

УДК 539.3:629.7.02

С.А. ХАЛИЛОВ, М.А. ЯРОВОЙ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ТРАПЕЦИЕВИДНОЙ ОБЛАСТИ**

Дано решение плоской задачи теории упругости в напряжениях в трапециевидной области. Регулярное поле напряжений получено в замкнутом виде. Приведено численное исследование сходимости и точности решения. Полученные результаты могут быть использованы как при оценке прочности силовых элементов авиационно-космической техники, так и при исследовании их упругой устойчивости.

**плоская задача теории упругости в напряжениях, трапециевидная область, равновесные и самоуравновешенные тензорные поля, специальное семейство ортонормированных многочленов**

**Введение**

В конструкциях крыльев летательных аппаратов панели, поддерживаемые продольно-поперечным силовым набором, имеют, как правило, форму трапеции. Один из основных подходов к проектированию крупных агрегатов предполагает их декомпозицию до блочного уровня [1]. От того, как выполнен анализ отдельных блоков, во многом зависит успех проекта. Учитывая, что анализу подлежит как напряженное состояние, так и устойчивость, причем проектировщик должен иметь возможность получить необходимую ему информацию оперативно и с достаточной точностью, важность разработки аналитических приближенных подходов становится очевидной.

**Постановка и решение задачи**

Идею подхода проиллюстрируем на частном примере равнобокой трапеции, хотя сложности получения решения для общего случая носят лишь технический характер. Итак, пусть требуется найти поле усилий для пластины постоянной толщины, имеющей в плане форму равнобокой трапеции (рис. 1). Краевые условия заданы в усилиях. Вдоль верхнего и нижнего оснований трапеции действуют нормальные погонные усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Вдоль боко-

вых сторон действуют уравнивающие касательные усилия  $S$  и  $-S$ .

Расширим рассматриваемую область до прямоугольника, включающего в себя трапецию. Пусть начало системы координат находится в центре прямоугольника, а его размеры составляют  $2a$  и  $2b$ .

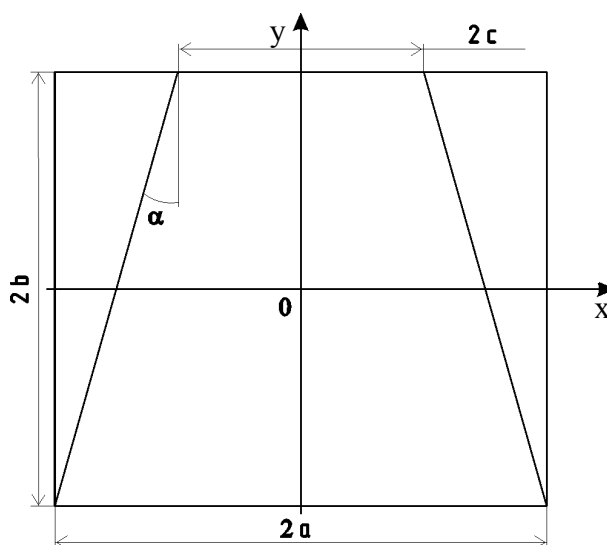


Рис. 1. Геометрические характеристики трапеции

В работе [2] дано полное решение плоской задачи теории упругости для прямоугольной области. Это решение носит многокомпонентный характер. Компоненты решения соответствуют выделенным в явном виде компонентам внешней нагрузки: равновесной ее части и самоуравновешенным вдоль отдельно взятой стороны прямоугольника нагрузкам.

С помощью простой замены переменных приведем прямоугольную область к квадратной области  $\Omega = \{ (x, y): -1 < x < 1, -1 < y < 1 \}$  с границей  $S$ . Для решения плоской задачи теории упругости необходимо найти функцию усилий  $u(x, y)$ , удовлетворяющую в области  $\Omega$  дифференциальному уравнению

$$Au(x, y) \equiv \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{\lambda^4} \cdot \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda = b/a$  – параметр удлинения прямоугольника. Погонные усилия при этом будут определяться равенствами

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{a^2 \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ N_y &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ S &= -\frac{1}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Краевые условия на границе области  $\Omega$  зададим следующим образом.

На основаниях трапеции нормальные усилия  $N_1$  и  $N_2$  продолжим по непрерывности, а касательные положим равными нулю:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, x) &= N_1; \\ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-1, x) &= N_2; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1, x) &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(-1, x) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим граничные условия на боковых сторонах трапеции. В силу симметрии ограничимся рассмотрением только левой боковой стороны. В угловых точках должны выполняться условия согласования усилий, т.е. функции – компоненты тензора усилий – не должны иметь в этих точках скачков. Рассмотрим левую верхнюю угловую точку. Исходя из краевых условий на верхнем основании трапеции, имеем в этой точке усилия:

$$N_y = N_1, \quad S = 0. \quad (4)$$

Краевые условия на левой боковой стороне трапеции связаны с компонентами тензора усилий формулами

$$\bar{N}_n = N_x \cos^2 \alpha + N_y \sin^2 \alpha - S \sin 2\alpha, \quad (5)$$

$$\bar{S} = (N_x - N_y) \sin \alpha \cos \alpha + S \cos 2\alpha. \quad (6)$$

где  $\bar{N}_n$  и  $\bar{S}$  – соответственно нормальные и касательные погонные усилия на боковых сторонах трапеции,  $\alpha$  – угол наклона боковой стороны.

Так как мы считаем, что вдоль боковой стороны действуют только касательные усилия, то, приравняв выражение (5) нулю, имеем в угловой точке:  $N_x = -N_1 \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Тогда из выражения (6) определим касательное усилие в угловой точке, действующее вдоль боковой стороны трапеции:

$$\bar{S}(y=1) = -N_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогично,

$$\bar{S}(y=-1) = -N_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Итак, учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta-1}{2\lambda\eta}$ , имеем условия

согласования усилий для левой боковой стороны трапеции:

$$\begin{aligned} \bar{S}(y=1) &= -N_1 \frac{\eta-1}{2\lambda\eta}; \\ \bar{S}(y=-1) &= -N_2 \frac{\eta-1}{2\lambda\eta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta = a/c$  – сужение трапеции.

Кроме того, касательные усилия вдоль боковых сторон трапеции должны удовлетворять условию равновесия:

$$-N_1 \frac{1}{\eta\lambda} + N_2 \frac{1}{\lambda} + \int_{-1}^1 \bar{S}(y) dy = 0. \quad (8)$$

Остальные два уравнения равновесия в силу симметрии выполняются автоматически.

Пусть касательные усилия изменяются по закону  $\bar{S} = Ay^2 + By + C$ . Три неизвестные  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются из условий (7) и (8):

$$A = \frac{3}{8} \cdot \frac{\eta+1}{\eta\lambda} (N_2 - N_1),$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \frac{\eta - 1}{\eta \lambda} (N_2 - N_1), \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\eta \lambda} (N_1(5 + \eta) - N_2(5\eta + 1)).$$

Итак, на боковых сторонах трапеции должны выполняться краевые условия:

$$\begin{aligned} \bar{N}_n &= 0; \\ \bar{S} &= Ay^2 + By + C. \end{aligned} \quad (10)$$

Будем искать решение задачи (1) в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y), \quad (11)$$

где  $u_0(x, y)$  – функция, удовлетворяющая всем наложенным краевым условиям на границе  $S$  области  $\Omega$ .

Тогда функция  $u_1(x, y)$  будет решением «жесткой» [3] задачи при  $f = -Au_0(x, y)$ :

$$\begin{aligned} Au_1(x, y) &= -Au_0(x, y) \text{ в } \Omega; \\ B u_1(x, y) &= 0 \text{ на } S, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A$  – оператор задачи (1);

$B$  – оператор краевых условий на границе  $S$ .

Функцию  $u_0(x, y)$  зададим в виде суммы функций:

$$u_0(x, y) = u_{01}(x, y) + u_{02}(x, y), \quad (13)$$

где  $u_{01}(x, y)$  – полином [2, с. 121]:

$$\begin{aligned} u_{01}(x, y) &= F_1xy + F_2x^2 + F_3y^2 + F_4xy^2 + \\ &+ F_5x^2y + F_6x^3 + F_7y^3 + F_8x^3y + \\ &+ F_9xy^3 + F_{10}x^2y^2 + F_{11}x^2y^3 + F_{12}x^3y^2 + \\ &+ F_{13}x^3y^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Десять из тринадцати коэффициентов  $F_k$  определяются из граничных условий (3) [2, с. 123], а один – из условия равновесия. Таким образом, функция  $u_{01}(x, y)$  содержит два неизвестных коэффициента  $A_1$  и  $A_2$ , соответствующих нормальным усилиям в точках  $(-1; -1)$  и  $(-1; 1)$ :

$$\begin{aligned} u_{01}(x, y) &= \frac{1}{24} \{ A_1(6y^2 - 2y^3) + A_2(6y^2 + 2y^3) + \\ &+ 6x^2a^2(N_1 + N_2) + 9x^2ya^2(N_1 - N_2) + \\ &+ 3(1 - x^2)y^3a^2(N_1 - N_2) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция  $u_{01}(x, y)$  обеспечивает выполнение требуемых краевых условий на верхней и нижней границах области  $\Omega$ . На боковых сторонах она дает линейно изменяющееся нормальное усилие, опреде-

ляемое коэффициентами  $A_1$  и  $A_2$  и уравновешивающее касательное усилие:

$$\begin{aligned} N_x(u_{01}) &= \frac{1}{4a^2\lambda^2} [2A_1(1 - y) + 2A_2(1 + y) + \\ &+ 3a^2(N_1 - N_2)y(1 - x^2)], \\ N_y(u_{01}) &= \frac{1}{4} [2(N_1 + N_2) + \\ &+ 3(N_1 - N_2)y - (N_1 - N_2)y^3], \\ S(u_{01}) &= -\frac{3}{4\lambda} (N_1 - N_2)x(1 - y^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Функция  $u_{02}(x, y)$  является продолжением самоуравновешенных граничных функций на всю область прямоугольника. Это продолжение не единственное. Выберем его так, чтобы сохранить непрерывность и условие симметрии:

$$u_{02}(x, y) = \sum_{k=0}^K H_k(y)(a_k + b_kx^2), \quad (17)$$

где  $H_k(y)$  – специальное семейство многочленов [4].

На верхней и нижней сторонах прямоугольника многочлен  $H_k(y)$  и его первая производная обращаются в нуль. Значит, функция  $u_{02}(x, y)$  не влияет на краевые условия на этих сторонах. На левой и правой сторонах прямоугольника  $\Omega$  рассматриваемая функция дает самоуравновешенные усилия  $N_x$  и  $S$ , зависящие от параметров  $a_k$  и  $b_k$ :

$$\begin{aligned} N_x(u_{02}) &= \frac{1}{a^2\lambda^2} \sum_{k=0}^K H_k''(y)(a_k + b_kx^2); \\ S(u_{02}) &= -\frac{2}{a^2\lambda} \sum_{k=0}^K b_k H_k'(y)x. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, функция  $u_0(x, y) = u_{01}(x, y) + u_{02}(x, y)$  удовлетворяет заданным краевым условиям на верхней и нижней сторонах области  $\Omega$  и задает краевые условия произвольного вида на левой и правой сторонах, зависящие от параметров  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $a_k$  и  $b_k$  ( $k = 0 \dots K$ ).

Приняв в качестве неизвестных  $C_i$  вышеназванные параметры и воспользовавшись методом наименьших квадратов, потребуем приближенного вы-

полнения краевых условий (10) на боковых сторонах трапеции. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \int_L (\bar{S} - T)^2 dl + \int_L (\bar{N}_n)^2 dl \right\} = 0; \quad i = 1..2K + 4 \quad (19)$$

Приступим теперь к определению функции  $u_1(x, y)$ . Зададим эту функцию в виде ряда:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M F_{n,m} H_n(x) H_m(y). \quad (20)$$

Система функций из равенства (20) является полной в энергетическом пространстве оператора  $A$  задачи (1).

Так как сами функции  $H_n(x)$ ,  $H_m(y)$  и их первые производные обращаются в нуль в точках  $x, y = \pm 1$ , условие  $B u_1(x, y) = 0$  выполняется на всей границе  $S$  области  $\Omega$ .

Решая задачу (12) методом Бубнова – Галеркина, имеем систему линейных уравнений:

$$\int_{\Omega} (A u_1) H_i(x) H_j(y) d\Omega = - \int_{\Omega} (A u_0) H_i(x) H_j(y) d\Omega, \quad n = 0..N, m = 0..M. \quad (21)$$

Решая совместно системы уравнений (19) и (21), можно определить все неизвестные, входящие в выражение для функции усилий  $u(x, y)$ . Полученная функция является приближенным решением поставленной задачи.

Кратко обсудим обоснование гладкости получаемых результатов.

1. В силу сильной эллиптичности оператора  $A$  решение бесконечно дифференцируемо в любой замкнутой области, целиком содержащейся в рассматриваемом прямоугольнике.

2. Наличие угловых точек границы существенно снижает степень гладкости вплоть до границы. Известно [5], что если на сторонах угла заданы напряжения, то сингулярные решения появляются начиная со значений углов, превышающих  $\pi$ .

3. Как показано в работе [6], при решении первой бигармонической проблемы в многоугольных областях с липшецевой границей с внутренними угла-

ми  $\alpha < \pi$  ( $\kappa = 0$ ) или  $\alpha < 126,28^\circ$  ( $\kappa = 1$ ) и при правых частях  $f \in W_2^{(-\kappa)}(\Omega)$  обобщенное решение класса  $W_2^{(2)}(\Omega)$  принадлежит классу  $W_2^{(4-\kappa)}(\Omega)$  и удовлетворяет априорной оценке  $\|u\|_{W_2^{(4-\kappa)}(\Omega)} \leq C \|f\|$ . Здесь  $W_2^{(n)}(\Omega)$  – пространства С.Л. Соболева [7].

*Пример.* Определим поле усилий в пластине с геометрическими параметрами  $a = 100$  мм,  $\lambda = 0,5$ ,  $\eta = 2$ . На основаниях действуют сжимающие усилия  $N_1 = -100$  Н/мм и  $N_2 = -200$  Н/мм. Угол наклона боковой стороны  $\alpha \approx 26^\circ 34'$ .

Для сравнения расчеты проводились и методом конечных элементов. Использовались элементы типа PLANE2D. Количество узлов – 441, число неизвестных – 1323.

На рис. 2 и 3 представлены распределения погонных усилий вдоль линий соответственно  $x = 0$  и  $y = 0$ . Сплошными линиями показаны результаты расчетов при  $K = 6$ ,  $N = 15$ ,  $M = 15$ . Маркерами показаны результаты расчетов по МКЭ.

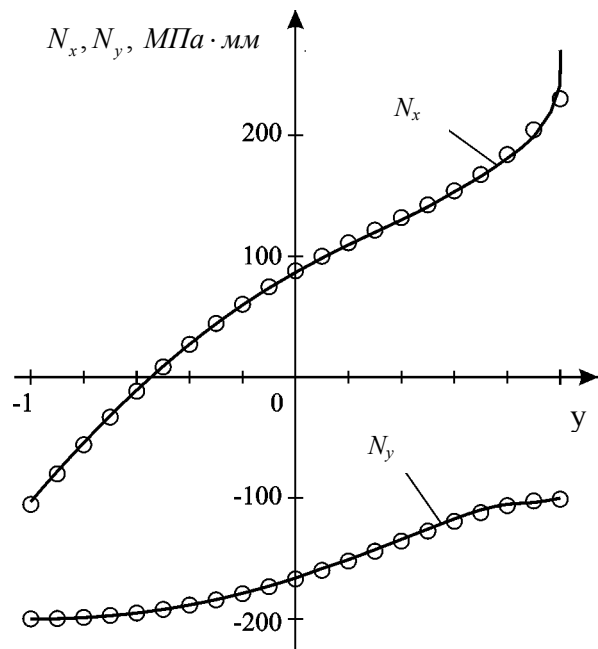


Рис. 2. Распределение усилий вдоль линии  $x = 0$

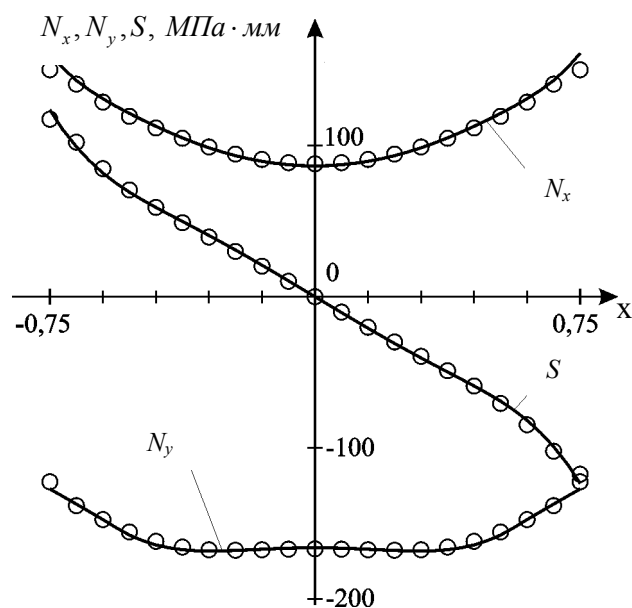


Рис. 3. Распределение усилий вдоль линии  $y = 0$

В табл. 1 приведены невязки в уравнении (1). Поскольку правая часть уравнения должна обращаться в нуль, в таблице для каждой точки указаны два числа – положительная и отрицательная части искомого невязок. Точность выполнения условия совместности деформаций во всей области трапеции не требует комментариев. Уравнение же равновесия в области выполняются точно путем введения функции усилий, а на границе – в смысле метода наименьших квадратов на боковых сторонах трапеции, на основаниях же – точно.

На рис. 4 показано распределение касательных усилий вдоль левой боковой стороны трапеции. Сплошная линия соответствует расчету, пунктирная – заданной функции, маркеры – результаты МКЭ.

Для оценки сходимости были проведены расчеты с различным количеством членов в ряде (20). На рис. 5 показаны распределения усилий  $N_y$  вдоль линии  $y = 0$  при количестве членов ряда 1:  $N = M = 5$ ; 2:  $N = M = 10$ ; 3:  $N = M = 15$ . Кривые 2 и 3 совпадают с точностью до графика.

### Заключение

1. Методом расширения области дано замкнутое решение плоской задачи теории упругости в напряжениях для трапециевидной области.
2. Показана высокая точность, быстрая скорость сходимости и оперативность полученного решения по сравнению с МКЭ.

Таблица 1

К вычислению невязок

x	y	Невязка, Н·мм
-0,4	-1,0	58220534303604 -58220529525077
-0,37	-0,7	271371475469 -271371743569
-0,34	-0,4	2009318016 -2009345752
-0,30	0,0	26305849 -26366997
-0,26	0,4	5785448716 -5784932136
-0,23	0,7	324217568013 -324210249312
-0,20	1,0	9235228285404 -9235643132986
-0,8	-1,0	26227826916724900 -26227826949178300
-0,74	-0,7	98720469482188 -98720468619733
-0,68	-0,4	408523257320 -408523247867
-0,60	0,0	2395631880 -2395711809
-0,52	0,4	459018311983 -459021023721
-0,46	0,7	16336214202720 -16336193134370
-0,40	1,0	289479581400793 -289479754305837
0	-1,0	87118259075 -87131195329
0	-0,8	3899669753 -3899357006
0	-0,4	11916103 -11941988
0	0,0	5246391 -5325063
0	0,4	107952961 -105352456
0	0,8	37698386648 -37740962879
0	1,0	473487345110 -472895456970

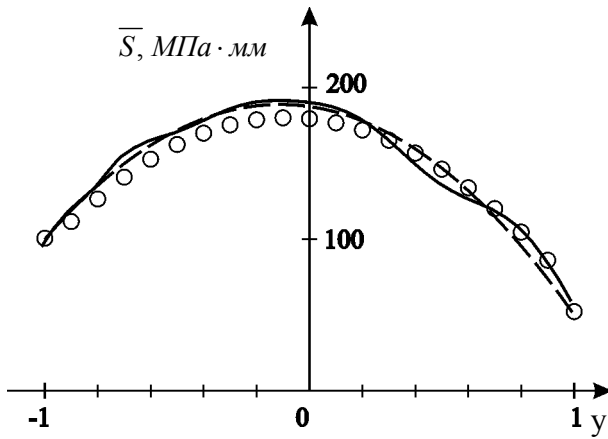


Рис. 4. Касательные усилия на боковой стороне трапеции

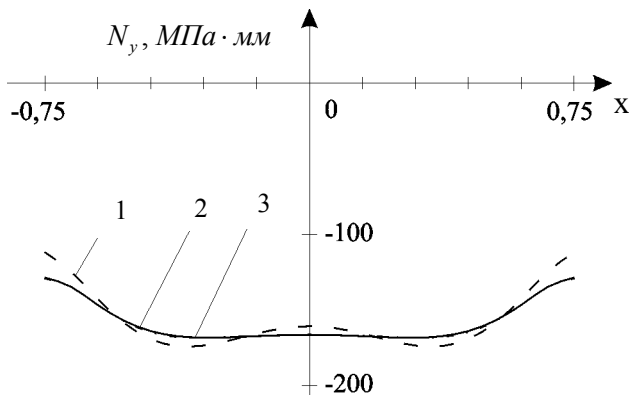


Рис. 5. Оценка сходимости

3. Покомпонентность решения позволяет получить результат с наперед заданной точностью. В задачах устойчивости этот факт приобретает особое значение.

4. Гладкость решения обоснована теоретическими оценками, известными в научной литературе.

5. Решение легко распространяется на пластины переменной толщины. Изменению в этом случае подлежит лишь оператор задачи.

## Литература

1. Бельский В.Л., Власов И.П., Зайцев В.Н. Конструкция летательных аппаратов. – М.: Оборонгиз, 1963. – 708 с.

2. Халилов С.А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях // Вопросы проектирования самолетных конструкций: Темат. сб. науч. тр. – Х.: ХАИ. – 1982. – Вып. 3. – С. 120 – 127.

3. Халилов С.А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: ХАИ. – 1987. – С. 31 – 39.

4. Халилов С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения // Прочность конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. науч. тр. – Х.: ХАИ. – 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 56.

5. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

6. Rannacher R. On the boundary value problem for the biharmonic operator on domains with angular corners, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* – 1980. – Vol. 2. – P. 556 – 581.

7. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

*Поступила в редакцию 30.03.04*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.В. Амброжевич, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», г. Харьков