УДК 681.51.001.63

В.М. ВАРТАНЯН, Н.М. ФЕДОРЕНКО, Ю.А. РОМАНЕНКОВ, И.В. ДРОНОВА, А.В. КОНОНЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА В ЗАДАННЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрены алгебраические критерии расположения корней полиномов в заданных областях комплексной плоскости. Необходимые и достаточные условия приведены в функции коэффициентов полиномиального уравнения. Даны рекомендации по использованию результатов анализа в задачах обеспечения устойчивости и заданного качества технических объектов и систем.

полиномиальное уравнение, корни уравнения, комплексная плоскость, необходимые и достаточные условия, устойчивость, заданное качество

Введение

Исследование устойчивости с помощью алгебраических критериев для линейных динамических систем, в том числе объектов аэрокосмической техники, в настоящее время все реже встречается в литературе. Это связано, прежде всего, с тем, что в инструментарии современного исследователя имеются мощные средства в виде универсальных интегрированных пакетов, позволяющих провести всестороннее моделирование сложных динамических объектов. При этом, как правило, удается учесть многомерность и многосвязность исследуемого объекта или процесса, нелинейность характеристик составляющих его элементов, запаздывание и целый ряд других специфических особенностей, присущих сложным техническим или производственно-экономическим системам [1, 2].

По этим же причинам косвенные критерии устойчивости (заданного качества), представленные в виде необходимых и достаточных условий расположения корней характеристического полинома в заданных областях комплексной плоскости, воспринимаются как атавизмы теории управления, связанные с ограниченными вычислительными возможностями и ресурсами, и в воображении некоторых исследователей приравниваются к правилам ведения расчетов на логарифмической линейке и таблицам Брадиса, оставшимся в XX веке. Это действительно так, если рассматривается прямая задача оценки качества – выполнение условий расположения корней характеристического уравнения в заданных областях на комплексной плоскости. Однако сегодня, как и прежде, наибольший интерес представляет решение обратной задачи – синтеза систем с наперед заданными характеристиками, и в этом случае неоценима роль алгебраических критериев, связывающих в аналитическом виде первичные параметры систем с показателями качества.

Однозначно заданные коэффициенты полиномиального уравнения также однозначно определяют расположение его корней. Решение обратной задачи имеет многовариантное решение и может быть сведено к поиску некоторой многомерной области в пространстве первичных параметров, которые определяют коэффициенты полиномиального уравнения, а следовательно, искомые области локализации его корней на комплексной плоскости. Поскольку аналитическое решение такой задачи для полиномиального уравнения выше третьего порядка не существует, то для ее решения могут быть использованы известные косвенные критерии расположения корней полиномиального уравнения на ком-

© В.М. Вартанян, Н.М. Федоренко, Ю.А. Романенков, И.В. Дронова, А.В. Кононенко

плексной плоскости. При этом возникает проблема корректного выбора вида критерия, приводящего к наиболее простым вычислительным алгоритмам его реализации и к минимальному количеству необходимых и достаточных условий решения поставленной задачи. Таким образом, ***целью статьи*** является обзор и анализ критериев локализации корней полиномов в заданных областях комплексной плоскости применительно к задачам обеспечения заданного качества функционирования сложных динамических систем.

Алгебраические критерии локализации корней полиномиального уравнения в заданных областях комплексной плоскости

Пусть известно характеристическое уравнение системы в виде

$$\begin{gathered} A(\lambda)=\sum_{i=0}^{n} a_i(k_1,...,k_{n_i})\lambda^i = \\ = a_n(k_1,...,k_{n_i})\lambda^n + ... + a_0(k_1,...,k_{n_i}) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где n – порядок системы, $k_1,...,k_{n_i}$ – исследуемые параметры.

Критерий Гурвица. Составим из коэффициентов характеристического уравнения системы (1) $a_i > 0$ следующий определитель:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & ... & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Диагональным минором порядка k определителя Δ_n называется определитель, элементы которого лежат на пересечении первых k строк и первых k столбцов определителя.

Так, если в определителе Δ_n вычеркнуть правый столбец и нижнюю строку, то получим диагональный минор Δ_{n-1}. Вычеркивая в этом определителе снова правый столбец и нижнюю строку, находим Δ_{n-2}.

Согласно критерия Гурвица [3] корни уравнения (1) имеют отрицательные вещественные части, если определитель Δ_n и все его диагональные миноры:

$$\begin{gathered} \Delta_1 = a_{n-1}; \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \\ ... \\ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \end{gathered} \tag{3}$$

положительны.

Следовательно, границе области устойчивости соответствуют предельные условия, а именно, равенство нулю всех коэффициентов характеристического полинома и всех определителей Гурвица.

Условие, определяющее границу устойчивости, является условием наличия в уравнении (1) одного нулевого или пары мнимых сопряженных корней, причем все остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, граница устойчивости в плоскости корней – мнимая ось. Если рассматривать, например, плоскость каких-либо варьируемых коэффициентов характеристического уравнения, считая остальные коэффициенты постоянными, то можно говорить о границе устойчивости в этой плоскости. Причем, условию $a_0 = 0$, при соблюдении всех остальных условий устойчивости, соответствует граница апериодической устойчивости (один корень нулевой), а условию $\Delta_{n-1} = 0$ – граница колебательной устойчивости (два мнимых сопряженных корня).

На практике иногда требуется установить пределы изменения какого-либо одного параметра k_j из условия обеспечения устойчивости. Причем этот параметр может входить в некоторые коэффициенты a_i, следовательно, и в определители Δ_m. В этом случае необходимо построить зависимости $a_i(k_j)$ и $\Delta_m(k_j)$ и определить значения k_j, которые обеспечивают выполнение условий Гурвица.

Критерий Льенара – Шипара. Общий объем вычислительных операций по определению границ областей устойчивости может быть сокращен при использовании в качестве критерия устойчивости метода Льенара – Шипара [3]. Условия устойчивости в форме Льенара – Шипара предполагают положительность коэффициентов характеристического полинома и положительность нечетных миноров главной диагонали определителя Гурвица (табл. 1).

Таблица 1

Уравнения границ устойчивости по критерию Льенара – Шипара

Порядок	Уравнения границ условий устойчивости
1	$a_0 = 0$
2	$a_1 = 0$
3	$a_3 = 0$; $a_0 a_1 a_2 - a_0^2 = 0$
4	$a_3 = 0$; $a_0 a_1 a_2 - a_3^2 a_2 - a_1^2 = 0$
5	$a_4 = 0$; $a_4 a_3 a_2 + a_4 a_0 - a_4^2 a_1 - a_2^2 = 0$; $a_0(a_4 a_3 a_2 a_1 + 2a_4 a_1 a_0 - a_4 a_3^2 a_0 -$ $-a_4^2 a_1^2 - a_2^2 a_1 - a_0^2 + a_3 a_2 a_0) = 0$

Таким образом, условия Льенара – Шипара позволяют исключить из рассмотрения дополнительные линии, не относящиеся к границам областей устойчивости и поэтому являются более корректными по отношению к условиям Гурвица.

Критерий Рауса. Критерий Рауса [3] имеет некоторое преимущество перед другими алгебраическими критериями, так как требует меньшего объема вычислительной работы при численном решении задачи. Однако при нахождении символьных условий устойчивости использование его затруднительно для $n > 3$ из-за необходимости выполнения операций деления полиномов и факторизации получаемых соотношений. Для того чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса, были строго положительны. Количество строк в таблице Рауса должно быть равно $n+1$, где n – степень полиноминального уравнения.

Элементы первой строки таблицы являются коэффициентами уравнения (1) с четными индексами, а элементы второй строки – коэффициенты уравнения с нечетными индексами. Начиная с третьей строки (т.е. для $i > 2$) элементы каждой строки таблицы Рауса образуются по определенному правилу из элементов двух предыдущих строк:

$$C_{ik} = \frac{C_{i-2,k+1}C_{i-1,1} - C_{i-2,1}C_{i-1,k+1}}{C_{i-1,1}}. \qquad (4)$$

Численный анализ устойчивости по критерию Рауса заканчивается тогда, когда первый элемент какой-нибудь строки примет отрицательное или равное нулю значение.

Граница апериодической устойчивости определяется равенством нулю первого либо последнего, т.е. ($n+1$)-го, элемента первого столбца; граница колебательной устойчивости – равенством нулю предпоследнего, т.е. n-го элемента первого столбца. При этом все элементы первого столбца должны быть положительными.

Критерий Шура-Кона. Граничными (с точки зрения обеспечения асимптотической устойчивости) являются условия $\Delta_k = 0$. Алгоритм формирования определителя Шура – Кона [4] как блочной матрицы имеет такой вид:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} (a_{i-j})_{k\times k} & (a_{i-j+k})_{k\times k} \\ (a_{j-i+k})_{k\times k} & (a_{j-i})_{k\times k} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$\left|a_{i-j}\right|_{k\times k} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & ... & a_0 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

$$\left|a_{i-j+k}\right|_{k\times k} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & ... & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & ... & a_n \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

В выражениях (7) и (8) треугольные матрицы $\left|a_{j-i}\right|_{k\times k}$ и $\left|a_{j-i+k}\right|_{k\times k}$ – матрицы коэффициентов характеристического уравнения, а матрицы $\left|a_{i-j}\right|_{k\times k}$, $\left|a_{i-j+k}\right|_{k\times k}$ – соответственно их транспонированные матрицы.

Известно, что если все определители Δ_k, $k=\overline{1,n}$, отличны от нуля, то $A(\lambda)$ не имеет корней на окружности единичного радиуса и число их внутри круга единичного радиуса равно числу перемен знака в последовательности определителей Δ_k.

Необходимым и достаточным условием нахождения корней полиномиального уравнения (1) внутри единичной окружности является выполнение следующих неравенств: $\Delta_k<0$, если k – нечетное, $\Delta_k>0$, если k – четное, $k=\overline{1,n}$.

Увеличение порядка рассматриваемых систем приводит к резкому возрастанию объема вычислений из-за высоких размерностей раскрываемых определителей, а, следовательно, к возможным вычислительным ошибкам в расчетах численных значений коэффициентов условий устойчивости.

Критерий Джури. Обратным полиномом назовем полином

$$\begin{gathered}A_0(\lambda)=\lambda^n A(1/\lambda)=\\=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0,\end{gathered}\tag{8}$$

полученный путем перестановки коэффициентов полинома (1) в обратном порядке.

Разделим $A(\lambda)$ на обратный ему полином $A_0(\lambda)$ по правилам деления многочлена на многочлен. В результате этого вычислим частное от деления – g и остаток $A_1(\lambda)$ – полином ($n-1$)-й степени:

$$\frac{A(\lambda)}{A_0(\lambda)}=g_0-\frac{A_1(\lambda)}{A_0(\lambda)},\tag{9}$$

где
$$\begin{gathered}g_0=\frac{a_n}{a_0};\quad A_1(\lambda)=(a_0-g_0a_n)\lambda^{n-1}+\\+(a_1-g_0a_{n-1})\lambda^{n-2}+\ldots+(a_{n-1}-g_0a_1).\end{gathered}\tag{10}$$

Разделим остаток $A_1(\lambda)$ на обратный ему полином $A_{10}(\lambda)$ и определим новое частное от деления g_1 и остаток $A_2(\lambda)$:

$$\frac{A_1(\lambda)}{A_{10}(\lambda)}=g_1-\frac{A_2(\lambda)}{A_{10}(\lambda)};\tag{11}$$

где

$$g_1=\frac{a_{n-1}-g_0a_1}{a_0-g_0a_n}=\frac{a_1a_n-a_0a_{n-1}}{(a_0+a_n)(a_0-a_n)},\tag{12}$$

$$\begin{gathered}A_2(\lambda)=[(a_0-g_0a_n)-g_1(a_{n-1}-g_0a_1)]\lambda^{n-2}+\\+\ldots+[(a_{n-2}-g_0a_2)-g_1(a_1-g_0a_{n-1})].\end{gathered}\tag{13}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}g_2=\frac{(a_{n-2}-g_0a_2)-g_1(a_1-g_0a_{n-1})}{(a_0-g_0a_n)-g_1(a_{n-1}-g_0a_1)}=\\=\frac{a_{n-2}a_0^3-a_{n-2}a_0a_n^2-a_na_2a_0^2+a_n^3a_2-}{(a_{n-1}a_0-a_na_1-a_n^2+a_0^2)(-a_{n-1}a_0+a_na_1-a_n^2+a_0^2)}-\\-\frac{a_1a_0^2a_{n-1}+a_1^2a_0a_n+a_na_{n-1}^2a_0-a_n^2a_{n-1}a_1}{(a_{n-1}a_0-a_na_1-a_n^2+a_0^2)(-a_{n-1}a_0+a_na_1-a_n^2+a_0^2)}.\end{gathered}\tag{14}$$

Выполняя деление полиномов $A_i(\lambda)$ (остаток от предыдущей операции деления) на обратные им полиномы $A_{i0}(\lambda)$, получаем последовательность $g_i=\{g_0,\ g_1,\ \ldots\ g_{n-2}\}$.

Необходимыми и достаточными условиями нахождения корней полиномиального уравнения внутри единичной окружности являются неравенства [4]:

$$\begin{gathered}A(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n>0;\\(-1)^n A(-1)=a_0-a_1+a_2\ldots+(-1)^n a_n>0;\\\left|g_i\right|<1,\ i=1,2,\ldots,n-2.\end{gathered}\tag{15}$$

Другая форма использования критерия Джури предполагает составление табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты Джури

a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0	$q_n=\dfrac{a_0}{a_n}$
a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n	
a_0^{n-1}	a_1^{n-1}	$\ldots$	a_{n-1}^{n-1}		$q_{n-1}=\dfrac{q_{n-1}^{n-1}}{q_0^{n-1}}$
a_{n-1}^{n-1}	a_{n-2}^{n-1}	$\ldots$	a_0^{n-1}		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
a_0^0					

$$a_i^{k-1} = a_i^k - q_k a_{k-i}^k, \quad q_k = \frac{a_k^k}{a_0^k}. \qquad (16)$$

Первая и вторая строки – это коэффициенты характеристического уравнения в прямом и обратном порядке. Третья строка получается умножением второй строки на $q_n = \frac{a_0}{a_n}$ и вычитанием произведения из первой строки. Таким образом, последний элемент в третьей строке равен нулю. Четвертая строка – это третья, записанная в обратном порядке. Схема повторяется до ($2n+1$)-й строки. Последняя строка состоит только из одного элемента.

Если $a_n > 0$, то все корни уравнения лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда все a_0^k, $k = \overline{1, n-1}$, положительны. Если нет a_0^k, равных нулю, то количество отрицательных a_0^k равно количеству корней вне единичного круга.

Заметим, что если все a_0^k положительны для $k = 1, 2, ..., n-1$, то условие $a_0^0 > 0$ эквивалентно условиям $A(1) > 0$, $(-1)^n A(-1) > 0$, которые составляют необходимые условия устойчивости и, следовательно, могут использоваться до составления таблицы.

Критерий Кларка. Пусть D_n – квадратная матрица размером $n \times n$. Отделим от нее внешние, окаймляющие ее столбцы и строки, и получим внутреннюю матрицу D_{n-2} размером $[n-2] \times [n-2]$.

Продолжая отделение, найдем внутреннюю матрицу D_{n-4} и т.д.

Квадратная матрица D_n размером $n \times n$ называется внутренне положительной, если ее определитель и определители всех внутренних матриц положительны.

Согласно критерия Кларка [4], полиномиальное уравнение (1) имеет корни внутри единичной окружности, если выполняются условия:

$$A(1) = \sum_{i=0}^{n} A(k_1, k_2, ...) > 0;$$

$$A(-1) = \sum_{i=0}^{n} A(k_1, k_2, ...)(-1) > 0; \qquad (17)$$

$$\det D_i^+ > 0; \ \det D_i^- > 0; \ i = n-1, n-3, ...,$$

где D_i^+, D_i^- – внутренние матрицы для D_{n-1}^+, D_{n-1}^-, алгоритм формирования которых имеет вид:

$$\left| (a_{j-i})_{k \times k} + a_{2n-i-j} \right|_{k \times k} > 0;$$

$$\left| (a_{j-i})_{k \times k} - a_{2n-i-j} \right|_{k \times k} > 0, \qquad (18)$$

где $k = n-1, n-3, ...$, иначе:

$$D_{n-1}^- = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_2 - a_0 \\ 0 & a_n & ... & ... & a_3 - a_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & -a_0 & ... & ... & a_{n-1} - a_{n-3} \\ -a_0 & -a_1 & ... & ... & a_n - a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad (19)$$

$$D_{n-1}^+ = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_2 + a_0 \\ 0 & a_n & ... & ... & a_3 + a_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_0 & ... & ... & a_{n-1} + a_{n-3} \\ a_0 & a_1 & ... & ... & a_n + a_{n-2} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Все эти условия выполняются при расположении корней характеристического полинома (1) внутри окружности единичного радиуса.

Максимальное количество условий устойчивости, возникающих при использовании алгебраических критериев, приведено в табл. 3.

Таблица 3

Количество условий, возникающих при использовании алгебраических критериев

Критерий	*Количество условий*
Джури	$n+1$
Кларка	$n+3$
Шура-Кона	n
Гурвица	$2n$
Рауса	$2n$
Льенара–Шипара	n

На самом деле использование символьного вида условий устойчивости изменяет их реальное количество в сторону увеличения, так как некоторые из условий распадаются на несколько более простых при факторизации алгебраического выражения

$$G_i(k_1, ..., k_{n_i}) = 0 .$$

Пример. Для характеристического полинома $A_3(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ граничные условия для различных критериев имеют такой вид.

Критерий Кларка:

$$G_1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 ; \; G_2 = a_3 - a_2 + a_1 - a_0 ;$$

$$G_3 = a_3^2 - a_3 a_1 + a_2 a_0 - a_0^2 ;$$

$$G_4 = a_3^2 + a_3 a_1 - a_2 a_0 - a_0^2 ;$$

$$G_5 = a_3 + a_0 ; \; G_6 = a_3 - a_0 .$$

Критерий Шура-Кона:

$$\begin{gathered} G_1 = -3a_0^4 a_3^2 - a_0^4 a_1^2 - 2a_0^4 a_2^2 + a_0^2 a_2^4 + 3a_0^2 a_3^4 - a_3^6 + a_0^6 - \\ -2a_3 a_0^2 a_1^3 + 2a_0^3 a_1^2 a_2 + a_0^2 a_2^2 a_3^2 - a_0^2 a_2^2 a_1^2 + 2a_0 a_3^2 a_2^3 - \\ -a_3^2 a_0^2 a_1^2 + a_3^4 a_2^2 + 2a_3^4 a_1^2 - a_3^2 a_1^4 + 6a_0^3 a_3 a_2 a_1 - \\ -2a_0 a_2^3 a_3 a_1 - 6a_0 a_3^3 a_2 a_1 + 4a_0 a_3^2 a_1^2 a_2 + 2a_0 a_3 a_2 a_1^3 - \\ +4a_0^2 a_3 a_1 a_2^2 + a_3^2 a_2^2 a_1^2 - 2a_3^3 a_1 a_2^2 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \times \\ \times (a_2 - a_3 + a_0 - a_1)(a_3^2 - a_3 a_1 + a_0 a_2 - a_0^2)^2 ; \end{gathered}$$

$$G_2 = a_0^4 - a_0^2 a_3^2 = a_0^2 (a_0 - a_3)(a_0 + a_3) ; G_3 = a_0^2 .$$

Критерий Льенара – Шипара для псевдополинома $A_3(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$, преобразованного билинейным преобразованием:

$$(b_3 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 ; \; b_2 = 3a_3 + a_2 - a_1 - 3a_0 ;$$

$$b_1 = 3a_3 - a_2 - a_1 + 3a_0 ; \; b_0 = a_3 - a_2 + a_1 - a_0);$$

$$G_1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 ;$$

$$\begin{gathered} G_2 = -8a_3^2 a_2 + 8a_3 a_2 a_1 - 8a_3^2 a_0 - 8a_1 a_0^2 + 8a_3^3 + 8a_3 a_2 a_0 + \\ +8a_3 a_0 a_1 - 8a_3 a_1^2 + 8a_0^3 - 8a_0 a_2^2 - 8a_3 a_0^2 + 8a_0 a_2 a_1 = \\ = 8(a_3 - a_2 + a_1 - a_0)(a_3^2 - a_3 a_1 + a_2 a_0 - a_0^2). \end{gathered}$$

Различное количество необходимых условий устойчивости, формируемое отдельными критериями, естественно не приводит к разным конечным результатам, а связано с тем, что с одной стороны они могут быть избыточными, а с другой – интегрировать в себе одновременно несколько необходимых для выполнения условий требуемого расположения корней.

Заключение

Приведенные алгебраические критерии представляют собой универсальный математический аппарат, позволяющий управлять расположением корней полиномиального уравнения на комплексной плоскости и при необходимости локализовать их в определенных участках комплексной плоскости. Такие задачи имеют место, в частности, при моделировании производственных и, в целом, экономических систем (балансовые модели). Решение о выборе того или иного критерия связано прежде всего с вычислительной сложностью процедуры и точностью получаемых результатов. Трансформация любого из рассмотренных алгебраических критериев к задачам локализации корней в произвольных областях комплексной плоскости, сводится в конечном счете, к корректному выбору конформного отображения левой полуплоскости или единичной окружности в требуемую геометрическую область и преобразование на этой основе исходного полиномиального уравнения.

Литература

1. Орлов А.И. Устойчивость в социально–экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
2. Вартанян В.М. Определение допустимых значений параметров при синтезе систем заданного качества // Проектирование цифровых систем управления летательных аппаратов: Темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ. – 1988. – С. 31 – 35.
3. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: Учеб. пособие для втузов. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
4. Гостев В.И., Стеклов В.К. Системы автоматического управления с цифровыми регуляторами: Справочник. – К.: Радіоаматор, 1998. – 704 с.

Поступила в редакцию 25.03.05

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаев, Харьковский государственный технический университет сельского хозяйства, Харьков.