УДК 519.95:62-50

А.Б. НЕКРАСОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ ПРЕДЕЛЬНО ПЛОСКОГО ГРАФА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

В статье выполнен анализ и определение зависимости числа ребер в предельно плоском графе минимального веса от числа его вершин и внешних ребер. На основе полученных результатов была выполнена оптимизация алгоритма генерации данного графа и экспериментальное определение ее влияния на работу алгоритма.

теория графов, предельно плоский граф минимального веса, оптимизация алгоритма, сравнительное тестирование алгоритмов

Введение

Предельно плоские графы минимального веса (ППГМВ) нашли свое широкое применение в сфере проектирования сетей передачи данных.

В данной сфере ППГМВ применяется для решения задач получения структуры сети, максимально насыщенной связями между узлами, но в тоже время, имеющей минимальное суммарное значение критерия, используемого для взвешивания линий связи между узлами (к примеру, это может быть стоимость или расстояние), и, кроме того, отсутствием пересечений линий связи.

Для получения ППГМВ был разработан алгоритм его генерации на основе исходного графа Керни [1].

Работа алгоритма генерации ППГМВ основана на итерационном принципе. Алгоритм продолжает свою работу до тех пор, пока в плоский граф невозможно будет добавить хотя бы одно ребро. Очевидно, что после добавления некоторого количества ребер, добавить дополнительно еще хотя бы одно будет невозможно. Таким образом, происходит достаточно большое количество «лишних» итераций.

Выявив зависимость максимального количества ребер в ППГМВ от других его характеристик [2], мы сможем уменьшить количество итераций, а значит, и ускорить работу алгоритма.

1. Оптимизация алгоритма

1.1. Общие сведения

Дадим определение плоского графа. Если на некоторой диаграмме среди точек, соответствующих вершинам графа, нет совпадающих, а прямые линии, соответствующие ребрам графа, не имеют общих точек (за исключением концов), то эта диаграмма называется геометрической реализацией графа, а такой граф планарными или плоским [3].

Внешним ребром графа является ребро, разбивающее плоскость на две полуплоскости так, что все вершины и ребра графа находятся исключительно на одной из них.

Рассмотрим несколько возможных вариантов предельных плоских графов, приведенных на рис. 1 – 3.

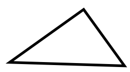

Рис. 1. ППГМВ с тремя вершинами

Рис. 2. ППГМВ с четырьмя вершинами

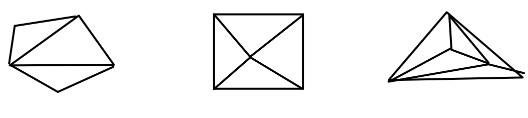

Рис. 3. ППГМВ с пятью вершинами

Из табл. 1 видно, что общее число ребер в предельном плоском графе зависит от числа вершин и числа его внешних ребер.

Таблица 1
Характеристики ППГМВ

Число вершин (n)	Число внешних ребер (m)	Общее число ребер (k)
3	3	3
4	4	5
4	3	6
5	5	7
5	4	8
5	3	9

Зависимость общего числа ребер в ППГМВ от вышеприведенных характеристик можно представить в следующем виде:

$$\alpha n + \beta m + \gamma = k . \qquad (1)$$

Составим систему уравнений на основе приведенных данных:

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 3 ; \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma = 6 ; \\ 5\alpha + 4\beta + \gamma = 8 . \end{cases}$$

Для решения ее методом Крамера посчитаем следующие определители;

$$D_0 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 ; \qquad D_\alpha = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 ;$$

$$D_\beta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; \qquad D_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -3 .$$

Находим значения α, β, γ :

$$\alpha = \frac{D_\alpha}{D_0} = 3; \beta = \frac{D_\beta}{D_0} = -1; \gamma = \frac{D_\gamma}{D_0} = -3.$$

Таким образом, выражение (1) приобретает следующий вид:

$$k = 3n - m - 3. \qquad (2)$$

Итак, мы получили функциональную зависимость числа ребер в предельном графе от числа вершин и количества внешних ребер.

1.2. Исходный алгоритм

1.1.1. Входные данные

Входные данные для рассматриваемого алгоритма следующие [1]: взвешенный граф Керни *K(V,E)*; $n=|V|$; матрица весов ребер *A[n,n]*; матрица *G[n,2],* содержащая координаты вершин графа; пустой граф *K`(V, E`),* содержащий множество вершин *V* графа *K* и *у* которого $E` = \varnothing$.

1.1.2. Ход генерации

Шаг 1. Формируем множество *E``* на основе множества ребер *E* графа *K* и сортируем его по возрастанию.

Шаг 2. Осуществляем циклический просмотр множества *E``,* начиная с нулевого элемента. Если текущее ребро $R_n$ = *E``{i}*, $R_n \cap E` = \varnothing$ , то добавляем это ребро в граф *K`*.

Шаг 3. Если *E``{i}* $\neq \varnothing$, то $i = i + 1$ и возвращаемся на шаг 3, иначе оканчиваем работу.

1.1.3. Выходные данные

Входные данные для рассматриваемого алгоритма следующие: взвешенный предельный граф *K`(V,E`)* минимального веса; модифицированная матрица весов ребер *A[n,n]*.

1.2. Методика оптимизации

Выполним оптимизацию алгоритма. Как таковая, оптимизация коснется шага 3, в котором осуществляется проверка необходимости и возможности добавления ребра в граф. Для этого осуществляется проверка возможности добавления ребра, и если это возможно, то ребро добавляется, что продолжается до исчерпания списка ребер. Критерием возможности добавления ребра в ППГМВ является признак, приведет ли добавление данного ребра к появлению пересечений в графе.

Определив для данного шага общее количество ребер для добавления, используя (2), уменьшим общее число итераций, а значит, увеличим скорость работы.

Для выполнения этой оптимизации основной задачей становится определение числа внешних вершин плоского графа.

По определению, ребро будет внешним, если оно разбивает плоскость так, что оставляет на одной из полуплоскостей все вершины графа (рис. 4).

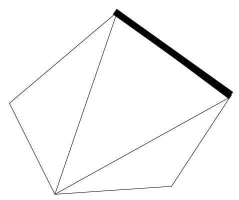

Рис. 4. Внешнее ребро графа

Таким образом, поочередно проверив все ребра исходного графа на выполнение данного условия графа, мы сможем определить число внешних ребер графа.

Для выполнения проверки используется функция

$$\varphi\,(E_i, V_j)\,,$$

результатом которой является проверка положения вершины V_j относительно прямой проведенной через ребро E_i, имеющей уравнение в канонической форме

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \tag{3}$$

Выполнив данную проверку для всех вершин графа, используя агрегирующую операцию XOR, получим признак того, является ли ребро внешним, приведенный ниже:

$$\bigvee_{j \in V} [\varphi(E_i, V_j)]\,. \tag{4}$$

Применив приведенную выше операцию (4) ко всем ребрам графа, определим общее число внешних ребер графа m.

Добавляя вышеуказанные алгоритмы в приведенный выше алгоритм генерации предельно плоского графа минимального веса и ограничивая количество добавляемых ребер с использованием выведенных выражений получаем оптимизированный алгоритм генерации.

2. Анализ результатов оптимизации

Для определения влияния оптимизации на сложность алгоритма, а значит, и на скорость его выполнения, необходимо выполнить его тестирование с использованием тестовых примеров.

Тестовые примеры были составлены по следующему принципу.

Число вершин исходного графа варьировалось в диапазоне от 10 до 50. Производилась генерация случайного набора заданного количества вершин. Генерация производилась по 5 раз для каждого количества вершин, для каждого случая производился подсчет количество итераций генерации предельно плоского графа минимального веса.

Далее находилось среднее значение по следующей формуле:

$$N_{cp} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} N_i\,. \tag{5}$$

Результаты выполнения тестовых примеров приведены в табл. 2. Горизонтальные ряды данных в таблице содержат результаты измерения количества итераций на 1 – 5 измерениях для текущего количества вершин для исходного и оптимизированного вариантов алгоритма.

По вертикали столбцы данных содержат информацию о количестве итераций в зависимости от количества вершин графа. Крайняя правая колонка содержит среднее значение количества итераций.

На основе информации, приведенной в табл. 2, построим гистограмму, приведенную на рис. 5.

Из табл. 2 видно, что после внесения оптимизации, количество итераций незначительно возросло. Однако, несмотря на некоторую противоречивость, она избавляет алгоритм от ресурсоемкой проверки на пересекаемость при попытке добавления всех ребер.

Для определения истинных результатов оптимизации необходимо произвести замеры временных характеристик работы алгоритма.

Таблица 2

Результаты эксперимента

Кол-во вершин		I	II	III	IV	V	
10	Исходный	11790	11790	11490	11490	11190	11550
	Оптимизированный	12262	12270	11920	11966	11560	11996
20	Исходный	178355	178355	178355	178355	178355	178355
	Оптимизированный	180341	180157	180119	179857	180367	180168
30	Исходный	905295	905295	905295	905295	905295	905295
	Оптимизированный	910431	909833	911301	911157	910019	910548
40	Исходный	2865410	2865410	2865410	2865410	2865410	2865410
	Оптимизированный	2873264	2871836	2875578	2873302	2874916	2873779
50	Исходный	7002200	7002200	7002200	7002200	7002200	7002200
	Оптимизированный	7015938	7012992	7018260	7015284	7013094	7015114

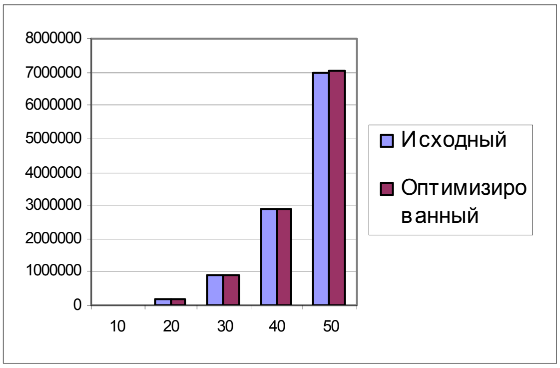

Рис. 5. Зависимость числа итераций от количества вершин в графе.

Результаты проведения замеров временных характеристик выполнения алгоритма на ПК с тактовой частотой 800 МГц приведены в табл. 3. Каждое из значений таблицы является средним после пятикратного выполнения алгоритма.

Таблица 3

Временные результаты эксперимента

n	Исходный (сек.)	Оптимизированный (сек.)	Улучшение %
10	0,09474	0,08098	14,52%
20	0,64628	0,57038	11,74%
30	6,1294	5,915	3,50%
40	34,248	33,646	1,76%
50	132,956	131,818	0,86%

Из табл. 3 видно уменьшение времени генерации ППГМВ, которое растет вместе с увеличением числа вершин в графе.

Заключение

В статье проведен анализ предельно плоского графа минимального веса. Определена зависимость числа ребер в предельно плоском графе минимального веса от числа его вершин и внешних ребер. На основе полученных результатов была выполнена оптимизация алгоритма [1]. В результате сравнительного тестирования было отмечено улучшение временных характеристик работы алгоритма.

Литература

1. Рева А.А., Некрасов А.Б. Генерация предельно плоского графа минимального веса на основе взвешенного неориентированного графа Керни // Авиационно-космическая техника и технология. – 2004. – № 3 (11). – С. 79 – 82.

2. Филипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.

3. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.

Поступила в редакцию 15.10.2004

Рецензент: канд. техн. наук А.В. Калмыков, ООО «Интерпорт», Харьков.