятое со знаком равенства, приводит к уравнению для нахождения ρ'

$$\frac{\pi|b_1|}{2(\rho+a)}=\cos\frac{\pi(2b_0-\rho+a)}{2(\rho+a)}, \tag{3.5}$$

из которого следует (3.1). Так как правая часть не может быть больше единицы, то

$$\rho'\geqslant\frac{\pi|b_1|}{2}-a; \tag{3.6}$$

знак равенства достигается, если так же $\rho'=2b_0+a$, т. е. при соотношении

$$|b_1|=\frac{4(b_0+a)}{\pi}.$$

Экстремальную функцию нетрудно получить, пользуясь формулами (1.15), (3.3), (3.4).

Если $b_1=0$, в (3.5) необходимо взять $\rho=b_0$.

§ 4. Оценка для модуля и аргумента аналитической функции при задании максимума одной из этих величин

Теорема 4. *Для функции $f(z)\in N$ заданы коэффициенты $b_0>0$, b_1; ($b_1\neq 0$)*

1) *если* $\arg\limits_{|z|<1} f(z)|<\varphi<\pi$, *где* φ *— заданная постоянная, то*

$$\sup_{|z|<1}|f(z)|\geqslant\rho'=b_0\left\{\frac{4b_0\varphi+\pi|b_1|}{4b_0\varphi-\pi|b_1|}\right\}^{\frac{\varphi}{\pi}}; \tag{4.1}$$

знак равенства достигается только для экстремальной функции

$$f^*(z)=\rho'\left\{\frac{i\omega^*(z)+1-\sqrt{2[1-\omega^{*2}(z)]}}{i\omega^*(z)-1}\right\}^{\frac{1}{\lambda}},\quad \lambda=\frac{\pi}{2\varphi},$$

$$\omega^*(z)=i\,\frac{e^{i\beta}z-K}{1-e^{i\beta}Kz},\quad K=\frac{b_0^{2\lambda}+2\rho'^{\lambda}b_0^{\lambda}-\rho'^{2\lambda}}{b_0^{2\lambda}-2\rho'^{\lambda}b_0^{\lambda}-\rho'^{2\lambda}};\quad \beta=\arg b_1; \tag{4,2}$$

2) *если* $b_0\dfrac{4b_0+|b_1|}{4b_0-|b_1|}\leqslant\sup\limits_{|z|<1}|f(z)|<\rho$,

где ρ *— заданная постоянная, то*

$$\sup_{|z|<1}|\arg f(z)|\geqslant\frac{\pi}{2x_0}\ln\frac{\rho}{b_0}, \tag{4,3}$$

где x_0 *— положительный корень уравнения*

$$\operatorname{th}x=\frac{|b_1|x}{4b_0\ln\frac{\rho}{b_0}}; \tag{4.4}$$

знак равенства имеет место только для экстремальной функции

$$f^*(z)=\rho\left\{\frac{i\omega^*(z)+1-\sqrt{2[1-\omega^{*2}(z)]}}{i\omega^*(z)-1}\right\}^{\frac{1}{\lambda}},\quad \lambda=\frac{x_0}{\ln\frac{\rho}{b_0}},$$

$$\omega^*(z)=i\,\frac{e^{i\beta}z-K}{1-e^{i\beta}Kz},\quad K=\frac{b_0^{2\lambda}+2b_0^{\lambda}\rho^{\lambda}-\rho^{2\lambda}}{b_0^{2\lambda}-2b_0^{\lambda}\rho^{\lambda}-\rho^{2\lambda}};\quad \beta=\arg b_1 \tag{4.5}$$

если $\sup\limits_{|z|<1}|f(z)|<b_0\dfrac{4b_0+|b_1|}{4b_0-|b_1|}$, то $\sup\limits_{|z|<1}|\arg f(z)|>\pi$.

Ряд последовательных отображений

$$z=\frac{z_1-i}{z_1+i},\quad z_1=\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2,\quad \zeta=e^{-i\varphi}w^{\frac{2\varphi}{\pi}}\ (0<\varphi<\pi)$$

осуществляет конформное отображение круга $|z|<1$ на сектор единичного радиуса $\arg\zeta|<\varphi$. Исключив z_1 и w, получим

$$z=-i\frac{\zeta^{2\lambda}+2\zeta^{\lambda}-1}{\zeta^{2\lambda}-2\zeta^{\lambda}-1},\quad \lambda=\frac{\pi}{2\varphi}; \tag{4.6}$$

выбираем значение ζ^{λ} вещественное и положительное вместе с ζ. Из (4.6) находим

$$\zeta=F(z)=\left\{\frac{iz+1-\sqrt{2(1-z^2)}}{iz-1}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \tag{4.7}$$

выделяем ту ветвь $F(z)$, для которой $F(\mathrm{o})=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{\lambda}}$ — вещественное положительное.

Рассмотрим в круге $|z|<1$ подкласс $N_{\pi}\subset N$ регулярных аналитических функций, удовлетворяющих условию $-\pi<\arg f(z)<\pi$. Пусть функция $f(z)=b_0+b_1z+\ldots\in N_{\pi}$, коэффициенты которой $b_0>0$, b_1 заданы, удовлетворяет условию

$$|\arg f(z)|<\varphi<\pi,\quad |z|<1.$$

Рассмотрим подчинение

$$f(z)\prec\rho F(z);$$

тогда $f(z)=\rho F[\omega(z)]$, откуда на основании (4.5)

$$\omega(z)=-i\frac{[f(z)]^{2\lambda}-2\rho^{\lambda}[f(z)]^{\lambda}-\rho^{2\lambda}}{[f(z)]^{2\lambda}-2\rho^{\lambda}[f(z)]^{\lambda}-\rho^{2\lambda}}.$$

Из этого соотношения находим

$$\alpha_0=-i\frac{b_0^{2\lambda}+2\rho_0^{\lambda}b_0^{\lambda}-\rho^{2\lambda}}{b_0^{2\lambda}-2\rho_0^{\lambda}b_0^{\lambda}-\rho^{2\lambda}},\quad \alpha_1=\frac{4ib_1\rho^{\lambda}(b_0^{2\lambda}+\rho^{2\lambda})b_0^{\lambda-1}}{(b_0^{2\lambda}-2\rho^{\lambda}b_0^{\lambda}-\rho^{2\lambda})^2} \tag{4.8}$$

Условие $|f(z)|<\rho$ означает, что $\frac{f(z)}{\rho}\in S$; следовательно, $\frac{b_0}{\rho}\leqslant 1$, т. е. $\rho\geqslant b_0$. Тогда условие (1.20) $|\alpha_0|\leqslant 1$ выполняется, причем строгое неравенство будет при $0<b_0<\rho$. Условие (1.21) приводит к соотношению

$$|b_1|\leqslant\frac{2}{\lambda}\frac{\rho^{2\lambda}-b_0^{2\lambda}}{\rho^{2\lambda}+b_0^{2\lambda}}b_0. \tag{4.9}$$

Отсюда следует оценка

$$|b_1|\leqslant\frac{4\varphi}{\pi}b_0. \tag{4.10}$$

В экстремальном случае, взяв в (4.9) знак равенства, находим

$$\rho' = b_0 \left\{ \frac{4\varphi b_0 + \pi|b_1|}{4\varphi b_0 - \pi|b_1|} \right\}^{\frac{\varphi}{\pi}}, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

что доказывает (4.1). Выражение экстремальной функции находим по формулам (1.22), (4.8). Так как ρ' — убывающая функция φ, то

$$\rho' \geqslant \rho'(\pi) = \frac{4b_0 + |b_1|}{4b_0 - |b_1|} b_0,$$

т. е. для функций подкласса N_π $\sup\limits_{|z|<1} |f(z)|$ не может быть меньше $\rho'(\pi)$.

Мы рассмотрели вопрос об оценке максимального модуля функции при заданном значении максимального модуля аргумента. Будем теперь считать ρ фиксированным, а $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ параметром. Пусть

$$|f(z)| < \rho, \quad \rho > \frac{4b_0 + |b_1|}{4b_0 - |b_1|} \cdot b_0, \quad |z| < 1. \tag{4.11}$$

Будем искать наименьшее значение $\varphi = \varphi'$, при котором возможно подчинение $f(z) \prec \rho(z; \varphi)$ для $f(z) \in N_\pi$, где $F(z; \varphi)$ определена формулой (4.7).

Из (4.9) в случае знака равенства

$$\frac{\pi|b_1|}{2\varphi b_0} = \frac{\left(\frac{\rho}{b_0}\right)^\lambda - \left(\frac{\rho}{b_0}\right)^{-\lambda}}{\left(\frac{\rho}{b_0}\right)^\lambda + \left(\frac{\rho}{b_0}\right)^{-\lambda}} = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2\varphi} \ln \frac{\rho}{b_0}\right);$$

обозначив $\frac{\pi}{2\varphi} \ln \frac{\rho}{b_0} = x$, приходим к уравнению (4.4), из которого должны найти наименьший положительный корень x_0; тогда $\varphi' = \frac{\pi}{2x_0} \ln \frac{\rho}{b_0}$.

Чтобы существовал корень $x_0 > 0$, необходимо и достаточно выполнение условия $|b_1| < 4b_0 \ln \frac{\rho}{b_0}$. В силу выбора ρ по (4.11) достаточно показать, что $\frac{|b_1|}{2b_0} < \ln \frac{4b_0 + |b_1|}{4b_0 - |b_1|}$, причем из (4.10) следует $0 < \frac{|b_1|}{b_0} < 4$. Обозначив $\frac{|b_1|}{2b_0} = \xi$, получаем эквивалентное неравенство $e^\xi < \frac{2+\xi}{2-\xi}$, $0 < \xi < 2$, справедливость которого нетрудно установить, разложив в ряды Маклорена левую и правую части.

Формулы (4.5) получаем точно так же, как и (4.2). Для функций $f(z) \in N$ удовлетворяющих условию (4.11), но не принадлежащих подклассу N_π, оценка (4.3) очевидна.

§ 5. Оценка для максимального модуля мнимой части при заданном максимальном модуле вещественной части

Теорема 5. *Если для функции $f(z) \in N$ коэффициенты которой* b_0, b_1 *заданы, справедливо неравенство*

$$-a < Rf(z) < a, \; |z| < 1, \tag{5.1}$$

то $\sup\limits_{|z|<1} |If(z)| \geqslant \rho'$, *где* ρ' — *наибольший положительный корень уравнения*

$$\frac{K|b_1|}{a} = \frac{2l \operatorname{sn} \lambda}{|\operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda|}, \quad \lambda = \frac{K(b_0 + i\rho)}{a}; \tag{5.1}$$

знак равенства достигается только для экстремальной функции

$$f^*(z) = \frac{a}{K} \operatorname{sn}^{-1}\left[i \frac{1 + \omega^*(z)}{1 - \omega^*(z)} \right] - i\rho',$$
$$\omega^*(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_0 |\alpha_1|}{|\alpha_1| + \bar{\alpha}_0 \alpha_1 z}, \tag{5.3}$$

$$\alpha_0 = \frac{i \operatorname{sn} \lambda + 1}{i \operatorname{sn} \lambda - 1}, \quad \alpha_1 = \frac{2Kb_1 \operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda}{ai(i \operatorname{sn} \lambda - 1)^2}, \quad \lambda = \frac{K(b_0 + i\rho')}{a};$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода; модуль $\varkappa$ *определяется из соотношения*

$$\frac{2\rho'}{b} = \frac{K'}{K}. \tag{5.4}$$

Как известно [8], функция $z_1 = \operatorname{sn}\dfrac{Ku}{a}$ осуществляет конформное отображение прямоугольника плоскости u с вершинами в точках $-a, a, a+bi, -a+bi$ $(a, b>0)$ на полуплоскость $Iz_1>0$, причем $\dfrac{b}{a} = \dfrac{K'}{K}$; выбрав $\rho = \dfrac{b}{2}$, с помощью отображений $\zeta = u - i\rho$, $z = i\dfrac{1+z}{1-z}$ получаем конформное отображение круга $|z|<1$ на прямоугольник $|R\zeta|<a$, $|I\zeta|<\rho$:

$$i\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{sn} \frac{K(\zeta + i\rho)}{a} \tag{5.5}$$

Пусть функция $f(z) \in N$, коэффициенты которой b_0, b_1 заданы, удовлетворяет неравенству (5.1). Из условия подчинения (1.1) на основании (5.5) имеем

$$i\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = \operatorname{sn} \frac{K[f(z) + i\rho]}{a},$$

откуда находим

$$\alpha_0 = \frac{i \operatorname{sn} \lambda + 1}{i \operatorname{sn} \lambda - 1}, \quad \alpha_1 = \frac{2Kb_1 \operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda}{ai(i \operatorname{sn} \lambda - 1)^2}, \tag{5.6}$$
$$\lambda = \frac{K(b_0 + i\rho)}{a}.$$

Выбрав $|Rb_0|<a$, $\rho>|Ib_0|$, обеспечиваем выполнение условия (1.20) $|\alpha_0|<|$; условие (1.21) дает

$$\frac{2K|b_1|}{a} \left| \frac{\operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda}{(i \operatorname{sn} \lambda - 1)^2} \right| \leqslant 1 - \left| \frac{i \operatorname{sn} \lambda + 1}{i \operatorname{su} \lambda - 1} \right|^2,$$

или, рассматривая экстремальный случай,

$$\frac{2K|b_1|}{a}|\operatorname{cn}\lambda\operatorname{dn}\lambda|=|i\operatorname{sn}\lambda-1|^2-|i\operatorname{sn}\lambda+1|^2,$$

и так как

$$|i\operatorname{sn}\lambda\pm 1|^2=|\operatorname{sn}\lambda|^2+1\mp 2I\operatorname{sn}\lambda,$$

мы получаем для нахождения ρ' уравнение (5.2) Выражение для экстремальной функции находим по формулам (1.22), (5.5), (5.6).

Нахождение ρ' как корня уравнения (5.2) весьма затруднительно. Рассмотрим один частный случай, когда b_0 вещественное; обозначим $\beta=\frac{b_0}{a}$, $\lambda=K\beta+\frac{iK'}{2}$; тогда ([8] табл. XIV, XV)

$$\operatorname{sn}\lambda=\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\frac{(1+\kappa)\operatorname{sn}K\beta+i\operatorname{cn}K\beta\operatorname{dn}K\beta}{1+\kappa\operatorname{sn}^2K\beta},$$

$$\operatorname{cn}\lambda=\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}}\frac{\operatorname{cn}K\beta-i\operatorname{sn}K\beta\operatorname{dn}K\beta}{1+\kappa\operatorname{sn}^2K\beta},$$

$$\operatorname{dn}\lambda=\sqrt{1+\kappa}\,\frac{\operatorname{dn}K\beta-i\kappa\operatorname{sn}K\beta\operatorname{cn}K\beta}{1+\kappa\operatorname{sn}^2K\beta};$$

$$|\operatorname{cn}\lambda\operatorname{dn}\lambda|=\frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}}\frac{1-\kappa\operatorname{sn}^2K\beta}{1+\kappa\operatorname{sn}^2K\beta},$$

и уравнение (5.2) запишем так:

$$\frac{K\beta}{2}\frac{|b_1|}{b_0}(1+\kappa)=\frac{\operatorname{cn}K\beta\operatorname{dn}K\beta}{1-\kappa\operatorname{sn}^2K\beta},\quad \beta=\frac{b_0}{a}. \tag{5.7}$$

При заданном β левая и правая части есть функции модуля κ. Удобнее получить выражения в функции h, где по (5.4) $h=e^{\frac{-\pi K'}{K}}=e^{\frac{-2\pi\rho}{a}}$.

По таблицам XI, XII [8]

$$\operatorname{sn}K\beta=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\beta}{2}\right)},\quad \operatorname{cn}K\beta=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\beta}{2}\right)},$$

$$\operatorname{dn}K\beta=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\beta}{2}\right)},\quad \kappa=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\quad K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0).$$

Подставив эти соотношения в (5.7), получим уравнение

$$\frac{\vartheta_0^2(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)[\vartheta_2^2(0)+\vartheta_3^2(0)]}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\beta}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\vartheta_1^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\pi\beta}{4}\frac{|b_1|}{b_0}, \tag{5.8}$$

из которого надо найти наименьший положительный корень h. Обозначив левую часть уравнения (5.8) $y(h)$, полагая $x = \frac{\pi\beta}{4}\frac{|b_1|}{b_0} - y(0)$, можно найти коэффициенты разложения

$$h^{\frac{1}{4}} = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

воспользовавшись рядами для ϑ-функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Littlewood J. E. On inequalities in the theory of functions. Proc. London. Math. Soc., 223, 481—519. (1925).
2. Rogosinski W. Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion. Schrift. Königsberg. Geb. Ges. Naturw. Klasse 8, 1—31, (1931).
3. Rogosinski W. Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie. Math. Zeitschr. 37, 210—236. (1933).
4. Г. М. Голузин. О мажорации подчиненных функций 1, Математ. сб. т. 29(71) вып. 1, 1951, стр. 209—223.
5. Carathéodory C. und Fejér L. Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard—Landauschen Satz. Rend. del Circolo Mat. di Palermo 32, 218—239, (1911).
6. Архиезер Н. И. и Крейн М. Г. Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem. Зап. Харьковского математ. о-ва, сер. 4, т. IX, 1934, стр. 9—28.
7. Schur J. Über Potenzreihen die in Innern des Einheitskreises bechränkt sind, Crelle, 147, 205—232, (1917).
8. Н. И. Архиезер. Элементы теории эллиптических функций. Гостехиздат, 1948.