МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Конспект лекцій з курсу «Елементарна математика»

Рівень вищої освіти: перший (молодший бакалавр)

Перший семестр: частина 1(до зміни розкладу)

Розробник: старший викладач каф. 405
Кальчук Н. Л

Харків «ХАІ» 2020

Лекція 1
Множини чисел (натуральні, раціональні, дійсні та ірраціональні), порівняння та дії з ними.

Числа 1, 2, 3, 4, 5 ... , які використовуються під час лічби предметів, називають натуральними числами. Найменше натуральне число - 1, найбільшого - не існує. Нуль не є натуральним числом. Множину натуральних чисел позначають буквою N.
Натуральні числа, що закінчуються на 0, 2, 4, 6, 8,… називаються парними, а числа, що закінчуються на 1, 3, 5, 7, 9,… - непарними.

Звичайні дроби.

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді звичайного дробу a/b, де a - чисельник дробу, b - його знаменник.

Правильним дробом називається дріб, у якого чисельник менший від знаменника.

Неправильним дробом називається дріб, у якого чисельник більший від знаменника або дорівнює йому.

Значення правильного дробу менше від 1, а неправильного - не менше від 1. З неправильного дробу можна виділити цілу і дробову частину (отримаємо мішане число).

Наприклад: $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$; $\frac{175}{4} = 43\frac{3}{4}$.

Мішане число можна подати у вигляді неправильного дробу.

Наприклад: $4\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$.

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

Наприклад: $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ (скоротити дріб 15/20 на 5), $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб 3/7 до знаменника 14).

Десяткові дроби.

Звичайний дріб, знаменник якого дорівнює 10, 100, 1000 тощо можна записувати десятковим дробом.

Наприклад: $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{197}{1000} = 0{,}197$.

Якщо в чисельнику звичайного дробу цифр менше, ніж нулів у знаменнику, то 11 десятковому дробі після коми дописують стільки нулів, щоб кількість цифр після коми дорівнювала кількості нулів у знаменнику звичайного дробу.

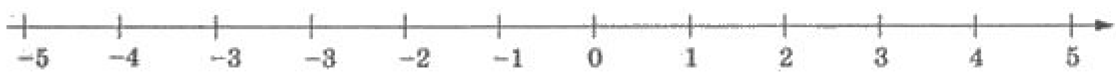
Наприклад: $\frac{19}{1000} = 0{,}019$; $\frac{3}{10000} = 0{,}0003$.

Аналогічно десятковими дробами можна записувати мішані числа:

$$7\frac{3}{10} = 7{,}3; \quad 4\frac{11}{10000} = 4{,}0011; \quad 19\frac{1}{100} = 19{,}01.$$

Додатні і від’ємні числа. Модуль числа.

Пряму лінію з вибраним на ній початком відрізку, одиничним відрізком і направленням називають координатною прямою, (мал. 1)



мал. 1

Два числа, що відрізняються одне від одного лише знаком, називаються протилежними числами. Наприклад: числа 5 і -5 - протилежні.

Модулем числа називається відстань від початку відліку до точки, що зображує це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа - протилежне йому число:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \ge 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад: $|2| = 2$; $|-3{,}8| = 3{,}8$; $|0| = 0$; $|\pi - 3| = \pi - 3$ (оскільки $\pi - 3 > 0$); $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$ (оскільки $\pi - 4 < 0$).

Властивості модуля:

1) $|a| \ge 0$

2) $|a| = |-a|$

3) $|a|^2 = |a^2| = a^2$

4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5) $|a : b| = |a| : |b|$, де $b \ne 0$

6) $||a| - |b|| \le |a + b| < |a| + |b|$

7) $||a| - |b|| \le |a - b| < |a| + |b|$

Цілі числа, раціональні числа, ірраціональні числа.

Числа натуральні, їм протилежні та число нуль складають множину цілих чисел. Вона позначається так Z.

Об'єднання множин цілих і дробових чисел (додатних і від'ємних) складають множину раціональних чисел. Вона позначається Q.

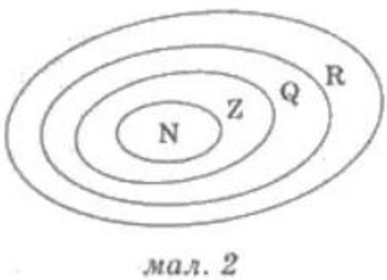
Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді p/q, де $p \in Z$; $q \in N$.

Числа, які не можна записати у вигляді p/q, де $p \in Z$; $q \in N$, називають ірраціональними числами.

Дійсні числа. Співвідношення між числовими множинами.

Раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину дійсних чисел. Множину дійсних чисел позначають буквою R.

Співвідношення між множинами натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел подано на малюнку 2.



мал. 2

ПРАВИЛА ПОРІВНЯННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ.

1. Порівняння натуральних чисел.

Із двох натуральних чисел, що мають різну кількість цифр, більшим є те, у якого цифр більше.

Наприклад: 417 < 1922; 12375 > 9873.

Із двох натуральних чисел, що мають однакову кількість цифр, більшим є те, у якого більше одиниць у найвищому розряді.

Наприклад: 732 > 698; 1295 < 2003.

Із двох натуральних чисел, що мають однакову кількість цифр і однакову цифру у найвищому розряді більшим є те, у якого більше одиниць у наступному, нижчому, розряді і т. д.

Наприклад: 1232 > 1217; 14198 < 14199.

2. Порівняння десяткових дробів.

З двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина. Якщо цілі частини дробів рівні, то більший той, у якого більше десятих, і т. д.

Наприклад: 18,7 > 16,92; 12,37 < 12,41; 5,32 > 5,319.

3. Порівняння звичайних дробів.

Із двох дробів з однаковими знаменниками більший той, чисельник якого більший.

Наприклад: $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$; $\frac{1}{11} < \frac{7}{11}$.

Щоб порівняти дроби з різними знаменниками, достатньо звести їх до спільного знаменника і порівняти утворенні дроби.

Наприклад: щоб порівняти дроби 3/5 і 4/7 зведемо їх до спільного знаменника 35. Маємо $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{21}{35}$ і $\frac{4}{7} = \frac{4\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{20}{35}$. Оскільки $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$, то й $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

Щоб порівняти дроби з однаковими чисельниками, потрібно порівняти їх знаменники. З двох дробів більший той, у якого знаменник менший.

Наприклад: $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, $\frac{11}{6} > \frac{11}{9}$.

4. Порівняння додатних і від'ємних чисел.

Будь-яке від'ємне число менше від нуля і менше від будь-якого додатного числа. Із двох від'ємних чисел більшим є те, модуль якого менший, і меншим є те, модуль якого більший.

Наприклад: 2 > -10; -5 < 0; -3 < -1; -4 > -15.

ПРАВИЛА ОКРУГЛЕННЯ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ І ДЕСЯТКОВИХ ДРОБІВ.

1. Правила округлень натуральних чисел.

При округленні натурального числа до певного розряду всі наступні за дим розрядом цифри замінюють нулями. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилась, збільшують на одиницю. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, яка залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округленні до сотень: 4520 ≈ 4500, 17287 ≈ 17300, 12950 ≈ 13000.

2. Правила округлення десяткових дробів.

При округленні десяткового дробу до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями або відкидають (якщо вони стоять після коми). Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 0, 1, 2, 3 або 4. то останню цифру, що залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округлені до сотих: 4,783 ≈ 4,78; 5,925 ≈ 5,93; 4,798 ≈ 4,80.

ПРАВИЛА ДІЙ З РАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ.

1. Дії з десятковими дробами.

Додаванні і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалася під комою.

$$+\begin{array}{r} 4{,}52 \\ 3{,}8 \\ \hline 8{,}32 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 13{,}29 \\ 4{,}273 \\ \hline 9{,}017 \end{array}$$

Наприклад:

Щоб помножити десяткові дроби, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} \times\; 4{,}07 \\ 2{,}9 \\ \hline +\; 3663 \\ 814 \\ \hline 11{,}803 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 0{,}017 \\ 0{,}9 \\ \hline 0{,}0153 \end{array}$$

Щоб помножити десятковий дріб на 10^n, де n - натуральне число, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр вправо.

Наприклад: 4,17 · 10 = 41,7; 0,29 · 100 = 29; 4,8 · 1000 = 4800.

Щоб помножити десятковий дріб на 0,1; 0,01; 0,001..., треба в цьому дробі перенести кому вліво на стільки знаків, скільки нулів стоїть у другому множнику перед одиницею (включаючи і нуль цілих).

Наприклад: 17,2 · 0,1 = 1,72; 293 · 0,01 = 2,93; 1,45 · 0,001 = 0,00145.

Щоб поділити десятковий дріб на натуральне число, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} -\,42{,}84 & 12 \\ \cline{2-2} 36 & 3{,}57 \\ \cline{1-1} -\,68 & \\ 60 & \\ \cline{1-1} -\,84 & \\ 84 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на 10^n, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр уліво.

Наприклад: 14,5 : 10 = 1,45; 2,37 : 100 = 0,0237.

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий, треба в діленому і дільнику перенести кому на стільки цифр вправо, скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Наприклад: 12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73.

Щоб поділити десятковий дріб на 0,1; 0,01; 0,001, ..., треба в цьому дробі перенести кому вправо на стільки знаків, скільки нулів містить дільник перед одиницею (враховуючи нуль цілих).

Наприклад: 4,73 : 0,1 = 47,3; 2,5 : 0,01 = 250; 0,0427 : 0,001 = 42,7.

2. Дії зі звичайними дробами.

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Наприклад: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$; $\frac{13}{19}-\frac{2}{19}=\frac{11}{19}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад: $\frac{\overset{5}{1}}{6}+\frac{\overset{3}{3}}{10}=\frac{5+9}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$; $\frac{\overset{3}{7}}{8}-\frac{\overset{2}{5}}{12}=\frac{21-10}{24}=\frac{11}{24}$.

Як виконують додавання і віднімання мішаних чисел, показано на прикладах:

$$5\frac{\overset{4}{1}}{3}+2\frac{\overset{3}{3}}{4}=7\frac{4+9}{12}=7\frac{13}{12}=8\frac{1}{12};$$

$$7\frac{\overset{4}{4}}{5}-6\frac{\overset{5}{3}}{4}=1\frac{16-15}{20}=1\frac{1}{20};$$

$$5\frac{\overset{2}{4}}{9}-2\frac{\overset{3}{5}}{6}=3\frac{8}{18}-\frac{15}{18}=2\frac{26-15}{18}=2\frac{11}{18}.$$

Щоб помножити два дроби, треба помножити окремо їх чисельники і знаменники й перший добуток записати чисельником, а другий - знаменником:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\qquad \text{де } b\neq 0;\ d\neq 0.$$

Наприклад:

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{14}{15}=\frac{{}^{1}\cancel{5}\cdot\cancel{14}^{7}}{{}_{4}\cancel{8}\cdot\cancel{15}_{3}}=\frac{7}{12};$$

$$7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 5}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5};$$

$$2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{{}^{1}\cancel{7}\cdot\cancel{30}^{10}}{{}_{1}\cancel{3}\cdot\cancel{7}_{1}}=\frac{10}{1}=10.$$

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Наприклад:

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15};$$

$$2\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}=\frac{5}{2}:\frac{7}{4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}\cdot 7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}.$$

3. Дії додатними та від’ємними числами.

Щоб додати два від’ємних числа, треба додати їх модулі і поставити перед одержаним числом знак «-».

Наприклад: -2 + (-7) = -9.

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від першого модуля доданків відняти менший модуль і поставити перед знайденим числом знак того доданка, модуль якого більший.

Наприклад: -7 + 7 = 0; 5 + (-3) = 2; -8 + 1 = -7.

Щоб від одного числа відняти друге, треба до зменшуваного додати число, протилежне від’ємнику:

$$a - b = a + (-b)$$

Наприклад: 5 - 9 = 5 + (-9) = -4; -2 - 5 = -2 + (-5) = -7; -3 - (-7) = -3 + 7 = 4.

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел із різними знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому зі знаком «-».

Наприклад: -4 · (-3) = 12; 2 · (-5) = -10.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці від ділення їх модулів. Частка двох чисел із різними знаками дорівнює частці від ділення їх модулів, взятій зі знаком «-».

Наприклад: -8 : (-2) = 4; 6 : (-3) = -2; -18 : 6 = -3.

4. Властивості дій із дійсними числами.

При додаванні дійсних чисел справджується переставна властивість: $a + b = b + a$ та сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

При множенні дійсних чисел справджується переставна властивість: $ab = ba$, сполучна властивість: $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ та розподільна властивість: $(a + b) \cdot c = ac + bc$; $(a - b) \cdot c = ac - bc$.

Ознаки подільності на 2; 3; 5; 9; 10.

Ознаки подільності:

- на 10 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0;
- на 5 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0 або цифрою 5;
- на 2 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою;
- на 9 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9;
- на 3 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3.

1. Перетворення десяткового дробу у звичайний.

Скориставшись правилом запису звичайного дробу із знаменником 10, 100, 1000, ... у вигляді десяткового дробу, легко записувати десяткові дроби у вигляді звичайних.

Наприклад: $3{,}17 = 3\frac{17}{100}$; $4{,}2 = 4\frac{2}{10} = 4\frac{1}{5}$; $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ тощо.

2. Перетворення звичайного дробу у десятковий.

Оскільки $\frac{a}{b} = a : b$, то щоб перетворити звичайних дріб у десятковий, досить чисельник поділити на знаменник.

Наприклад:

$$\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8;$$

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375;$$

$$\frac{17}{25} = 17 : 25 = 0{,}68;$$

$$7\frac{47}{50} = 7 + \frac{47}{50} = 7 + 47 : 50 = 7{,}94.$$

3. Перетворення звичайного дробу у нескінчений періодичний десятковий дріб.

Якщо спробувати перетворити дріб 9/11 на десятковий, то отримаємо 9/11 = 9 : 11 = 0,818181... Крапки в кінці показують, що ділення не закінчилося.

Отримали нескінчений десятковий періодичний дріб. Цифри 8 та 1, які стоять поряд у запису нескінченого десяткового дробу і повторюються підряд безліч разів, утворюють період нескінченого періодичного дробу. Це записують так:

$$0{,}818181... = 0{,}(81). \text{ Отже } \frac{9}{11} = 0{,}(81).$$

Приклади:

$$\frac{5}{12} = 5 : 12 = 0{,}41666... = 0{,}41(6);$$

$$4\frac{1}{300} = 4 + 1 : 300 = 4{,}00333... = 4{,}00(3).$$

4. Десяткове наближення звичайного дробу.

Виконуючи обчислення із нескінченими періодичними дробами, зручно користуватися їх наближеннями, які дістають при округленні нескінчених дробів до певного розряду. Утворюється скінчений десятковий дріб, який називають десятковим наближенням звичайного дробу. Число, яке утворюється після округлення, тим точніше, чим більше десяткових знаків у наближенні.

Приклад. Округлити до тисячних і обчислити 7,4(3) + 4,(18).

Розв’язання. Оскільки 7,4(3) = 7,4333... = 7,433, а 4,(18) = 4,1818... = 4,182, то 7,4(3) + 4,(18) = 7,433 + 4,182 = 11,615.

Лекція 2

Степені і корені. Раціональні, ірраціональні, степеневі вирази та їхні перетворення.

Степенем числа a **з натуральним показником** n**, більшим за** 1, називається добуток множників, кожний з яких дорівнює a. Позначається $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$.

Наприклад, $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$, де 2 – основа степеня, 5 – показник степеня.

Степінь числа a з показником 1 – це саме число a, тобто $a^1 = a$.

Степінь числа a з показником 0 – це одиниця, тобто $a^0 = 1$.

Піднесення до степеня – це знаходження добутку однакових множників. Цей добуток називається степенем. Піднесення до степеня означає виконувати дію степенювання.

Квадратний корінь з числа a – це числа, квадрати яких дорівнюють a.

Арифметичний квадратний корінь з невід'ємного числа a – це невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, тобто $\sqrt{a}^2 = |a|$.

Корінь n **- го степеня з числа** a – це число n - й степінь якого дорівнює a (n - натуральне число).

Арифметичний корінь n **- го степеня з невід'ємного числа** a – це невід'ємне число, n - й степінь якого дорівнює a.

Радикал – це математичний знак $\sqrt{\ }$, який означає дію коренювання, тобто знаходження кореня n - ого степеня з якогось числа a. Це записується так $\sqrt[n]{a}$. Згідно з означення запис $\sqrt[n]{a} = x,$ де $a \ge 0$, означає, по – перше, що $x \ge 0$ і, по – друге, що $x^n = a$, тобто $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Наприклад, $\sqrt{49} = 7; \sqrt[3]{125} = 5$.

Дії зі степенями

1) $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = a^{n+m}$

2) $\left(a^n\right)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{nm}$

3) *Нехай* $n > m, \quad n = m + (n - m)$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{m+(n-m)}}{a^m} = \frac{\cancel{a^m} \cdot a^{n-m}}{\cancel{a^m}} = a^{n-m}$$

4) $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n} = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$

6) $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Дії над коренями

Якщо $a \ge 0$ *та* $b \ge 0$, то справедливі такі властивості:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

5) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Перша властивість поширюється на добуток будь-якого числа множників.
Наприклад, $\sqrt[3]{8 \cdot 125 \cdot 27} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{27} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.
Корінь має найпростішу форму, якщо
а) не містить ірраціональностей в знаменнику;
б) не можна скоротити його показник з показником підкореневого виразу;
в) всі можливі раціональні множники винесені з під знаку кореня.

Приклад. Привести до найпростішої форми корені, якщо $a > 0, b > 0$

а) $\sqrt[6]{a^9 b^{15}} = \sqrt{a^3 b^5} = ab^2\sqrt{ab}$;

б) $\sqrt[10]{\dfrac{a^{16}}{b^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{a^8}{b}} = a\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[5]{a^3 b^4}$

в) $\sqrt{\sqrt[3]{256a^2b^{14}}} = \sqrt[6]{256a^2b^{14}} = \left[256 = 2^8\right] = \sqrt[3]{2^4 ab^7} = 2b^2\sqrt[3]{2ab}$

Корені називаються подібними, якщо вони мають одну і ту ж найпростішу форму, тобто вони можуть відрізнятися лише раціональними множниками перед знаками коренів.
Наприклад, $a > 0, b > 0$

$\sqrt[8]{a^2b^6} = \sqrt[4]{ab^3}$

$\sqrt[4]{\dfrac{81a^5}{b}} = 3a\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{3a}{b}\sqrt[4]{ab^3}$

Подібні корені можна додавати і віднімати.

Приклади.

а) $\sqrt[4]{81a^5b} - \sqrt[8]{256a^2b^{10}} - \sqrt{\left(a^2 - 2ab + b^2\right)\sqrt{ab}} = \left(a > b > 0\right) = 3a\sqrt[4]{ab} - 2b\sqrt[4]{ab} -$

$-\sqrt{\left(a-b\right)^2\sqrt{ab}} = 3a\sqrt[4]{ab} - 2b\sqrt[4]{ab} - \left(a-b\right)\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{ab}\left(3a - 2b - a + b\right) =$

$= \sqrt[4]{ab}\left(2a-b\right) = \left(2a-b\right)\sqrt[4]{ab}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

$= \sqrt{2}\left(1 + 2 + 3 - 5\right) = \sqrt{2}$

Основу всіх алгебраїчних дій становлять такі закони додавання і множення:

Переставний закон: a + b = b + a, ab = ba.

Сполучний закон: (a + b) + c = a + (b + c), (ab) c = a (bc).

Розподільний закон: (a + b) c = ac + bc.

Алгебраїчними виразами називають математичні вирази, що складаються з чисел і змінних за допомогою знаків додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до раціонального степеня, добування кореня і за допомогою дужок.

Приклад, $x^3-4xy\left(x+y^2\right), \dfrac{x^2+1}{x+2}, \sqrt{a-b}+\sqrt[3]{c}, 3x^{\frac{2}{3}}+5y^{\frac{5}{4}}$.

Якщо алгебричний вираз не містить ділення на змінні і добування кореня із змінних, то його називають **цілим.**

Приклад, $x^3-4xy\left(x+y^2\right)$

Якщо алгебричний вираз складений з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з натуральним показником і ділення на вирази зі змінними, то його називають **дробовим.**

Приклад, $\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Цілі і дробові вирази називають **раціональними.**

Якщо в алгебричному виразі використано добування кореня із змінних (або піднесення змінних до дробового степеня), то такий вираз називають **ірраціональним**.

Приклад, $\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{c}$ або $3x^{\frac{2}{3}}+5y^{\frac{5}{4}}$.

Множина значень змінних, для яких алгебричний вираз має значення, називають **областю означення алгебричного виразу**.

Приклад, областю означення виразу $\dfrac{3}{2x-4}$ є множина дійсних чисел, окрім $x=2$, тобто $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Областю означення виразу $\dfrac{7a^3b^4}{a+b}$ є множина пар чисел (a,b), для яких $a\neq -b$

Одночлен.

Одночленом називають такий вираз, який містить числа, натуральні степені змінних та їх добуток, і не містить ніяких інших дій над числами і змінними.

Будь-який одночлен можна привести до **стандартного вигляду**, тобто записати у вигляді добутку числового множника, що стоїть на першому місці, та степенів різних змінних. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають **коефіцієнтом** одночлена. Суму показників степенів усіх змінних називають степенем одночлена.

Приведення одночлена до стандартного вигляду, множення одночленів – тотожні перетворення. Одночлени, приведені до стандартного вигляду, називаються **подібними**, якщо вони відрізняються тільки коефіцієнтом або зовсім не відрізняються. Подібні одночлени можна додавати і віднімати, в результаті чого знову отримують одночлен, подібний первинному (інколи отримують 0). Додавання і віднімання подібних одночленів називають зведенням подібних членів.

Цілі вирази - числа, змінні, їх степені й добутки називають одночленами.

Наприклад: 7; $9/13b^2c$; $7a^5m^3$ - одночлени; вирази $m+c^2$, $p^3-2a+3b$; $\dfrac{a+b}{a-b}$ - не є одночленами.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і степені різних змінних, то такий одночлен називають одночленом стандартного виразу.

Наприклад, $2a^2b$ - одночлен стандартного вигляду, а одночлен $2a^2b\cdot(-3ab^7)$ не є одночленом стандартного вигляду. Цей одночлен можна звести до одночлена стандартного вигляду:

$$2a^2b\cdot(-3ab^7)=2\cdot(-3)\cdot(a^2a)\cdot(bb^7)=-6a^3b^8.$$

Множення одночленів.

Приклади.

1) $-2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7;$

2) $\frac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\frac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\frac{1}{6}c^3m = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{6}(p^3p^4) \cdot (c^8c^3) \cdot (m^2m) = -\frac{1}{9}p^7c^{11}m^3.$

Піднесення одночлена до степеня.

Приклади.

1) $(-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12};$

2) $(-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}.$

МНОГОЧЛЕН.

Означення многочлена.

Многочленом називають суму одночленів. Якщо всі члени многочлена записати в стандартному вигляді і виконати зведення подібних членів, то отримаємо **многочлен стандартного вигляду.**

Щоб звести подібні члени (доданки), достатньо додати їх числові коефіцієнти і отримане число помножити на спільний буквений вираз. Наприклад, $(3x^4 - x) - (x^4 + 3x) - (1 - 4x) = 3x^4 - x - x^4 - 3x - 1 + 4x = 2x^4 - 1$.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не є многочленом стандартного вигляду, але його можна звести до многочлена стандартного вигляду:

$$\underline{3m^2n} - \underline{\underline{5mn^2}} + \underline{7m^2n} + \underline{\underline{mn^2}} = 10m^2n - 4mn^2.$$

Додавання і віднімання многочленів.

Приклади.

1) $(2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{2x^2} + \cancel{3x} - 5 + \underline{x^2} - \cancel{3x} = 3x^2 - 5;$

2) $(3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{\underline{2a}} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{\underline{3a}} = a^2 + 5a - 12.$

Множення одночлена на многочлен.

Приклади.

1) $3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a;$

2) $-2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 =$

$= -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3.$

Множення многочленна на многочлен.

$$(a + b)(x + y) = \underset{1}{ax} + \underset{2}{ay} + \underset{3}{bx} + \underset{4}{by}$$

Приклади.

1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10;$

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 =$

$= 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3.$

В деяких випадках приведення цілого виразу до стандартного вигляду многочлена здійснюється за допомогою тотожностей:

Ці тотожності називають **формулами скороченого множення.**

1. **Різниця квадратів**. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Приклад, $(4b)^2 - (x + y)^2 = (4b - x - y)(4b + x + y)$.

2. **Квадрат суми**. $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$.

Приклад, $\left(2+3x^2\right)^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3x^2+\left(3x^2\right)^2=4+12x^2+9x^4$.

3. Квадрат різниці. $\left(x-y\right)^2=\left(x-y\right)\left(x-y\right)=x^2-2xy+y^2$

Приклад, $\left(2x-3y\right)^2=\left(2x\right)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+\left(3y\right)^2=4x^2-12xy+9y^2$

4. Куб суми. $\left(x+y\right)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

Приклад, $\left(x+2y^2\right)^3=x^3+3x^2\cdot 2y^2+3x\left(2y^2\right)^2+\left(2y^2\right)^3=x^3+6x^2y^2+12xy^4+8y^6$

5. Сума кубів. $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$

Приклад, $\left(2x\right)^3+\left(3y\right)^3=\left(2x+3y\right)\left(4x^2-6xy+9y^2\right)$.

6. Куб різниці. $\left(x-y\right)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

Приклад, $\left(x-2y\right)^3=x^3-3x^2\cdot 2y+3x\cdot\left(2y\right)^2-\left(2y\right)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8x^3$.

7. Різниця кубів. $x^3-y^3=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$.

Приклад, $\left(2x\right)^3-\left(3y\right)^3=\left(2x-3y\right)\left(4x^2+6xy+9y^2\right)$.

Формула бінома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n,$$

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+(-1)^{n-1}nab^{n-1}+(-1)^nb^n,$$ де

1, n, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$,… – біномні коефіцієнти, які знаходяться в n-му рядку трикутника Паскаля.

Алгоритм побудови трикутника Паскаля (табл. 1.1): кожний елемент наступного рядка, окрім його крайніх елементів, дорівнює сумі двох сусідніх з ним елементів попереднього рядка; крайні елементи кожного рядка – одиниці.

Таблиця 1.1

Номер рядка	Біномні коефіцієнти
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Приклад 1.8. Знайти $(a-b)^5$.

Розв’язання. Коефіцієнти беремо із 5-го рядка, знаки “+”, “–” чергуємо: $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

Розкладанням многочлена на множники називається перетворення многочлена в добуток двох або декількох многочленів, серед яких можуть бути і одночлени.

Способи розкладання многочлена на множники

1) Винесення спільного множника за дужку. Кожну змінну, яка входить у всі члени многочлена, виносять з найменшим показником, який вона має в даному многочлені: $ac + bc = c(a+b)$.

Приклад 1. $10x^2y - 5xy^3 = 5xy(2x - y^2)$

2) Використання формул скороченого множення.

Приклад 2. $a^2 + b^2 + 2ab - 4c^2 = (a+b)^2 - (2c)^2 =$
$= (a+b-2c)(a+b+2c)$.

3) Спосіб групування. Він полягає у поєднанні в групи тих членів, які мають спільні множники, за дужки виноситься спільний множник кожної з груп. Якщо після такого перетворення виявиться спільний множник у всіх утворених групах, то його виносять за дужки.

Приклад 3. $3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy = (3x^3 - 6x^2y^2) + (-2y^3 + xy) =$
$= 3x^2(x - 2y^2) - y(2y^2 - x) = 3x^2(x - 2y^2) + y(x - 2y^2) = (x - 2y^2)(3x^2 + y)$

Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (тобто корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Приклад 4. $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$, тому що $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$.

Приклад 5. $3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2)$, так як $3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$.

Виділення повного квадрата двочлена з квадратного тричлена

Нехай є квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ і потрібно перетворити його до виду $a(x+m)^2 + n.$ Для цього чинимо в такий спосіб:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Наведемо приклади на виділення повного квадрата.

Приклад 6. $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 =$
$= (x-2)^2 - 3$.

Приклад 7. $-2x^2 + 7x - 3 = -2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) =$

$$=-2\left(x^2-2x\frac{7}{4}+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right)=-2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}+\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{25}{8}.$$

Перетворення цілих раціональних виразів зводиться до віднімання, додавання, множення та піднесення змінних до натурального степеня.

Приклад 8. Як записати вираз у вигляді добутку:

а) $mx^2-nx^2-nx+mx-m+n$; б) $85m^5n^4-34m^3n^3+17m^2n^2$.

Розв'язання

а) $mx^2-nx^2-nx+mx-m+n=(mx^2-nx^2)+(-nx+mx)+(-m+n)=$

$=x^2(m-n)+x(m-n)-(m-n)=(m-n)(x^2+x-1)$.

б) $85m^5n^4-34m^3n^3+17m^2n^2=17m^2n^2(5m^3n^2-2mn+1)$.

Перетворення дробових раціональних виразів зводиться до віднімання, додавання, множення та ділення раціональних дробів, а також до піднесення дробу до натурального степеня. Будь-який раціональний вираз можна перетворити в дріб, чисельник і знаменник якого – цілий раціональний вираз; в цьому, як правило, полягає мета тотожних перетворень раціональних виразів.

Приклад 9. Спростити вираз

$$\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

Розв'язання

$$\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\left(\left(\frac{b+c+a}{a(b+c)}\right):\left(\frac{b+c-a}{a(b+c)}\right)\right):$$

$$:\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\left(\frac{b+c+a}{a(b+c)}\cdot\frac{a(b+c)}{b+c-a}\right)\cdot\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}=$$

$$=\frac{b+c+a}{b+c-a}\cdot\frac{2bc}{(b+c-a)(b+c+a)}=\frac{2bc}{(b+c-a)^2}.$$

Приклад 10. Спростити вираз

$$\left(\frac{3b}{3b+a}-\frac{9b^2}{9b^2+6ab+a^2}\right)\left(\frac{3b}{9b^2-a^2}+\frac{1}{a-3b}\right)^{-1}+\frac{18b^2}{3b+a}$$

Розв'язання

1)

$$\frac{3b}{3b+a}-\frac{9b^2}{9b^2+6ab+a^2}=\frac{3b^{(3b+a}}{3b+a}-\frac{9b^2}{(3b+a)^2}=\frac{9b^2+3ba-9b^2}{(3b+a)^2}=\frac{3ba}{(3b+a)^2}$$

2) $\dfrac{3b}{9b^2-a^2}+\dfrac{1}{a-3b}=\dfrac{3b}{(3b-a)(3b+a)}-\dfrac{3b+a}{(3b-a)(3b+a)}=-\dfrac{a}{(3b-a)(3b+a)}$.

Лекція 3
Многочлени. Корені многочленів.

Функцію $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, де n — натуральне число, $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ — довільні сталі, причому $a_0 \neq 0$, називають **многочленом** (**цілою раціональною функцією**) n -го степеня.

$a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ — **коефіцієнти** многочлена;

a_0x^n — **старший** член многочлена;

a_0 — коефіцієнт при старшому члені;

a_n — вільний член многочлена;

n — степінь многочлена (це степінь старшого члена).

Будь-яке число розглядають як многочлен. При цьому число, яке не дорівнює нулеві, вважають многочленом нульового степеня, а число 0 — **нуль-многочленом**. Нуль-многочлен не має степеня.

Приклад, $P_6(x) = 7x^6 - 3x^3 + 3x + 2$ — многочлен 6-го степеня, у якому $7x^6, 7$ — коефіцієнт при старшому члені, 2 — вільний член многочлена.

Многочлен нульового степеня $P_0(x) = a_0$ називають **сталою**, многочлен 1-го степеня $P_1(x) = a_0x + a_1$ називають **лінійною** функцією, многочлен 2-го степеня $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ називають **квадратичною** функцією або **квадратним тричленом**.

Коренем многочлена $P_n(x)$ називають таке значення *x*, для якого многочлен дорівнює нулеві.

Приклад, число $x = 2$ є коренем многочлена $P_3(x) = x^3 - x - 6$ оскільки, $P_3(2) = 2^3 - 2 - 6 = 0$.

Два многочлени тотожно рівні, якщо вони однакового степеня і мають рівні коефіцієнти при однакових степенях.

Основна теорема алгебри. Многочлен степеня *n* може мати не більше як *n* коренів.

Многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.

Якщо многочлен n -го степеня $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$, має n коренів $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ (деякі з них можуть повторюватись), то його можна записати як добуток $P_n(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Якщо який-небудь з цих множників повторюється *k* разів, то відповідний корінь називають **кратним**, а число k — кратністю кореня; якщо ж множник зустрічається лише один раз, то відповідний корінь називають простим.

Приклад, якщо $P(x) = 3(x + 2)^2 x^3 (x - 1)$, то $x = -2$ є двократним коренем, $x = 0$ — трикратним, а $x = 1$ — однократним (простим).

Загальний вигляд многочлена:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де P – ім'я; n – степінь; x – аргумент; $a_i (i = \overline{0, n})$ – коефіцієнт; a_0 – старший коефіцієнт (якщо $a_0 = 1$, то многочлен є зведеним); a_0x^n – старший член; a_n – вільний член.

Зв'язок між компонентами при діленні многочленів:

$$\underset{\text{ділене}}{P_n(x)} = \underset{\text{дільник}}{\overline{P_k}(x)} \cdot \underbrace{Q_{n-k}(x)}_{\text{частка}} + \underset{\text{остача}}{R_s(x)}.$$

Завжди $s<k$; якщо $R_s(x)=0$, то многочлен $P_n\left(x\right)$ ділиться на многочлен $\overline{P_k}(x)$, тобто $P_n(x)\vdots\overline{P_k}(x)$. Зокрема, $P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)+R$, де R – число; якщо $R=0$, то $P_n(x)\vdots(x-a)$.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n\left(x\right)$ на $x-a$ дорівнює значенню многочлена при $x=a\,(R=P_n(a))$.

Доведення . Поділимо P(x) на x − a з остачею: P(x) = (x − a)· S(x) + R(x) . За означенням степінь многочлена R(x) менший, ніж степінь многочлена x − a , або R(x) не має степеня; отже, R(x) є многочленом степеня 0 або нуль-многочленом, тобто є числом: R(x) = r. Тоді P(a) = (a − a)· S(a) + r = r , що і треба було довести.

Приклад. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)=4x^6-3x^5+2x^3-x^2+7x-6$ на $x-1$.

Розв’язання . За теоремою Безу шукана остача P(1) = 4 −3+ 2 −1+ 7 − 6 = 3.

Теорема (ознака подільності многочлена на x - a). Для подільності многочлена $P_n\left(x\right)$ на $x-a$ необхідно і достатньо, щоб a було коренем многочлена $P_n\left(x\right)$, тобто $P_n(a)=0$.

Висновок. Якщо $x_1,x_2,\ldots,x_k$ $(k<n)$ – корені многочлена $P_n\left(x\right)$ кратності $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ відповідно, то $P_n\left(x\right)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}Q_{n-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\right)}(x)$, де $Q_{n-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\right)}(x)$ – многочлен степеня $n-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\right)$, який не має коренів.

Приклад 1. Розділити многочлен $P_4(x)=3x^4-2x+3-4x^2+x^3$ на многочлен $P_2(x)=5-2x+x^2$.

Розв’язання. Зобразимо ці многочлени в канонічних формах:

$$P_4(x)=3x^4+x^3-4x^2-2x+3,\;\;P_2(x)=x^2-2x+5.$$

Виконаємо ділення стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;3x^4+x^3-4x^2-2x+3 & x^2-2x+5 \\ \cline{2-2}
3x^4-6x^3+15x^2 \qquad\qquad & 3x^2+7x-5 \\ \cline{1-1}
-\;7x^3-19x^2-2x+3 & \\
7x^3-14x^2+35x \quad & \\ \cline{1-1}
-\;-5x^2-37x+3 & \\
-5x^2+10x-25 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$-47x+28.$$

Частка – $Q_2(x)=3x^2+7x-5$, остача – $R_1(x)=-47x+28$.

Зауваження. Справедливими є рівності

$$3x^4+x^3-4x^2-2x+3=\left(x^2-2x+5\right)\left(3x^2+7x-5\right)-47x+28,$$

$$\frac{3x^4+x^3-4x^2-2x+3}{x^2-2x+5}=3x^2+7x-5+\frac{-47x+28}{x^2-2x+5}.$$

Розглянемо ділення многочлена на двочлен $x-a$.

Приклад 2. Знайти остачу від ділення многочлена $P_3(x)=4x^3+5x-36$ на $x-2$.

Розв’язання. За теоремою Безу $R=P_3(2)=32+10-36=6$.

Приклад 3. Перевірити подільність многочлена $P_3(x)=x^3+x^2-4x-4$ на $x-1,\;\;x+1,\;\;x-2,\;\;x+2,\;\;x+3.$

Розв'язання. Оскільки $P_3(1) = -6 \neq 0$, то $P_3(x)$ не ділиться на $x-1$. Далі $P_3(-1) = 0 \Rightarrow P_3(x) \vdots (x+1)$, $P_3(2) = 0 \Rightarrow P_3(x) \vdots (x-2)$, $P_3(-2) = 0 \Rightarrow P_3(x) \vdots (x+2)$, $P_3(-3) = -10 \neq 0 \Rightarrow$ $P_3(x)$ не ділиться на $x+3$.

Зауваження. Справедливою є рівність $P_3(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$.

Теорема Вієта. Для коренів многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$, правдиві такі співвідношення

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

....

$$x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Доведення: Так $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Розділимо обидві частини на a_0 :

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0};$$

$$x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots$$

$$+(-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n = x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти, отримуємо співвідношення теореми Вієта.

Приклад, для коренів многочлена $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ правдиві такі співвідношення:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1, .$$
$$x_1x_2x_3 = -2.$$

Цілі корені цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами є дільниками вільного члена.

Теорема. Якщо раціональне число $\frac{l}{m}$ (l, m — цілі, $\frac{l}{m}$ — дріб, який не скорочується) — корінь многочлена з цілими коефіцієнтами, тоді l — дільник вільного члена, m — дільник старшого коефіцієнта.

Доведення. Нехай $\frac{l}{m}$ — корінь многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

з цілими коефіцієнтами, тоді

$$P_n\left(\frac{l}{m}\right) = a_0\frac{l^n}{m^n} + a_1\frac{l^{n-1}}{m^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{l}{m} + a_n = 0.$$

Помножимо обидві частини на m^n, отримаємо

$$a_0l^n + a_1l^{n-1} \cdot m + \ldots + a_{n-1}l \cdot m^{n-1} + a_n \cdot m^n = 0.$$

З однієї сторони,

$$a_0 l^n = -m\left(a_1 l^{n-1} + \ldots + a_{n-1} l \cdot m^{n-2} + a_n \cdot m^{n-1}\right),$$

З другої

$$a_n m^n = -l\left(a_0 l^{n-1} + a_1 l^{n-2} m + \ldots + a_{n-1} m^{n-1}\right).$$

Права частина представляє собою ціле число, яке ділиться на m, отже, повинна ділитися на m і ліва частина. Так як l не ділиться на m, тоді $a_0 \vdots m$. Аналогічно $a_n \vdots l$.

Наслідок 1. Цілі корені – дільники вільного члена. Цілий корінь l представимо у вигляді $\frac{l}{1}$, отже, $a_n \vdots l$.

Наслідок 2. Якщо приведений многочлен має раціональні корені, то вони цілі.

В приведеному многочлені $a_0 = 1$ ділиться тільки на 1. Отже, якщо многочлен має раціональні корені, то їх знаменник дорівнює 1, тобто вони цілі.

Приклад. Знайти корені многочлена $P_4(x) = 2x^4 + x^3 + 9x^2 + 5x - 5$.

Розв'язання. Шукаємо спочатку раціональні корені. Так як $\begin{matrix} -5 \vdots \pm 1, \pm 5; \\ 2 \vdots \pm 1, \pm 2 \end{matrix}$, тоді раціональними коренями можуть бути тільки числа $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$.

Перевіряємо наші корені:

$P_4(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 5 = 12 \neq 0,$

$P_4(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^3 + 9(-1)^2 + 5(-1) - 5 = 0,$

$$P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 5 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{5}{2} - 5 =$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5 = 5 - 5 = 0$$

Можна кожний з коренів не перевіряти, а коли знайшли перший корінь, поділити на нього у стовпчик.

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 + 9x^2 + 5x - 5 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 + 2x^3} & 2x^3 - x^2 + 10x - 5 \\
\quad -x^3 + 9x^2 & \\
\quad \underline{-x^3 - x^2} & \\
\qquad 10x^2 + 5x & \\
\qquad \underline{10x^2 + 10x} & \\
\qquad\qquad -5x - 5 & \\
\qquad\qquad \underline{-5x - 5} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 10x - 5 = x^2(2x - 1) + 5(2x - 1) = (2x - 1)\left(x^2 + 5\right)$$

$$(2x - 1)\left(x^2 + 5\right) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 5 = 0 \Rightarrow \varnothing$$

Отже, $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$

Приклад 4. Розв’язати рівняння: $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Розв’язання

Розкладемо один із членів даного тричлена на доданки: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x - x + 2$ або $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 3x + 3 - 1$, тепер згрупуємо доданки зручним для нас способом, наприклад:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - 3x + 3 - 1 = (x^3 - 1) - (3x - 3) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 3(x - 1) =$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1 - 3) = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2 (x + 2),$$ або

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x - x + 2 = (x^3 - x) - (2x + 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$$

$$= x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) - 2) = (x - 1)(x^2 + x - 2) =$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2 (x + 2).$$

Отже, $(x - 1)^2 (x + 2) = 0$, тоді $\left[\begin{array}{l} (x - 1)^2 = 0, \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$

Відповідь: {-2; 1}.

Приклад 5. Розв’язати рівняння: $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$.

Розв’язання

Тут $a_n = 1, a_0 = 6$, тому, якщо дане рівняння має раціональні корені, то їх слід шукати серед дільників числа 6: □1, □2, □3, □6. Перевіркою дізнаємось, що $x = 3$ є коренем початкового рівняння. За теоремою Безу початковий многочлен ділиться без остачі на $(x - 3)$. Поділивши їх, отримаємо многочлен $x^2 + 2x - 2$.

Таким чином, $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x - 3)(x^2 + 2x - 2)$. Тоді початкове рівняння набуває вигляду $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0$. Це рівняння рівносильне сукупності рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$. Розв’язок першого рівняння $\tilde{o} = 3$ уже знайдений. Друге рівняння сукупності має корені $x = -1 - \sqrt{3}$ і $x = -1 + \sqrt{3}$.

Приклад 6. Знайти корені многочлена $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$.

Розв’язання. Оскільки многочлен зведений, то його раціональні корені – цілі. Цілі корені – дільники вільного члена, а саме: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36.$ Маємо:

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36,\ \ P_4(1) = 36,\ \ P_4(-1) = 16,\ \ P_4(2) = 16,\ \ P_4(-2) = 0;$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 & x + 2 \\ \quad x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & \overline{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} \\ \hline --\,-4x^3 - 11x^2 + 12x + 36 & \\ -4x^3 - 8x^2 \qquad\qquad & \\ \hline -\,-3x^2 + 12x + 36 & \\ -3x^2 - 6x \quad\ \ & \\ \hline -\,18x + 36 & \\ 18x + 36 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$\overline{P_3}(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18,$ претендентів бути коренями стало менше: $\pm 1, \pm 2, \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 18.$

Виділені раніше числа перевіряти не треба, а $x=-2$ необхідно перевірити ще раз: $\overline{P_3}(-2)=0$,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3-4x^2-3x+18 \\ x^3+2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x+2 \\ \hline x^2-6x+9 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{l} -6x^2-3x+18 \\ -6x^2-12x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} 9x+18 \\ 9x+18 \end{array} & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Отже, $x_1=-2, x_2=-2.$

Після знаходження кратного кореня -2одержимо рівняння $x^2-6x+9=0.$ Розв'язуючи його, знаходимо $x_3=x_4=3.$

Теорема. Будь-який многочлен $P_n(x)$ степеня $n\geq 2$ можна подати у вигляді добутку многочленів не вище другого степеня.

$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}\left(x^2+b_2x+c_2\right)^{\beta_2}\ldots\left(x^2+b_mx+c_m\right)^{\beta_m}$, де $x_1,x_2,\ldots,x_k$ $(k<n)-$ корені многочлена $P_n(x)$ кратності $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$, $n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+2\left(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m\right).$

Приклад 7. Розкласти многочлен $P_4(x)=x^4-8x^3+15x^2+4x-20$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $P_4(2)=0$ і $P_4(-1)=0,$ то многочлен ділиться на $(x+1)(x-2)=x^2-x-2.$ Виконаємо ділення стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4-8x^3+15x^2+4x-20 \\ x^4-x^3-2x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2-x-2 \\ \hline x^2-7x+10 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{l} -7x^3+17x^2+4x-20 \\ -7x^3+7x^2+14x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{l} 10x^2-10x-20 \\ 10x^2-10x-20 \end{array} & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Таким чином, $P_4(x)=(x+1)(x-2)\left(x^2-7x+10\right)$. Коренями многочлена $x^2-7x+10$ є $-$ 2 і 5. Остаточно отримуємо $P_4(x)=(x+1)(x-2)^2\left(x-5\right)$.

Лекція 4

Рівняння. Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні рівняння. Рівняння з модулем.

Рівнянням називають рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою.

Невідоме число у рівнянні називають змінною. Змінні найчастіше позначають буквами x, y, z.

Приклади рівнянь: $2y-7=4y;\quad 2x^2-3ч-5=0;\quad \sqrt{z-3}=2;\quad \sin x=1$ тощо.

Рівнянням називається рівність зі змінною, відносно якої треба встановити, для яких значень (можливо, таких значень і не існує) ця рівність перетворюється на правильну числову.

Значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називається **коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною**. Якщо x_0 – корінь рівняння $f(x)=g(x)$, то $f(x_0)=g(x_0)$ – правильна рівність.

Коренем, або розв'язком, рівняння називають число, яке задовольняє рівняння.

Приклади. 1) Число 3 є коренем рівняння 2x — 5 = 1, оскільки 2 · 3 — 5 = 1.

2) Число - 2 не є коренем рівняння 3x + 7 = 0, оскільки 3 · (-2) +7 = 1 ≠ 0.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, що їх немає.

Цілим рівнянням називається раціональне рівняння, якщо ліва і права частини цього рівняння – цілі вирази.

Рівносильні рівняння – це рівняння з однією змінною, які мають оді й ті самі корені. Або **рівносильними** називають рівняння, які мають однакові множини розв'язків. Тобто, два будь-яких рівняння будуть рівносильними, якщо всі корені першого рівняння є коренями другого, а всі корені другого рівняння – коренями першого або обидва не мають розв'язків. Рівносильність рівнянь позначається так: $f_1(x)=g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x)$.

Приклади. 1) Рівняння 4x = 8 і x + 3 = 5 - рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.

2) Рівняння 7 - x = 6 і 10x = 20 - не є рівносильними, оскільки перше має корінь - число 1, а друге - число 2.

Під час розв'язування рівнянь використовують такі властивості:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Лінійні рівняння з однією змінною

Лінійним називається рівняння виду $ax=b$, де x – невідоме, a і b – вирази, що не залежать від x.

1) Якщо $a\neq 0$, то лінійне рівняння має єдиний розв'язок $x=\dfrac{b}{a}$.

2) Якщо $a=b=0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $0\cdot x=0$. Це рівняння має безліч розв'язків, тобто x – будь-яке дійсне число.

3) Якщо $a=0, b\neq 0$, то рівняння набуває вигляду $0\cdot x=b$. Це рівняння не має розв'язків.

Приклад,

1) $-0,5x=14,$ 2) $0x=5,$

$x=14:(-0,5),$ рівняння коренів не має.

$x=-28$

Багато рівнянь послідовними перетвореннями зводять до лінійного рівняння, рівносильного даному.

Приклади. 1) $5(x+2)-4x=-3(x+7)$.

Розкриємо дужки: $5x+10-4x=-3x-21$.

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину, а інші - у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні:

$$5x-4x+3x=-21-10;$$

зведемо подібні доданки: $4x=-31$;

розв'яжемо отримане лінійне рівняння: $x=-31:4; x=-7{,}75$.

Відповідь: x = -7,75.

2) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{5-x}{3}=\dfrac{x+13}{6}$.

Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів - число 6:

$$\frac{6(x+1)}{2}+\frac{6(5-x)}{3}=\frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x+1)+2(5-x)=x+13;$$

Далі розв'язуємо як у попередньому прикладі: $3x+3+10-2x=x+13$; $3x-2x-x=13-3-10$; $0x=0$

x - будь-яке число.

Відповідь: x - будь-яке число.

Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння.

Квадратне рівняння – це рівність виду $ax^2+bx+c=0$, де $a\neq 0$, зі змінною x, відносно якої треба встановити, для яких її значень (можливо, таких значень і не існує) рівність перетворюється на правильну числову.

Приклад квадратного рівняння: $5x^2+3x-17=0$.

Якщо другий або третій коефіцієнт дорівнює нулю, то маємо **неповне квадратне рівняння**, тобто квадратне рівняння виду $ax^2+c=0$ *або* $ax^2+bx=0$.

Приклади неповного квадратного рівняння: $8x^2+67=0$ *або* $4x^2+23x=0$.

Схема розв'язування квадратного рівняння:

Розкладемо ліву частину рівняння на лінійні множники:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Отже, рівняння зводиться до вигляду $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, де $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ і $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ – корені рівняння. Вираз

b^2-4ac називається **дискримінантом** і позначається літерою D. Якщо $D \geq 0$, то рівняння має дійсні корені. Якщо $D<0$, то рівняння дійсних коренів не має.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння є парним числом, для знаходження коренів рівняння застосовуємо таку формулу:

$$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac; \quad x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

Теорема Вієта. Якщо x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, то x_1 та x_2 є коренями рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Наприклад, розв'язати рівняння $3x^2-7x+4=0$

$a=3; b=-7; c=4. \quad D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 4=49-48=1>0$

$x_1=\frac{7-1}{2\cdot 3}; \quad x_2=\frac{7+1}{2\cdot 3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$

$\textit{Відповідь}: 1; \frac{4}{3}.$

$x^2+5x+6=0$

$\begin{cases} x_1 \cdot x_2=6, \\ x_1+x_2=-5. \end{cases}$ Звідси $x_1=-2, x_2=-3$ (за теоремою, оберненою до теореми Вієта).

Відповідь: -3; -2.

Раціональні рівняння

Рівняння виду $f(x)=g(x)$ називається **раціональним рівнянням**, якщо $f(x)$ і $g(x)$ – цілі вирази, то рівняння називається **цілим**.

Раціональне рівняння, в якому хоча б одна частина є дробовим виразом, називається **дробовим рівнянням.** Наприклад, цілими є лінійні та квадратні рівняння.

Для того щоб розв'язати раціональне рівняння, треба:

1) знайти спільний знаменник всіх наявних дробів;
2) замінити дане рівняння цілим, помноживши обидві його частини на спільний знаменник;
3) розв'язати одержане ціле рівняння; позбутися тих коренів, які обертають спільний знаменник в нуль.

При розв'язуванні дробового раціонального рівняння можна використовувати різні способи. Розглянемо два з них.

Перший спосіб полягає у використанні умови рівності дробу нулю: дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $a=0$ і $b\neq 0$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{y^2-4}+\frac{3}{y^2-2y}=\frac{6}{y}$.

Розкладемо на множники знаменники дробів та перенесемо дріб із правої частини рівняння в ліву $\frac{5}{(y-2)(y+2)}+\frac{3}{y(y-2)}-\frac{6}{y}=0$.

Зведемо дроби у лівій частині рівняння до спільного знаменника.

$$\frac{5y+3(y+2)-6(y-2)(y+2)}{y(y-2)(y+2)}=0;\quad \frac{5y+3y+6-6y^2+24}{y(y-2)(y+2)}=0;\quad \frac{-6y^2+8y+30}{y(y-2)(y+2)}=0;$$

$$\frac{-3y^2+4y+15}{y(y-2)(y+2)}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі: $\begin{cases}3y^2-4y-15=0,\\ y\neq 0,\\ y\neq 2,\\ y\neq -2.\end{cases}$

Звідси отримаємо $y_1=-1\frac{2}{3};\quad y_2=3.$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{8}{x^3-4x}$.

Розкладемо на множники знаменники дробів.

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x(2-x)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)};\quad \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів - вираз $x(x-2)(x+2)$ за умови, що він не дорівнює нулю. Маємо:

$x(x-2)+x+2=8;\quad x^2-x-6=0;\quad x_1=3;\quad x_2=-2.$

Якщо $x=3$, то $x(x-2)(x+2)\neq 0$, отже, $x=3$ – корінь початкового рівня. Якщо ж $x=-2$, то $x(x-2)(x+2)=0$, а тому $x=-2$, – не є коренем рівняння.

Отже, $x=3$ – єдиний корінь початкового рівня.

Ірраціональні рівняння

Рівняння називається **ірраціональним**, якщо невідоме знаходиться під знаком кореня.

I. $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g^2(x).\end{cases}$

II. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geq 0.\end{cases}$

III. $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=m$ – рівняння такого вигляду можна розв'язувати як за допомогою піднесення до кубу, так і іншими способами.

Алгоритм розв'язування рівняння:

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=m\Leftrightarrow f(x)+g(x)+3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right)=m^3.$$

За умовою $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=m$.

$$f(x)+g(x)+3\sqrt[3]{f(x)g(x)}m=m^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)g(x)}=\frac{m^3-f(x)-g(x)}{3m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)g(x)=\left(\frac{m^3-f(x)-g(x)}{3m}\right)^3.$$

Одержане рівняння не містить знака кореня і розв'язується традиційними методами.

При такому підході до розв'язування, коли підносимо до степеня праву і ліву частину рівняння, ми можемо розширити ОДЗ і одержати сторонні корені. Тому потрібно робити перевірку усіх одержаних розв'язків, підставляючи їх до вихідного рівняння.

Приклади. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x-5}=2$. Оскільки $2>0$, то $3x-5=4, 3x=9, x=3$

$Відповідь: x=3.$

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2-5}=x+2$.

$$\begin{cases} x+2\ge 0, \\ 3x^2-5=(x+2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ 3x^2-5=x^2+4x+4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} x=1-\dfrac{\sqrt{22}}{2}, \\ x=1+\dfrac{\sqrt{22}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\dfrac{\sqrt{22}}{2}, \\ x=1+\dfrac{\sqrt{22}}{2}. \end{array}\right.$$

$Відповідь: 1-\frac{\sqrt{22}}{2}, 1+\frac{\sqrt{22}}{2}.$

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-4x-2}=\sqrt{2-x}$.

$$\begin{cases} x^2-4x-2=2-x, \\ 2-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0, \\ x\le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1; \end{array}\right. \\ x\le 2. \end{cases}$$

$Відповідь: -1.$

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$.

I спосіб:

$$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3 \Leftrightarrow 3-x+6+x+3\sqrt[3]{(3-x)(6+x)}\cdot\left(\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}\right)=27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt[3]{-x^2-3x+18}=18 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^2-3x+18}=2 \Leftrightarrow -x^2-3x+18=8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+10=0; x_1=2; x_2=-5.$$

$Перевірка: x=2; \sqrt[3]{3-2}+\sqrt[3]{6+2}=3; 1+2=3,$ що є правильною рівністю.

$Відповідь: -5; 2.$

II спосіб:

Нехай $\sqrt[3]{3-x}=a, \sqrt[3]{6+x}=b,$ тоді $a^3=3-x, b^3=6+x, a^3+b^3=3-x+6+x=9.$

За умовою $a+b=3$. Одержали систему рівнянь, де невідомими є a і b:

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a, \\ a^3+27-27a+9a^2-a^3=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a, \\ \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=3-1=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=3-2=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{3-x}=1, \\ \sqrt[3]{6+x}=2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{3-x}=2, \\ \sqrt[3]{6+x}=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-x=1, \\ 6+x=8; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-x=8, \\ 6+x=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ x=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5, \\ x=-5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-5; 2.$

Рівняння, які містять корені різних степенів зручно розв'язувати методом заміни.

Рівняння, які містять змінну під знаком модуля

Згадаємо означення модуля числа та основні властивості модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \ge 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

1) $|a| \ge 0;$

2) $|a| = |-a|;$

3) $|a| \ge a;$

4) $|ab| = |a| \cdot |b|;$

5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|};$

6) $|a+b| \le |a| + |b|;$

7) $|a+b| = |a| + |b|$ тоді й тільки тоді, коли $ab \ge 0;$

8) $|a| + |b| = a + b$ тоді й тільки тоді, коли $a \ge 0$ і $b \ge 0;$

9) $|a-b| = |a| + |b|$ тоді й тільки тоді, коли $ab \le 0;$

10) $|a| - |b| \ge 0$ тоді й тільки тоді, коли $a^2 - b^2 \ge 0.$

Схема розв'язування рівнянь, які містять змінну під знаком модуля:

I. $$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

II. $$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $|2x+7| = 3$.

Розкриємо знак модуля за означенням. Оскільки $3 > 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2x+7=3, \\ 2x+7=-3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x=-4, \\ 2x=-10; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-5; -2.$

Приклад. Розв'язати рівняння: $|x+1| = |2x-3|$.

Маємо $\left[\begin{array}{l} x+1=2x-3, \\ x+1=-(2x-3); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -x=-4, \\ 3x=2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$ Отже, рівняння має корені $x_1 = 4; x_2 = \dfrac{2}{3}$.

III. Метод інтервалів для виразів, що містять знак модуля

Алгоритм перетворення виразу, що містить декілька знаків модуля:

1) Прирівняйте кожний вираз, що стоїть під знаком модуля, до нуля і розв’яжіть одержані рівняння;
2) Розташуйте одержані числа на координатній прямій, розбивши її таким чином на інтервали. Дослідіть знак кожного виразу, який стоїть під знаком модуля, на кожному з інтервалів.
3) Знайдіть розв’язок рівняння на кожному з інтервалів, ураховуючи, що: $\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x), f(x)\geq 0, \\ -f(x), f(x)\leq 0. \end{cases}$

Оскільки $0=+0=-0$, то граничні точки проміжків будуть враховані двічі.

Рівняння виду $\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|=a, \quad \left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=\left|\varphi(x)\right|$ та інші містять два і більше виразів зі змінними, що стоять під знаком модуля. Такі рівняння доцільно розв’язувати за наступною схемою:

1) Знаходимо ОДЗ рівняння.

2) Знаходимо значення змінної, при яких дорівнює нулю хоча б один із виразів, що стоїть під знаком модуля (їх називають нулі під модульних виразів).

3) Розглянемо нулі підмодульних виразів на ОДЗ і розбиваємо ОДЗ на проміжки.

4) Знаходимо розв’язок рівняння - наслідку на кожному з проміжків і перевіряємо, чи входить цей розв’язок у розглядуваний проміжок.

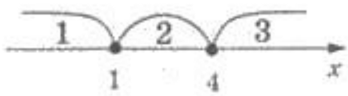
5) Даємо відповідь

Приклад. Розв’язати рівняння: $\left|x-1\right|+\left|3x-12\right|=7$.

1) ОДЗ: $x\in R$.
$x-1=0; \quad 3x-12=0;$

2) $x=1. \qquad 3x=12,$ Отже, $x=1$ і $x=4$ – нулі підмодульних виразів.
$x=4.$

3) Позначимо нулі підмодульних виразів на числовій прямій «жирними» точками (оскільки вони входять в ОДЗ) і маємо три проміжки $(-\infty;1], \quad (1;4], \quad (4;+\infty)$



4) Якщо
$x\in(-\infty;1]$, тобто $x\leq 1$, то $x-1\leq 0$ і $\left|x-1\right|=-(x-1); 3x-12<0$ і $\left|3x-12\right|=-(3x-12)$. Маємо $-(x-1)-(3x-12)=7; -x+1-3x+12=7; -4x=-6; x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$. Число 1,5 в розглядуваний проміжок $(-\infty;1]$ не входить, тому на цьому проміжку розв’язків немає.

Якщо $x\in(1;4]$, тобто $1<x\leq 4$, то $x-1>0$ і $\left|x-1\right|=x-1, 3x-12\leq 0$ і $\left|3x-12\right|=$
$=-(3x-12)$.

Маємо $x-1-(3x-12)=7; x-1-3x+12=7; -2x=-4; x=2$. Число 2 входить у розглядуваний проміжок $(1;4]$, тому 2 – корінь рівняння.

Якщо $x\in(4;+\infty)$, тобто $x>4$, то $x-1>0$ і $\left|x-1\right|=x-1, 3x-12>0$ і $\left|3x-12\right|=$
$=3x-12$.

Маємо $x-1+3x-12=7; 4x=20; x=5$. Число 5 входить у розглядуваний проміжок $(4;+\infty)$, тому 5 – корінь рівняння.

5) Отже, $x_1=2; x_2=5$ - корені рівняння.

Лекція 5
Нерівності. Лінійні, квадратні нерівності. Нерівності з модулем. Ірраціональні нерівності.

Нерівністю називають два вирази, які сполучені між собою знаками $>, <, \geq, \leq, \neq$ наприклад: $f_1(x) > g_1(x); f_1(x) < g_1(x), f_1(x) \neq g_1(x), f_1(x) \geq g_1(x), f_1(x) \leq g_1(x)$.

Дві останні нерівності називають нестрогими. Знак $\vee$ позначає один із знаків нерівності.

Розв'язком нерівності називають таке значення змінної, при якому нерівність є правильною числовою нерівністю. Наприклад, розглянемо нерівність 2х > 7. Число 4 є розв'язком цієї нерівності, оскільки $2 \cdot 4 > 7$, а число 3 не є розв'язком цієї нерівності, оскільки $2 \cdot 3 < 7$.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або встановити, що таких немає.

Рівносильними називають такі нерівності, які мають однакові множини розв'язків. Нерівність $f_2(x) > g_2(x)$ називають **наслідком** нерівності $f_1(x) > g_1(x)$, якщо кожний розв'язок нерівності $f_1(x) > g_1(x)$ є розв'язком нерівності $f_2(x) > g_2(x)$.

Нерівності зі змінними мають властивості, аналогічні до властивостей рівнянь:

1) якщо у будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо нерівність, рівносильну даній;

2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо нерівність рівносильну даній;

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то дістанемо нерівність, рівносильну даній; якщо ж обидві частини нерівності помножити або поділити на одне і те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

Область визначення нерівності з однією змінною — це множина значень змінної, для яких ліва і права частини нерівності не втрачають смислу.

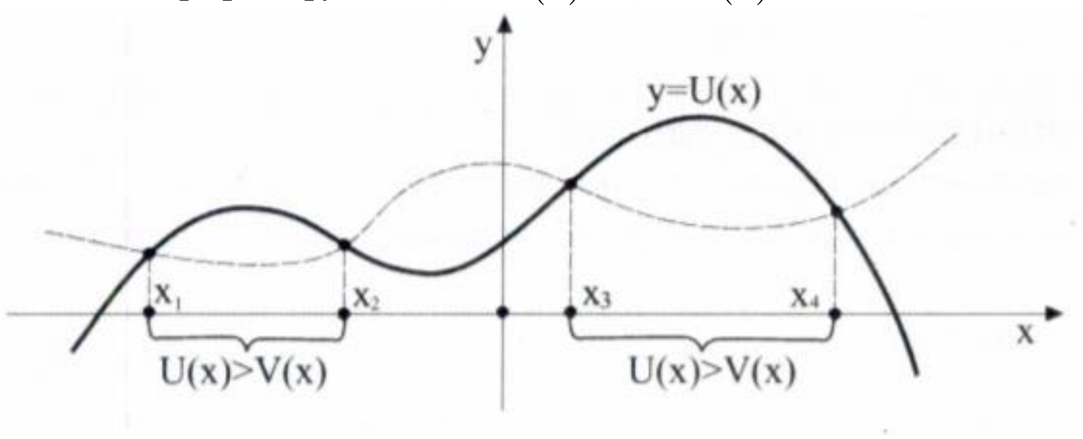
Графічне розв'язування нерівностей із однією змінною

Розглянемо вираз $U(x) > V(x)$, де $y = U(x)$ і $y = V(x)$ деякі функції. Побудуємо в одній системі координат графіки даних функцій. При цьому абсциси точок перетину цих графіків будуть розв'язками рівняння $U(x) = V(x)$.

Ті проміжки на осі Ox, для яких ординати точок графіка $y = U(x)$ більші за ординати точок графіка $y = V(x)$ будуть розв'язками нерівності $U(x) > V(x)$.

Ті проміжки на осі Ox, для яких ординати точок графіка $y = U(x)$ менші за ординати точок графіка $y = V(x)$, будуть розв'язками нерівності $U(x) < V(x)$.

Нехай дано графіки функцій $y = U(x)$ і $y = V(x)$.



мал. 1

З малюнка 1 видно, що

– рівняння $U(x) = V(x)$ має чотири розв'язки: x_1, x_2, x_3 і x_4;

– нерівність $U(x) > V(x)$ має розв'язок: $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; x_4)$;

– нерівність $U(x) < V(x)$ має розв'язок: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; +\infty)$

Теорема 1 (властивість транзитивності). Якщо на деякій множині одна нерівність рівносильна другій нерівності, а друга нерівність рівносильна третій, то перша нерівність рівносильна третій на цій множині.

Теорема 2. Якщо функція $g(x)$ визначена при всіх x із *ОДЗ* нерівності $f_1(x) > g_1(x)$, то нерівність $f_1(x) + g_1(x) > f_2(x) + g_2(x)$, рівносильна даній нерівності.

Наслідок. З однієї частини нерівності в іншу можна переносити будь-який доданок з протилежним знаком. При цьому дістанемо нерівність, рівносильну даній нерівності.

Теорема 3.

Твердження 1. Якщо функція $g(x)$ визначена при всіх x із **ОДЗ** нерівності $f_1(x) > f_2(x)$, і при цих значеннях $g(x) > 0$, то нерівність $f_1(x) \cdot g(x) > f_2(x) \cdot g(x)$, рівносильна даній нерівності.

Твердження 2. Якщо функція $g(x)$ визначена при всіх x із **ОДЗ** нерівності $f_1(x) > f_2(x)$, і при цих значеннях $g(x) < 0$, то нерівність $f_1(x) \cdot g(x) < f_2(x) \cdot g(x)$, рівносильна даній нерівності.

Теорема 4. Якщо до двох частин нерівності $f_1(x) > f_2(x)$ застосувати деяку зростаючу функцію g і при цьому не звужувати ОДЗ нерівності, то дістанемо рівносильну даній на її ОДЗ нерівність $g(f_1(x)) > g(f_2(x))$.

Лінійні нерівності з однією змінною

Лінійною називається нерівність виду $ax > b, ax < b, ax \geq b, ax \leq b$, де x — невідоме, а a і b — вирази, що не залежать від x.

Якщо число a відмінне від нуля, то ліву і праву частини нерівності можна поділити на a. При цьому використовуємо властивості числових нерівностей: якщо $a > 0$, то знак нерівності залишаємо без змін; якщо ж $a < 0$, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

Схема розв'язування лінійних нерівностей така:

$ax > b$:	$ax < b$:
1) якщо $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$, 2) якщо $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, 3) якщо $a = 0$, $b \geq 0$, то розв'язків не має, 4) якщо $a = 0$, $b < 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$.	1) якщо $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$, 2) якщо $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$, 3) якщо $a = 0$, $b > 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$, 4) якщо $a = 0$, $b \leq 0$, то розв'язків не має .

Приклад 1. Розв'яжіть нерівності:

1) $3x \geq -15$; 2) $-5x < 20$.

Розв'язання. 1) поділимо ліву і праву частини нерівності на 3. Дістанемо $x \geq -5$.

2) поділимо ліву і праву частини нерівності на -5, при цьому змінивши знак на протилежний. Маємо $x > -4$.

Нерівності виду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є множина всіх дійсних чисел.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівності:

1) $0x < 1$; 2) $0x \geq 5$.

Розв'язання. 1) Яким би не було значення x ліва частина нерівності $0x < 1$ дорівнює нулю. Нерівність $0 < 1$ — правильна, тому множиною розв'язків нерівності є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

2) Міркуємо аналогічно, але нерівність 0 ≥ 5 - неправильна, тому нерівність 0х ≥ 5 не має розв’язків.

Розв’язування нерівностей, що зводяться до лінійних.

Використовуючи властивості нерівностей, аналогічно до розв’язування рівнянь, можна розв’язувати і нерівності.

Приклад. Знайдіть найменший цілий розв’язок нерівності

$$\frac{x+1}{2}-\frac{1-5x}{5}>x$$

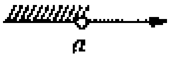
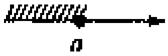
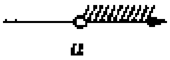
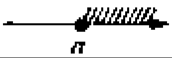
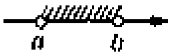
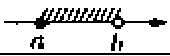
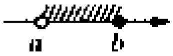
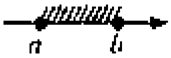
Розв’язання. Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів - число 10. Маємо

$$\frac{10(x+1)}{2}-\frac{10(1-5x)}{5}>10x;\,5(x+1)-2(1-5x)>10x;\,5x+5-2+10x>10x;$$

$$5x+\cancel{10x}-\cancel{10x}>2-5;\;\;5x>-3;\;\;x>-\frac{3}{5}.$$

Найменшим цілим розв’язком нерівності число 0.

Розглянемо таблицю, в якій відображено відповідність між умовою, зображенням на малюнку та позначенням.

№	Умова	Зображення на малюнку	Позначення
1	x < a		(-∞; a)
2	x ≤ a		(-∞; a]
3	x > a		(a;+∞)
4	x ≥ a		[a;+∞)
5	a < x < b		(a; b)
6	a ≤ x < b		[a; b)
7	a < x ≤ b		(a; b]
8	a ≤ x ≤ b		[a; b]

Перерізом числових проміжків називають множину, що складається з чисел, які належать кожному з цих проміжків.

Знак ∩- знак перерізу.

Наприклад, $[1;-2)\cap[0;4]=[0;2)$ (ілюстрація на малюнку 2), а $[-1;0]\cap(2;4]=\varnothing$ (ілюстрація на малюнку 3).

мал. 2 мал. 3

Об’єднанням числових проміжків називають множину, що складається з чисел, які належать хоча б одному з проміжків.

Знак ∪ - знак об’єднання.

Наприклад, $[-1;2)\cup[0;4]=[-1;4]$ (мал. 2). Зауважимо, що об’єднання проміжків не завжди є проміжком. Наприклад, множина $[-1;0]\cup(2;4]$ не є проміжком (мал. 3).

Квадратні нерівності

Нерівності виду

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\geq 0,$$
$$ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0,$$

де x — змінна, a, b, c - будь-які числа, причому $a \neq 0$ називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною) Приклади таких нерівностей:

$$3x^2+x-4>0;\quad 3x^2-9\leq 0,\ 7x^2-8x<0;\quad x^2-x+7\geq 0.$$

Розв'язування квадратної нерівності доцільно проводити так:

1. Знаходимо корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);

2. Якщо знак нерівності > або <, то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони не будуть входити до множини розв'язків); якщо знак нерівності ≥ або ≤, то корені квадратного тричлена позначаємо заштрихованими точками, які будуть входити до множини розв'язків нерівності;

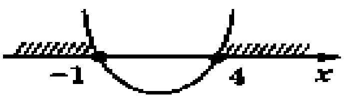
3. Схематично зобразимо графік функції $y = ax^2 + bx + c$, який є параболою, враховуючи напрям віток: при $a > 0$, вітки напрямлені вгору, а при $a < 0$ - вниз та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);

4. Знаходимо на осі x проміжки. На яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність;

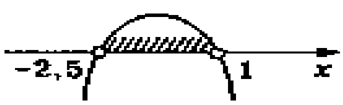
5. Записуємо відповідь.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність: 1)$x^2-3x-4\geq 0$;   2)$-2x^2-3x+5>0$.

Розв'язання. 1) Рівняння $x^2-3x-4=0$ має корені $x_1 = -1$ і $x = 4$. Оскільки знак нерівності ≥, зображуємо ці корені зафарбованими точками на осі x (вони входять до множини розв'язків). Схематично зображуємо графік функції $y = x^2 - 3x - 4$. Це парабола, вітки якої напрямлені вгору, що перетинає вісь x у точках -1 і 3 (мал. 4). Нерівність $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ виконується, якщо $x \leq -1$ або $x \geq 4$. Відповідь можна записати у вигляді об'єднання проміжків $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.



мал. 4



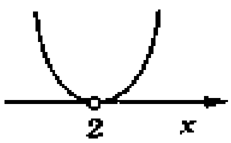
мал. 5

2) Рівняння $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ має корені $x_1 = -2{,}5$ і $x = 1$. Оскільки знак нерівності <, зображуємо ці корені «виколотими» точками на осі x (вони не будуть входити до множини розв'язків). Схематично зображуємо графік функції $y = -2x^2 - 3x + 5$. Це парабола, вітки якої напрямлені вниз, що перетинає вісь x у точках $x = -2{,}5$ і $x = 1$ (мал. 5).

Нерівність $-2x^2 - 3x + 5 > 0$ виконується, якщо $-2{,}5 < x < 1$. Відповідь можна записати у вигляді проміжку (-2,5;1).

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Розв'язання. $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x = 2$. Оскільки знак нерівності >, то зображуємо точку 2 «виколотою» на осі x. Схематично зображуємо графік функції $y = x^2 - 4x + 4$ (мал. 6). Це парабола, вітки якої напрямлені вгору, що має з віссю абсцис одну спільну точку 2 (кажуть, що парабола дотикається до осі x). Функція набуває додатніх значень при будь-якому значенні x, крім 2. Множиною розв'язків нерівності є об'єднання проміжків $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

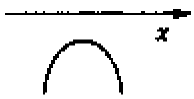


мал. 6

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: 1)$-x^2+2x-5<0$;   2)$-x^2+2x-5\geq 0$.

Розв'язання. 1) Рівняння $-x^2 + 2x - 5 = 0$ коренів не має $\left(D=2^2-4(-1)(-5)<0\right)$.

Графіком функції $y = -x^2 + 2x - 5$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз, і яка не перетинає вісь x (мал. 7). Оскільки всі точки параболи розміщені нижче осі x, то множиною розв'язків нерівності $-x^2 + 2x - 5 < 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty;+\infty)$.



мал. 7

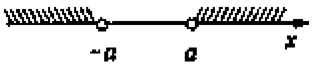
2) Міркуємо спочатку аналогічно попередній нерівності. Але оскільки жодна з точок параболи не розміщена вище осі x і не належить цій осі, то нерівність $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$ не має розв'язків.

Нерівності, що містять змінну модуля

1. Нерівність виду $|f(x)| > a$ та $|f(x)| \geq a$, a — число.

Розглянемо спочатку нерівність $|x| > a$. Якщо $a < 0$, то очевидно, що x - будь-яке число, оскільки $|x| \geq 0$ для всіх значень x.

Якщо $a \geq 0$, то позначимо на числовій прямій корені рівняння $|x| = a$, тобто числа $x_1 = -a$; $x_2 = a$. Вони розбивають числову пряму на три інтервали (мал. 8). Легко перевірити, взявши по одній «пробній» точці у кожному інтервалі, що нерівність задовольняють такі значення x : $x < -a$ або $x > a$.



мал. 8

Узагальнюючи маємо: множиною розв'язків нерівності $|f(x)| > a$ у випадку $x < 0$ є всі числа з ОДЗ функції f(x), а у випадку $a \geq 0$ ця нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$$

Аналогічно можна розв'язувати нерівність $|f(x)| \geq a$.

Приклад. Розв'язати нерівність $|x - 2| > 3$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності нерівностей

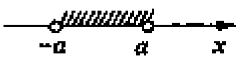
$$\left[\begin{array}{l} x - 2 > 3, \\ x - 2 < -3. \end{array}\right.$$

Далі маємо $\left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -1. \end{array}\right.$ Отже, $x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

2. Нерівності виду $f(x) < a$ та $|f(x)| \leq a$, a — число.

Спочатку розглянемо нерівність $|x| < a$. Якщо $a < 0$, то очевидно, що нерівність не має розв'язків, оскільки $|x| \geq 0$ для всіх значень x.

Якщо $a \geq 0$, то міркуючи аналогічно нерівності $|x| > a$ (мал. 9), матимемо, що нерівність задовольняють такі значення x: $-a < x < a$.



мал. 9

Узагальнюючи маємо: нерівність $|f(x)| < a$ у випадку $a < 0$ немає розв'язків; а у випадку $a \geq 0$ ця нерівність рівносильна подвійній нерівності $-a < f(x) < a$.

Аналогічно можна розв'язати нерівність $|f(x)| \leq a$.

Приклад. Розв'язати нерівність $|x + 3| \leq 5$.

Розв'язання: Маємо $-5 \leq x + 3 \leq 5$. Далі $-5 - 3 \leq x \leq 5 - 3$; $-8 \leq x \leq 2$.

Зауважимо, що у випадку коли f(x) не є лінійною функцією, від подвійної нерівності $-a < f(x) < a$ (або $-a \leq f(x) \leq a$) доцільно перейти до системи

$$\begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad \left(\text{або } \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}\right).$$

3. Загальний підхід до розв’язання нерівностей, що містять знак модуля.

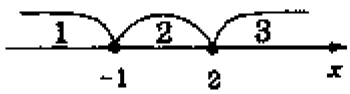
При розв’язані більш складних нерівностей, що містять знак модуля, можна застосувати той самий підхід, що й при розв’язуванні рівнянь, які містять кілька знаків модулів.

Оформляти розв’язування на кожному з утворених проміжків доцільно у вигляді системи нерівностей, одна з яких — умова, накладена на x, а інша нерівність — наслідок, яку отримали після розкриття модулів. Відповідно початковій нерівності є об’єднання відповідей, отриманих на кожному з розглянутих проміжків.

Приклад. Розв’яжіть нерівність $|x+1| + |2x-4| > 5$.

Розв’язання: 1) ОДЗ: $x \in R$.

2) $x + 1 = 0$, коли $x = -1$; $2x - 4 = 0$, коли $x = 2$. Отже, $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ - нулі підмодульних виразів (мал. 10).



мал. 10

3) Позначимо нулі підмодульних виразів на числовій прямій «жирними» точками (оскільки вони входять в ОДЗ) і маємо три проміжки $(-\infty;-1]$, $(-1;2]$, $(2;+\infty)$.

4) Якщо $x \in (-\infty;-1]$, тобто $x \leq -1$, маємо $x+1 \leq 0$ і $|x+1| = -(x+1)$; $2x-4 < 0$ і $|2x-4| = -(2x-4)$. Отже, на проміжку $(-\infty;-1]$ маємо систему

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ -(x+1)-(2x-4) > 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ x < -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad x \leq -1.$$

Якщо $x \in (-1;2]$, тобто $-1 < x \leq 2$, маємо $x+1 > 0$ і $|x+1| = x+1$; $2x-4 \leq 0$ і $|2x-4| = -(2x-4)$. Отже, на проміжку $(-1;2]$ маємо систему

$$\begin{cases} -1 < x \leq 2 \\ (x+1)-(2x-4) > 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x \leq 2, \\ x < 0, \end{cases} \quad -1 < x < 0.$$

Якщо $x \in (2;+\infty)$, тобто $x > 2$, маємо $x+1 > 0$ і $|x+1| = x+1$; $2x-4 > 0$ і $|2x-4| = 2x-4$. Отже, на проміжку $(2;+\infty)$ маємо систему

$$\begin{cases} x > 2, \\ x+1+2x-4 > 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 3x > 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x > 2\dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad x > 2\dfrac{2}{3}.$$

5) Об’єднуючи відповіді, отримані на кожному з розглянутих проміжків, маємо $x < 0$ або $x > 2\dfrac{2}{3}$. Отже, $x \in (-\infty;0) \cup (2\dfrac{2}{3};+\infty)$.

Метод інтервалів розв’язування нерівностей.

Найбільш ефективним методом розв’язування нерівностей, заданих у вигляді добутку деяких функцій, є метод інтервалів. Метод інтервалів розв’язування нерівностей грунтується на такій фундаментальній властивості монотонних функцій: будь-яка монотонна функція або зберігає свій знак на області визначення, або змінює його точно один раз у своєму нулі (тобто графік функції або не перетинає вісь абсцис, або перетинає її точно один раз).

Перед тим як переходити до самого методу інтервалів, поговоримо про характер монотонності суперпозиції функцій. Нехай $y = f(g(x))$ - суперпозиція функцій. Тоді, якщо існує суперпозиція функцій $y = f(g(x))$, маємо:

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими, то й $y = f(g(x))$ буде зростаючою;

2. Якщо функція f (x) є зростаючою, а функція g (x) - спадною, то y = f (g (x)) буде спадною;

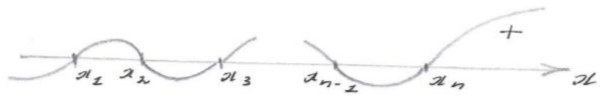
3. Якщо функція f (x) є спадною, а функція g (x) - зростаючою, то y = f (g (x)) буде спадною;

4. Якщо функції f (x) і g (x) є спадними, то y = f (g (x)) буде зростаючою. З цих тверджень можна зробити висновок, що при співпадаючому характері монотонності функцій їх суперпозиція монотонно зростає, а при не співпадаючому характері монотонності - їх суперпозиція монотонно спадає.

Нехай нам задана нерівність: $f_1(x)\, f_2(x)\dots f_n(x) \geq 0 \quad (f_1(x)\, f_2(x)\dots f_n(x) \leq 0\ )$.

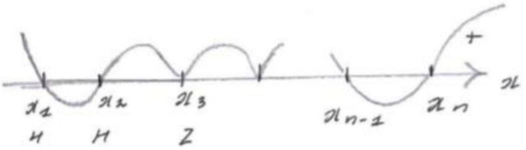
Нехай усі функції $f_i(x)$ і всюди визначені, монотонні і кожна з них має свій «нуль» x_i . Нехай ще все $x_i, i=\overline{1,n}$ для різних индексів i різні.

Тоді визначаємо знак добутку на $+\infty$. Для визначення знака виразу на $+\infty$ ми використаємо монотонність $f_i(x)$. Графік функції $f_i(x)$ перетинає вісь абсцис точно один раз (в силу монотонності $f_i(x)$), тобто має один знак на інтервалі $(-\infty; x_i)$ і протилежний знак на інтервалі $(x_i, +\infty)$. Тому всі такі функції на $+\infty$ додатні, якщо вони монотонно зростаючі, і від'ємні, якщо вони монотонно спадні (у разі коли монотонна функція не має нуля, вона зберігає свій знак на всій області визначення). Завдяки цьому ми можемо визначати знак добутку монотонних функцій на $+\infty$. Зауважимо, що знак усього добутку на $+\infty$ можна підрахувати й інакше. Досить обчислити значення всіх функцій $f_i(x)$ в деякій точці, що лежить правіше останнього з нулів функцій $f_i(x)$ і визначити знак всього добутку в цій точці. Цей знак і буде знаком всього добутку на $+\infty$. Проте, другий метод підрахунку знака виразу на $+\infty$ менш ефективний, тому що, на відміну від першого, вимагає додаткових обчислень. Після цього ми будуємо «змійку сталості знаку» (зміни знаків) початкового добутку, рухаючись по осі справа наліво та враховуючи, що вихідний добуток буде змінювати свій знак у кожному з нулів функцій $f_i(x)$ (оскільки в такому нулі тільки один із множників початкового добутку, тобто тільки одна з функцій $f_i(x)$, буде змінювати свій знак). Графічно це означає, що «змійка» буде перетинати вісь у кожному з нулів функцій $f_i(x)$. Зауважимо, що такий метод побудови «змійки» виправданий тільки в тому випадку, коли серед нулів функцій $f_i(x)$ немає однакових (всі нулі різні).



Розглянемо тепер техніку побудови «змійки» у разі, коли нулі функцій $f_i(x)$ можуть співпадати. Нехай деяке число x_0 служить нулем k функцій $f_i(x)$. У цьому випадку будемо говорити, що нуль x_0 має кратність k .

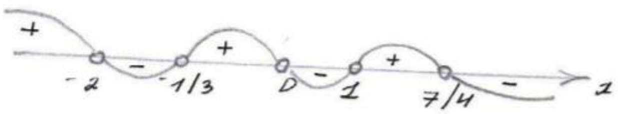
Якщо нуль має парну кратність, (тобто є нулем парної кількості монотонних функцій, що входять у нерівність), то при проходженні через нього знак добутку не змінюється (тобто «змійка» торкається осі абсцис і залишається у вихідній напівплощині). Якщо ж нуль має непарну кратність, (тобто є нулем непарної кількості монотонних функцій, що входять у нерівність), то при проходженні через нього знак добутку змінюється на протилежний (тобто «змійка» перетинає вісь абсцис і переходить в іншу напівплощину). Тому, в цьому випадку, наша «змійка» буде мати вигляд:



Приклад. Розв'язати нерівність: $(x+2)(x^2-x)(3x+1)(7-4x)<0$.

Розв'язання. Скористаємося вище викладеним методом інтервалів. Зведемо нерівність до виду (*): $(x+2)x(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(7-4x)<0$ (*)

Функції $y=x+2, y=x, y=x-1, y=x+\frac{1}{3}$ є зростаючими, а функція $y=7-4x$ є спадною. Перші три функції приймають додатні значення на + ∞, а остання функція набуває від'ємних значень на + ∞. Тому загальним знаком добутку на + ∞ буде мінус. Відкладемо нулі функцій $-2;0;1;-\frac{1}{3};\frac{7}{4}$ на числовій осі. Всі нулі функції є нулями непарної кратності, тому одержуємо «змійку сталості знаку»:



Розв'язками вихідної нерівності будуть такі проміжки, на яких вираз приймає від'ємні значення («змійка» знаходиться нижче осі абсцис). Граничні точки інтервалів не включаються у відповідь, адже вихідна нерівність є строгою.

Відповідь: $x\in\left(-2;-\frac{1}{3}\right)\cup(0;1)\cup\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$.

Хотілося б зауважити, що метод інтервалів можна застосовувати і для нестрогих нерівностей. Відмінність буде в тому, що нулі функцій для даної нерівності будуть входити в множину розв'язків вихідної нерівності.

Варто відзначити, що метод інтервалів також можна застосовувати при розв'язуванні нерівностей, в яких є дроби, тобто дробно-раціональні нерівності. Щоб застосувати метод інтервалів для таких нерівностей їх зазвичай зводять до стандартного виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \text{ або } \frac{P(x)}{Q(x)}<0 \text{ (у випадку строгої нерівності),}$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0$ або $\frac{P(x)}{Q(x)}\le 0$ (у випадку нестрогої нерівності), де $P(x),Q(x)$ - деякі функції від однієї змінної. Зауважимо, що $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \Leftrightarrow P(x)Q(x)>0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}<0 \Leftrightarrow P(x)Q(x)<0$ і

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x)\ge 0 \\ Q(x)\ne 0 \end{cases}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)Q(x)\le 0 \\ Q(x)\ne 0 \end{cases}$$

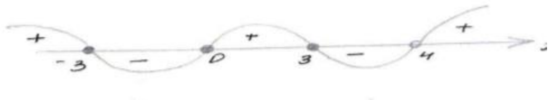
Таким чином, нерівності з дробами зводяться до нерівностей, які задані за допомогою добутку, а до останніх може бути застосований метод інтервалів, якщо функції $P(x),Q(x)$ розкладаються в добуток монотонних множників.

З огляду на сказане вище, метод інтервалів можна відразу застосовувати до нерівностей з дробами в яких чисельник і знаменник розкладені на монотонні множники. Для цього знаходять всі нулі функцій, які знаходяться у чисельнику та знаменнику дробу. Далі ці числа відкладають на числовій осі. Щоб визначити знак нерівності на + ∞ користуються монотонністю функцій чисельника і знаменника. У випадку строгої нерівності нулі функцій чисельника і знаменника не входять в множину рішень нерівності; у разі нестрогої нерівності нулі функцій чисельника входять в множину рішень нерівності, якщо тільки вони не є нулями знаменника.

Приклад. Розв’язати нерівність: $\dfrac{(x+3)\left(x^2-3x\right)}{(x-4)} \geq 0$.

Розв’язання. Зведемо нерівність до виду: $\dfrac{(x+3)x(x-3)}{(x-4)} \geq 0$.

Всі функції чисельника і знаменника є функціями зростаючими. Отже, знаком всього виразу (дробу) на $+\infty$ буде плюс. Нулями функцій чисельника і знаменника є $-3;\ 0;\ 3;\ 4$. Відкладемо ці числа на числовій осі, при цьому врахуємо, що 4 не входить в множину рішень нерівності (зображується незаштрихованим кружечком на осі):



Відповідь: $x \in (-\infty;-3] \cup [0;3] \cup (4;+\infty)$.

Ірраціональні нерівності.

Нерівність називають **ірраціональною**, якщо вона містить невідомі під знаком кореня.

Розглянемо деякі види ірраціональних нерівностей та методи їх розв’язування.

До найпростіших ірраціональних нерівностей віднесемо наступні: $\sqrt[n]{x} > a$; $\sqrt[n]{x} \geq a$, $\sqrt[n]{x} < a$, $\sqrt[n]{x} \leq a$, де а - деяке число.

Якщо n - непарне число, то при піднесенні до степеня n лівої та правої частини нерівності, отримаємо нерівність рівносильну даній.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: 1) $\sqrt[5]{x} > -1$; 2) $\sqrt[3]{x} \leq 2$.

Розв’язання. 1) Піднесемо до п’ятого степеня обидві частити нерівності. Маємо $\left(\sqrt[5]{x}\right)^5 > (-1)^5$; $x > -1$.

2) Піднесемо до третього степеня обидві частити нерівності. Маємо $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \leq x^3$; $x \leq 8$.

Якщо n - парне число, то при піднесенні до степеня n отримаємо (на ОДЗ даної нерівності) нерівність, рівносильну даній лише за умови а ≥ 0. Отже, при розв’язуванні найпростіших ірраціональних нерівностей при парному n треба звертати увагу на число а (на ОДЗ нерівності).

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність:

1) $\sqrt[4]{x} \geq 2$; 2) $\sqrt[6]{x} < 1$;

3) $\sqrt[10]{x} \geq -1$; 4) $\sqrt[8]{x} < -2$.

Розв’язання. 1) ОДЗ даної нерівності $x \geq 0$. На ОДЗ піднесемо до четвертого степеня невід’ємні ліву та праву частини даної нерівності, маємо $\left(\sqrt[4]{x}\right)^4 \geq 2^4$; $x \geq 16$. Всі значення x, які задовольняють умову $x \geq 16$, задовольняють і ОДЗ.

2) ОДЗ даної нерівності $x \geq 0$, після піднесення до шостого степеня невід’ємні лівої та правої частин даної нерівності, матимемо $x < 1$. Отже, остаточно розв’язками нерівності є такі числа x, що $0 \leq x < 1$.

3) Оскільки $\sqrt[10]{x} \geq 0$, для всіх x, що задовольняють ОДЗ нерівності, то розв’язками нерівності $\sqrt[10]{x} \geq -1$ будуть всі значення x з ОДЗ, тобто $x \geq 0$.

4) Оскільки $\sqrt[8]{x} \geq 0$ для всіх x, що задовольняють ОДЗ нерівності, то нерівність $\sqrt[8]{x} < -2$ не має розв’язків.

Аналогічно розв’язуються нерівності, якщо замість x є деякий вираз $f(x)$.

Приклад 3. Розв’яжіть нерівність $\sqrt[4]{x-1} - 1 \leq 3$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна такій подвійній $0 \le x - 1 < 3^4$ (нерівність $x - 1 \ge 0$ є ОДЗ даної нерівності, а $x - 1 \le 3^4$ отримали після піднесення початкової нерівності до четвертого степеня). Маємо $0 \le x - 1 \le 81$; $1 \le x \le 82$.

Нерівності виду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \ge \sqrt[n]{g(x)}$.

Подамо у вигляді таблиць схеми розв'язування нерівностей $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \ge \sqrt[n]{g(x)}$, де $n \ge 2$ - натуральне число.

$\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, де $n \ge 2$ - натуральне число	
n - парне	n - непарне
$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$	$f(x) > g(x)$
$\sqrt[n]{f(x)} \ge \sqrt[n]{g(x)}$, де $n \ge 2$ - натуральне число	
n - парне	n - непарне
$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$	$f(x) \ge g(x)$

Приклад. Розв'яжіть нерівності:

$$1)\ \sqrt[3]{x-1} \ge \sqrt[3]{7-3x};$$

$$2)\ \sqrt[4]{4x-2} \ge \sqrt[4]{3x+1}.$$

Розв'язання. 1) $x - 1 \ge 7 - 3x$; $4x \ge 8$; $x \ge 2$.

2) Нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 4x - 2 > 3x + 1 \\ 3x + 1 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x > 3 \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \quad x > 3.$$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < [g(x)]^2 \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі

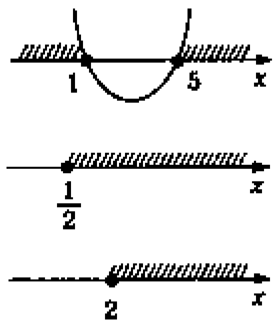
$$\begin{cases} f(x) \le [g(x)]^2 \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{2x-1} \le x - 2$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x - 1 \le (x-2)^2, \\ 2x - 1 \ge 0, \\ x - 2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 1 \le x^2 - 4x + 4, \\ x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x \ge 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \ge 0, \\ x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x \ge 2; \end{cases}$$

Звідси отримаємо $x \ge 5$ (графічна ілюстрація на малюнку 11).



мал. 11

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > [g(x)]^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq [g(x)]^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3x+4} \geq x$.

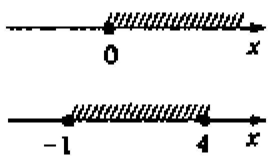
Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 0, \\ 3x+4 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x+4 \geq x^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} x < 0, \\ 3x+4 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ $-\dfrac{4}{3} \leq x < 0$.

2) $\begin{cases} x \geq 0, \\ 3x+4 \geq x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ -1 \leq x \leq 4; \end{cases}$

$0 \leq x \leq 4$ (мал. 12).



мал. 12

Об'єднуючи отримані в пункті 1 і 2 результати, отримаємо $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq 4$.

Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} > a$ $(\geq a, < a, \leq a)$, де а - число, $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} > \sqrt{t(x)}$ та подібні починаємо розв'язувати із знаходження ОДЗ нерівності. Після цього застосовуємо прийоми, знайомі нам по розв'язуванню відповідних рівнянь, та прийоми розв'язування простіших нерівностей.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} \geq 1$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

звідси маємо x ≥ 0. Перенесемо радикал $\sqrt{x}$ у праву частину нерівності: $\sqrt{x+3} \geq 1+\sqrt{x}$. Піднесемо до квадрата ліву і праву частини отриманої нерівності. Отже, початкова нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3 \geq 1+2\sqrt{x}+x; \end{cases}$$

розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2\sqrt{x} \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x} \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1; \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Лекція 6
Системи лінійних рівнянь. Системи квадратних рівнянь. Системи лінійних і квадратних нерівностей.

Кілька рівнянь з двома (або більше) змінними утворюють **систему рівнянь,** якщо ставиться задача знайти множину спільних розв'язків цих рівнянь. Систему двох рівнянь з двома змінними позначають фігурними дужками і, зазвичай, записують у вигляді

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}.$$

Фігурна дужка відіграє роль сполучника «і».

Розв'язати систему рівнянь – значить знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Система називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку.

Система рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має скінченне число розв'язків, і **невизначеною,** якщо вона має нескінченну множину розв'язків.

Дві системи називаються **рівносильними,** якщо вони мають ту саму множину розв'язків. Або **рівносильними системами** називаються системи рівнянь, якщо корені однієї системи є коренями іншої і навпаки.

Симетричною системою рівнянь називається система, всі рівняння якої симетричні.

Вираз $f(x,y)$ називається **симетричним,** якщо при заміні *x* на *y*, *y* на *x* він не змінюється.

Приклади симетричних виразів:

$$f(x,y) = x + y;\ f(x,y) = x^2 + y^2;\ f(x,y) = x^3 + y^3;$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy;\ \ f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 2y^2$$

Вирази $(x+y)$ і xy називаються **основними симетричними многочленами** з двома змінними. Усі симетричні вирази з двома змінними виражаються через основні симетричні многочлени, наприклад:

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy;\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = (x+y)^3 - 3(x+y)xy.$$

Якщо на розв'язки рівнянь буде накладена вимога, щоб вони задовольняли хоча б одному з рівнянь, то таке сполучення рівнянь називають **сукупністю** і позначають так:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{array}\right.$$

Квадратна дужка означає нерозділове «або».

Основні методи розв'язування систем рівнянь:

1) **Метод підстановки.** Спочатку за допомогою якого-небудь рівняння системи виражають одну змінну через іншу. Отриманий вираз підставляють в інше рівняння системи, в результаті чого приходять до рівняння з однією змінною, потім розв'язують це рівняння і знаходять відповідне значення іншої змінної.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(y), \\ h(y) = 0. \end{cases}$$

2) **Метод додавання (віднімання).** При розв'язуванні системи цим методом переходять від даної системи до рівносильної їй системи, в якій одне з рівнянь містить лише одну змінну.

При цьому звичайно множать одне або обидва рівняння на числові множники таким чином, щоб коефіцієнти при x або y були однаковими, але з протилежними знаками.

$$\begin{cases} f(x,y)=a, \\ g(x,y)=b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\pm g(x,y)=a\pm b, \\ g(x,y)=b. \end{cases}$$

Аналогічний цьому методу є метод множення (ділення):

$$\begin{cases} f(x,y)=a, \\ g(x,y)=b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y)=a\cdot b, \\ g(x,y)=b. \end{cases}$$

3) **Метод заміни змінної** полягає в тому, щоб за допомогою введення нової змінної спростити дану систему:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x,y)=t, \\ \varphi(t)=0. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} h_1(x,y)=t, \\ h_2(x,y)=p; \end{cases} \begin{cases} \varphi_1(t,p)=0, \\ \varphi_2(t,p)=0. \end{cases}$$

4) **Метод розкладання на множники** полягає в розкладенні одного з рівнянь системи на множники (якщо це можливо) з метою одержання сукупності двох більш простих систем рівнянь.

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases}$$

Якщо $f(x,y)=f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)$, то дана система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x)=0, \\ g(x,y)=0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x-7y=1, \\ 4x+9y=38. \end{cases}$

1. Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу.

$$3x=1+7y,$$
$$x=\frac{1+7y}{3}.$$

2. Замість цієї змінної підставляємо в друге рівняння системи утворений вираз.

$$4\cdot\frac{1+7y}{3}+9y=38.$$

3. Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною.

$$4(1+7y)+3\cdot 9y=3\cdot 38,$$
$$4+28y+27y=114,$$
$$55y=110,$$
$$y=2.$$

4. Знаходимо відповідне значення другої змінної.

$$x=\frac{1+7\cdot 2}{3},$$
$$x=5.$$

5. Відповідь. (5; 2).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7x-4y=2, \\ 5x+3y=19. \end{cases}$

1. Множимо (якщо є необхідність) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній із змінних стали протилежними числами.

$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \times 3 \\ 5x + 3y = 19; & \times 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76. \end{cases}$$

2. Додаємо почленно ліві і праві частини рівнянь системи.

$$41x = 82.$$

3. Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.

$$x = 2.$$

4. Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної.

$$7 \cdot 2 - 4y = 2,$$
$$-4y = -12,$$
$$y = 3.$$

5. Відповідь. (2;3).

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом, необхідно:

1) побудувати графіки рівнянь на одній координатній площині;

2) знайти координати точки перетину графіків або впевнитися в тому, що графіки рівнянь не перетинаються (є паралельними) або збігаються;

3) якщо координати точки перетину - цілі числа, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язок системи визначити наближено;

4) дати відповідь.

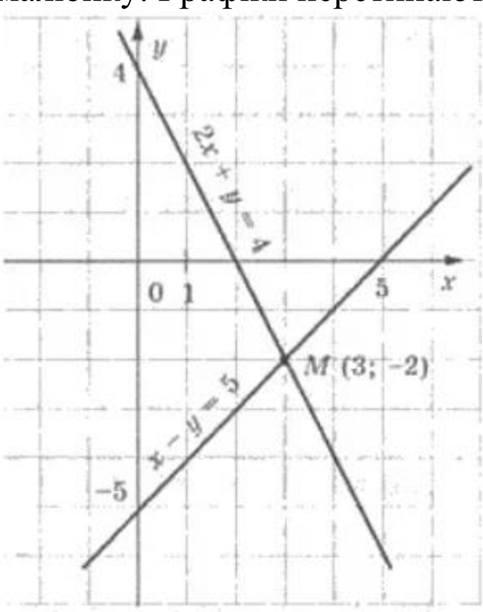
Приклад. Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Для того щоб побудувати графіки даних функцій, необхідно записати їх в такому вигляді $\begin{matrix} x - y = 5 \Rightarrow -y = 5 - x \Rightarrow y = x - 5 \\ 2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \end{matrix}$. Графіками даних рівнянь є прямі. Прямі будуються за двома точками, тобто

x	y
0	-5
5	0

x	y
0	4
2	0

Графіки рівнянь зображено на малюнку. Графіки перетинаються у точці M(3;-2).



Перевірка: 3 - (-2) = 5; 2 · 3 + (-2) = 4. Отже, пара чисел (3;-2) є розв'язком заданої системи.

Системи квадратних рівнянь

Якщо в системі рівнянь з двома змінними одне з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними, то таку систему рівнянь можна розв'язувати способом підстановки.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3y^2 + xy = -1, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

Розв'язання. Виразимо з другого рівняння змінну x через y. Маємо: x = 5 + 3y.

Підставляємо в перше рівняння системи замість x вираз 5 + 3y та отримаємо рівняння із змінною y.

$$3y^2 + (5+3y)y + 1 = 0; \quad 6y^2 + 5y + 1 = 0.$$

Розв'язавши його, маємо $y_1 = -\frac{1}{3};\ y_2 = -\frac{1}{2}.$

Далі,

$$1)\ y_1 = -\frac{1}{3};\ x_1 = 5 + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 4.$$

$$2)\ y_2 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 5 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{2}.$$

Отже, розв'язками системи є пари чисел $\left(4; -\frac{1}{3}\right)$ і $\left(3\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

Так само, як і для систем двох лінійних рівнянь з двома змінними, спосіб додавання доцільно використовувати, якщо в результаті додавання рівнянь системи отримаємо рівняння з однією змінною.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - xy = 20, \\ x + xy = -10. \end{cases}$

Розв'язання. Складемо почленно два рівняння системи. Отримаємо 2x = 10, x = 5. Підставивши це значення, наприклад, у перше рівняння дістанемо 5 – 5y = 20; 5y = 15; y = -3. Отже розв'язком системи є пара (5; -3).

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 2xy = 21, \\ x - xy = 9. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння системи на -2. Маємо

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 21, \\ -2x + 2xy = -18. \end{cases}$$

Складемо почленно рівняння системи: $x^2 — 2x = 3$, звідси $x^2 - 2x – 3 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 3$. Розглянемо ці випадки.

$$1)\ x_1 = -1;\ -1 + y = 9;\ y = 10;$$

$$2)\ x_2 = 3;\ 3 - 3y = 9;\ y = -2.$$

Отже, розв'язками системи є пари чисел (-1; 10) і (3; -2).

Також спосіб додавання доцільно використовувати в тому випадку, коли в результаті додавання рівнянь системи отримаємо лінійне рівняння з двома змінними.

Приклад 4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + xy = 4, \\ y + 2xy = 9. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо перше рівняння системи на -2. Маємо

$$\begin{cases} -2x - 2xy = -8, \\ y + 2xy = 9. \end{cases}$$

Складемо почленно рівняння системи y - 2x = 1. Звідси виразимо y через x: y = 1 + 2x. Підставимо у перше рівняння заданої системи замість y вираз 1 + 2x.

Маємо: $x + x(1+2x) = 4$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

Далі,

1) $x_1 = 1$; $1 + 1y = 4$; $y = 3$;

2) $x_2 = -2$; $-2 - 2y = 4$; $y = -3$.

Отже, розв'язками системи є пари чисел (1; 3), (-2; -3).

Деякі системи рівнянь другого степеня (а також системи, в які входять рівняння степеня більше другого) зручно розв'язувати, використовуючи заміну змінних.

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y - xy = 11, \\ xy(x-y) = -30. \end{cases}$

Розв'язання. Зробимо заміну x - y = u; xy = t. Маємо систему рівнянь $\begin{cases} u - t = 11, \\ ut = -30. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему способом підстановки, дістанемо $u_1 = 6$; $t_1 = -5$ або $u_2 = 5$; $t_2 = -6$.

1) $u_1 = 6$; $t_1 = -5$. $\begin{cases} x - y = 6, \\ xy = -5, \end{cases}$ $(5; -1)$, $(1; -5)$

2) $u_2 = 5$; $t_2 = -6$. $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = -6, \end{cases}$ $(2; -3)$, $(3; -2)$

Отже початкова система має чотири пари розв'язків: (5;-1); (1;-5); (2;-3); (3;-2).

Системи лінійних і квадратних нерівностей.

Декілька нерівностей з однією змінною можуть утворювати систему.

Якщо треба знати спільний розв'язок двох (або більшої кількості) нерівностей, то кажуть, що ці нерівності утворюють систему нерівностей.

Приклад. $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x \le 12, \end{cases}$ - система нерівностей з однією змінною.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, при якому правильною є кожна з нерівностей системи.

Число 3 є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x \le 12, \end{cases}$ оскільки нерівності $2 \cdot 3 > 4$ і $3 \cdot 3 \le 12$ є правильними.

Число 5 не є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x \le 12, \end{cases}$ оскільки нерівність $3 \cdot 5 \le 12$ - неправильна.

Розв'язати систему означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язати систему нерівностей можна за наступним планом:

1) розв'язуємо кожну нерівність системи;

2) зображуємо множину розв'язків кожної нерівності на координатній прямій;

3) знаходимо переріз множини розв'язків нерівностей, який і буде множиною розв'язків системи.

Приклад 1. Розв'яжіть систему нерівностей:

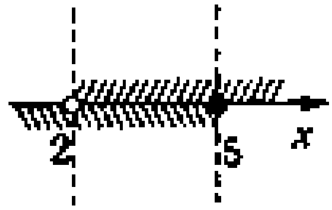
1) $\begin{cases} 3x > 6, \\ -4x \ge -20 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} -2x > 8 \\ 4x \ge 0 \end{cases}$.

Розв'язання.

$$1)\ \begin{cases} 3x > 6, \\ -4x \ge -20 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 2 \\ x \le 5 \end{cases}.$$

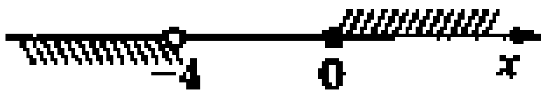
Збираємо множини розв'язків нерівностей на координатній прямій (мал. 1). Множиною розв'язків системи є переріз множин розв'язків нерівностей, а саме проміжок (2;5]. Відповідь до системи можна записати і у вигляді подвійної нерівності $2 < x \le 5$.

$$2)\ \begin{cases} -2x > 8, \\ 4x \ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -4 \\ x \ge 0 \end{cases}.$$



мал. 1

Зображуємо множини розв'язків нерівностей на координатній прямій (мал. 2). Ці множини не мають спільних елементів. Переріз цих множин є пустою множиною. Тому задана система немає розв'язків.



мал. 2

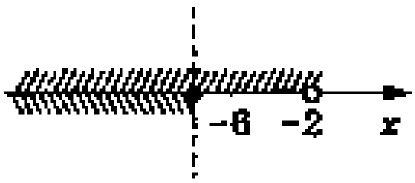
Приклад 2. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} (x+1)^2 - x(x+4) > 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} \le -5 \end{cases}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x > 5 \\ 3x + 2x \le -30 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x > 4, \\ 5x \le -30 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2, \\ x \le -6 \end{cases}.$$

Зображуємо множини розв'язків нерівностей на координатній прямій (мал. 3). Множиною розв'язків системи є проміжок (-∞;-6]. Відповідь до системи можна записати і по-іншому: $x \le -6$.



мал. 3

Графічний метод розв'язування систем є ефективним тоді, коли потрібно визначити кількість розв'язків або достатньо знайти їх наближено.

Алгоритм розв'язування системи квадратних нерівностей абсолютно аналогічний алгоритму при розв'язуванні систем лінійних нерівностей:

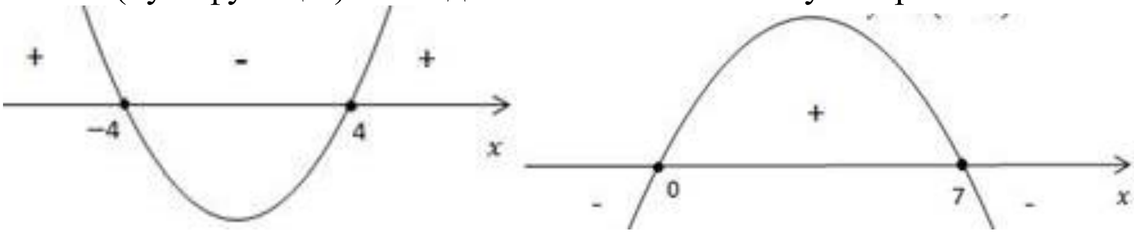
1. Розв'язати першу нерівність, знайти її проміжки значень.
2. Розв'язати другу нерівність, знайти її проміжки значень.
3. Знайти перетин двох множин значень x.

Розглянемо систему квадратних нерівностей: $\begin{cases} x^2 - 16 \ge 0, \\ 7x - x^2 \ge 0. \end{cases}$

Щоб розв'язати цю систему, потрібно першу і другу нерівність розкласти на множники:

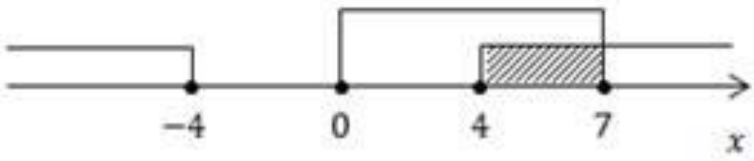
$$\begin{cases}(x-4)(x+4)\geq 0,\\ x(7-x)\geq 0;\end{cases}$$

Розв’яжемо кожну нерівність окремо, тобто методом інтервалів, тобто нанесемо на пряму наші точки (нулі функцій) і знайдемо знаки на кожному інтервалі:



Отже, розв’язком першої та другої нерівності буде

$$\begin{cases}x\in(-\infty;-4]\cup[4;+\infty),\\ x\in[0;7];\end{cases}$$



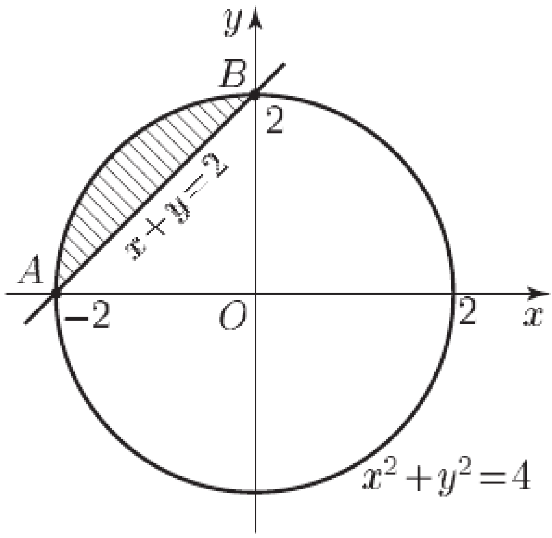
Розв’зком системи є відрізок $x\in[4;7]$.

Розглянемо декілька прикладів як розв’язують системи нерівностей графічним способом.

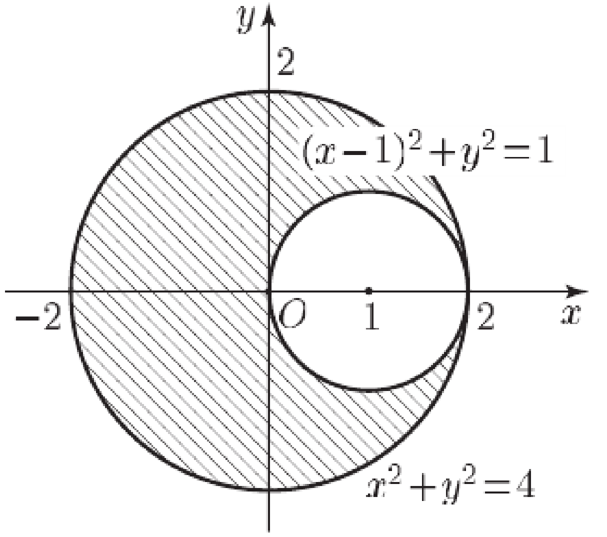
Зобразити на координатній площині Oxy фігуру, задану системою нерівностей.

а) $\begin{cases}x^2+y^2<4,\\ x+y>2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2<4,\\ (x-1)^2+y^2>1.\end{cases}$

а) Нерівність $x^2+y^2<4$ задає множину точок, які лежать в середині кола з центром в початку координат і радіусом 2, а нерівність $x+y>2$ - множину точок, які розміщені вище прямої $x+y=2.$ Ця пряма перетинає коло в точках $A(-2;0)$ і $B(0;2),$ а фігура представляє собою сегмент.



б) Дана область – це множина точок, які лежать в середині кола з центром в точці $O(0;0)$ і радіусом 2, але поза колом з центром в точці $(1;0)$ і радіусом 1.


y
2
$(x-1)^2+y^2=1$
-2
O
1
2
x
$x^2+y^2=4$